
ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 2.

УДК: 511

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-139-144

**О численной реализации одного метода решения
дифференциальных уравнений в частных производных с
применением теоретико-числовых сеток**

Ю. А. Басалов, Р. А. Белов

Басалов Юрий Александрович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Белов Роман Александрович — магистрант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: roman-belov.1234@yandex.ru

Аннотация

В работе численно сравниваются два метода решения периодического уравнения Пуассона $-\Delta u = f$ на двумерном торе $[0, 1)^2$: классическое двумерное БПФ на равномерной сетке $N \times N$ и алгоритм на параллелепипедальной сетке $M(a, p)$, сводящий вычисление коэффициентов Фурье решения к одномерному ДПФ длины p от значений правой части в узлах сетки. Сравнение методов производится на двух модельных задачах с гладкой и кусочно-гладкой правыми частями.

Ключевые слова: теоретико-числовые сетки, оптимальные коэффициенты, уравнения в частных производных, уравнение Пуассона, быстрое преобразование Фурье.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

Басалов Ю. А., Белов Р. А. О численной реализации одного метода решения дифференциальных уравнений в частных производных с применением теоретико-числовых сеток // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 139–144.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 2.

UDC: 511

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-139-144

**On the numerical implementation of one method for solving partial
differential equations using number-theoretic grids**

Yu. A. Basalov, R. A. Belov

Basalov Yuriy Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Belov Roman Aleksandrovich — master's student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: roman-belov.1234@yandex.ru

Abstract

We numerically compare two methods for solving the periodic Poisson equation $-\Delta u = f$ on the two-dimensional torus $[0, 1)^2$: the classical two-dimensional FFT on a uniform $N \times N$ grid, and A. V. Rodionov's algorithm on the parallelepipedal grid $M(a, p)$, which reduces the computation of Fourier coefficients of the solution to a one-dimensional DFT of length p over the values of the right-hand side at the grid nodes. The comparison of methods is carried out on two model problems with smooth and piecewise-smooth right-hand sides.

Keywords: number-theoretic grids, optimal coefficients, partial differential equations, Poisson equation, fast Fourier transform.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

Basalov, Yu. A., Belov, R. A. 2026, "On the numerical implementation of one method for solving partial differential equations using number-theoretic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 139–144.

1. Введение

Параллелепипедальные сетки, введённые Н. М. Коробовым в 1959 году [1], лежат в основе теоретико-числового метода в приближённом анализе и хорошо себя зарекомендовали в задачах многомерного интегрирования и интерполяции на классе E_s^α . В работе [4] построена и обоснована теория применения параллелепипедальных сеток для приближённого решения дифференциальных уравнений в частных производных, обобщающая схему В. С. Рябенко — Н. М. Коробова на случай произвольных обобщённых параллелепипедальных сеток. Цель настоящей работы — провести численные эксперименты, по сравнению этого подхода с классическим спектральным методом на равномерной сетке.

В качестве модельной задачи рассмотрим периодическое уравнение Пуассона

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1)^2, \quad \int_{[0, 1)^2} u \, dx \, dy = 0, \quad (1)$$

с условием

$$\int_{[0, 1)^2} f \, dx \, dy = 0.$$

Известно, что разложение решения и правой части в ряды Фурье связаны равенством

$$\hat{u}_{\vec{m}} = \hat{f}_{\vec{m}} / (4\pi^2 |\vec{m}|^2), \quad \vec{m} \neq \vec{0}$$

Классический подход вычисляет $\hat{f}_{\vec{m}}$ двумерным БПФ на равномерной сетке $N \times N$ за $O(N^2 \log N)$ операций; при этом точно описываются только моды до частоты Найквиста $|m_i| < N/2$ [3], а более высокочастотные компоненты подвержены ошибке. Метод на параллелепипедальной сетке $M(a, p)$, состоящей из p узлов, восстанавливает моды по гиперболическому кресту с $|m_i|$ вплоть до $\sim p/2$, что для широкого класса гладких или периодизированных функций даёт принципиально лучшую точность для $p \approx N^2$.

2. Алгоритм решения уравнения Пуассона на параллелепипе- дальной сетке

Пусть p — простое, a — оптимальный коэффициент по модулю p , β — его индекс [1]. Двумерная параллелепипедальная сетка имеет вид

$$M(a, p) = \left\{ \left(\frac{k}{p}, \left\{ \frac{ka}{p} \right\} \right) \mid k = 0, 1, \dots, p-1 \right\}.$$

Известно, что [4] коэффициенты Фурье решения уравнения (1) на гиперболическом кресте могут быть вычислены по значениям правой части в узлах сетки $M(a, p)$ при помощи одномерного дискретного преобразования Фурье длины p :

$$b(u) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}, \left\{ \frac{ka}{p} \right\}\right) e^{-2\pi i \frac{ku}{p}}, \quad u = 0, \dots, p-1.$$

По теореме об ортогональности характеров [2] справедливо равенство

$$b(u) = \sum_{\substack{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ m_1 + am_2 \equiv u \pmod{p}}} \hat{f}_{m_1, m_2},$$

причём для функций $f \in E_s^\alpha$ основной вклад в эту сумму дают точки $(m_1, m_2) \in M_H^*(\Lambda)$ — из полной минимальной гиперболической системы вычетов решётки $\Lambda(a; p)$ [5]. Тогда коэффициенты Фурье решения уравнения (1) приближаются формулой

$$\tilde{u}_{m_1, m_2} = \frac{b(u(m_1, m_2))}{4\pi^2(m_1^2 + m_2^2)}, \quad (m_1, m_2) \in M_H^* \setminus \{\vec{0}\},$$

а $\tilde{u}_{0,0}$ выбирается из условия нулевого среднего.

Численный эксперимент имеет следующие шаги:

1. вычисление массива значений $\left\{ f\left(\frac{k}{p}, \frac{ka}{p}\right) \right\}_{k=0}^{p-1}$;
2. одномерное БПФ длины p — получение $b(u)$;
3. построение системы M_H^* за $O(p \log p)$;
4. деление коэффициентов на $-4\pi^2(m_1^2 + m_2^2)$ и распределение их по двумерному массиву $N \times N$ согласно $p_i \equiv m_i \pmod{N}$;
5. обратное двумерное БПФ длины $N \times N$ — значения решения на равномерной сетке.

Суммарная вычислительная сложность — $O(p \log p + N^2 \log N)$, требуемая память — $O(p + N^2)$.

3. Численный эксперимент

В качестве оптимальных коэффициентов взяты пары соседних чисел Фибоначчи (F_{k+1}, F_k) — эти пары известны как оптимальные при $s = 2$ ввиду разложения золотого сечения в цепную дробь и удобны тем, что для них допустимо быстрое вычисление гиперболических параметров [6, 5]. Для двух модельных правых частей с известным точным решением ниже сравниваются два алгоритма:

- на равномерной сетке $N \times N$ при $N = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$;
- на параллелепипедальной сетке $M(a, p)$.

Погрешности приведены в норме отклонения от точного решения с нулевым средним.

В первой задаче (далее *tri*) точное решение имеет вид $u(x, y) = t(x)t(y)$, где

$$t(z) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots,K} \frac{\cos(2\pi mz)}{m^2}, \quad K = 500,$$

это частичная сумма ряда Фурье периодизированной треугольной волны $1 - 2|z - 1/2|$ (треугольный импульс с пиком в $z = 1/2$, нулями в $z = 0$ и $z = 1$). Соответствующая правая часть имеет вид

$$f_{tri}(x, y) = -t''(x)t(y) - t(x)t''(y), \quad t''(z) = 16 \sum_{m=1,3,\dots,K} \cos(2\pi mz).$$

С прикладной точки зрения это модельная задача стационарной теплопроводности (или электростатики) на двумерном торе с двоякопериодической решёткой сосредоточенных источников; решение u при этом имеет C^0 -гладкость (изломы вдоль линий $z = 1/2$). Коэффициенты Фурье решения убывают как $1/m^2$ вдоль координатных осей и попадают в класс E_s^2 [1].

Во второй задаче (далее *rho*) точное решение имеет вид $u(x, y) = r(x)r(y)$, где

$$r(z) = \sum_{m=1}^M \frac{\cos(2\pi mz)}{m^\alpha}, \quad M = 500, \quad \alpha = 2,$$

это частичная сумма ряда Фурье периодизированного полинома Бернулли $r_\infty(z) = \pi^2 B_2(z) = \pi^2(z^2 - z + \frac{1}{6})$. Правая часть

$$f_{rho}(x, y) = -r''(x)r(y) - r(x)r''(y), \quad r''(z) = -(2\pi)^2 \sum_{m=1}^M \cos(2\pi mz).$$

Прикладная интерпретация аналогична задаче *tri*, но с более гладким распределением источников. Эта функция также принадлежит $E_s^2(C)$ [1].

Результаты эксперимента приведены в таблице 1.

Таблица 1: Сравнение БПФ-метода и метода на параллелепипедальной сетке (ТМК) при равном числе обращений к f . Для БПФ $N = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$.

p	a	N	N^2	ошибка БПФ	ошибка ТМК	выигрыш
Задача <i>tri</i> ($K = 500$)						
610	233	25	625	7,377	4,037	1,83
1597	610	40	1600	17,52	0,4453	39,34
4181	1597	65	4225	2,739	0,1536	17,83
10946	4181	105	11025	1,636	0,08376	19,53
28657	10946	169	28561	0,8478	0,006639	127,71
75025	28657	274	75076	1,497	0,0006262	2391,27
196418	75025	443	196249	0,9105	0,00005710	15946,17
Задача <i>rho</i> ($M = 500, \alpha = 2,0$)						
610	233	25	625	140,6	44,40	3,17
1597	610	40	1600	87,44	17,34	5,04
4181	1597	65	4225	51,74	4,946	10,46
10946	4181	105	11025	29,85	1,092	27,33
28657	10946	169	28561	15,40	0,1498	102,82
75025	28657	274	75076	7,557	0,01308	577,63
196418	75025	443	196249	7,497	0,0009363	8006,62

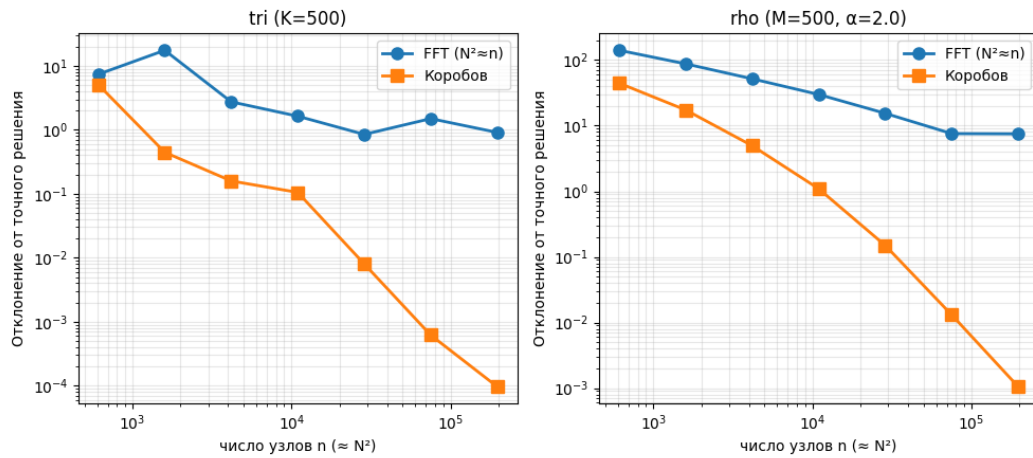


Рис. 1: Зависимость равномерной нормы отклонения от точного решения от числа узлов $p \approx N^2$ для классического БПФ и метода на параллелепипедальной сетке. Слева — задача *tri*, справа — задача *rho*.

4. Заключение

Численный эксперимент показывает, что на гладких периодических правых частях с быстро убывающими вдоль координатных осей коэффициентами Фурье численное решение с помощью параллелепипедальных сеток, существенно точнее классического БПФ [3] на равномерной сетке при равных вычислительных затратах. Наблюдаемое падение ошибки ТМК-метода соответствует теоретической оценке порядка $O(\log^{s-1}(p)/p^\alpha)$ [1], тогда как ошибка БПФ ограничена $O(N^{-\alpha}) \sim O(p^{-\alpha/2})$ из-за обрезания спектра частотой Найквиста.

Для размерностей $s \geq 3$ это преимущество усиливается: стоимость БПФ растёт как $N^s \log N$, тогда как алгоритм на параллелепипедальной сетке остаётся $O(p \log p)$ при $p \approx N^s$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. М.: Физматгиз, 1963.
2. Виноградов И. М. Основы теории чисел. Изд. 9-е, перераб. М.: Наука, 1981.
3. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. 1928. Vol. 47, № 2. P. 617–644.
4. Родионов А. В. Некоторые теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3. С. 256–297. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-256-297
5. Dobrovolskii, N.N., Dobrovolskii, N.M., Basalov, Y. A., Rebrov, E. D. Fast Calculation of Parameters of Parallelepipedal Nets for Integration and Interpolation // Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems. APAMCS 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, vol. 702. Springer, 2023. https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_16
6. Н. С. Бахвалов, О приближенном вычислении кратных интегралов, Вестн. МГУ, № 4 (1959), 3–18.

REFERENCES

1. Korobov, N. M. 1963, *Number-Theoretic Methods in Approximate Analysis*, Moscow: Fizmatgiz. (In Russian).
2. Vinogradov, I. M. 1981, *Elements of Number Theory*, 9th rev. edn. Moscow: Nauka. (In Russian).
3. Nyquist, H. 1928, “Certain topics in telegraph transmission theory”, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 47, no. 2, pp. 617–644.
4. Rodionov, A. V. 2021, “Some number-theoretic methods for solving partial derivatives”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 256–297. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-256-297
5. Dobrovolskii, N.N., Dobrovolskii, N.M., Basalov, Y. A., Rebrov, E. D. 2023, “Fast Calculation of Parameters of Parallelepipedal Nets for Integration and Interpolation”, *In: Alikhanov, A., Lyakhov, P., Samoylenko, I. (eds) Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems. APAMCS 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*, vol. 702. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_16
6. Bahvalov, N.S. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, *Vestnik Moskovskogo Universiteta*, 4, pp. 3–18.

Получено: 19.12.2025

Принято в печать: 19.05.2026