

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 511.9.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ОЦЕНКИ ПОЛНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СУММЫ ОТ МНОГОЧЛЕНА¹

В. Н. Чубариков (г. Москва)

Аннотация

В работе найдена оценка полной рациональной арифметической суммы от многочлена, точная по степени его знаменателя, с оценкой константы, зависящей от степени многочлена.

Ключевые слова: теорема Гаусса умножения для гамма-функции Эйлера, полные рациональные арифметические суммы, функциональное уравнение на полной системе сравнений по модулю натурального числа, многочлены Бернулли.

Библиография: 10 названий.

ELEMENTARY OF THE COMPLETE RATIONAL ARITHMETICAL SUMS

V. N. Chubarikov (Moscow)

In the paper the estimate of the complete rational arithmetical sum from a polynomial is found. It's is a correct on the power of a denominator with the estimate of the constant depending of the degree of a polynomial.

Keywords: the Gauss theorem of a multiplication for the Euler gamma-function, complete rational arithmetical sums, a functional equation on a complete system of residues by modulo of natural number, the Bernulli polynomials.

Bibliography: 10 titles.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № НК 13-01-00835

1. Введение

Настоящую статью автор посвящает светлой памяти Андрея Борисовича Шидловского к столетию со дня его рождения.

Пусть p — нечетное простое число, $l \geq 2$ — натуральное число; функция $F(x)$ — периодическая с периодом 1, которая для любого натурального числа m и a — взаимно простого с m , при любых вещественных x удовлетворяет следующему функциональному уравнению

$$F(mx) = F(x) + F\left(x + \frac{a}{m}\right) + \dots + F\left(x + \frac{a(m-1)}{m}\right). \quad (1)$$

В частности, в качестве F при $0 < x < 1$ можно взять функцию

$$F(x) = \ln(1 - e^{2\pi i x}) = \ln|2 \sin \pi x| - i\pi \rho(x),$$

а при $0 \leq x < 1$ — функцию $\rho(x) = 0, 5 - \{x\}$.

В настоящей работе дан вывод оценки полной рациональной арифметической суммы вида

$$S(F) = S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right) = \sum_{x=1}^{p^l} F\left(\frac{f(x)}{p^l}\right), \quad (2)$$

где $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами $a_n, \dots, a_1$, свободный коэффициент a_0 — вещественное число и $(a_n, \dots, a_1, p) = 1$. В дальнейшем будем предполагать, что $F(x)$ — ограниченная функция, $|F(x)| \leq 1$; а также, что $F(x)$ является кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной функцией на периоде, т.е. $F(x)$ удовлетворяет условиям утверждения теоремы Дирихле о разложении функции в ряд Фурье.

Сформулируем основное утверждение настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 4, l \geq 1$ — натуральные числа, p — простое число. Тогда справедливо неравенство

$$|S(F)| = \left| S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right) \right| \leq c(n) p^{l(1-1/n)},$$

где

$$c(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } p(\ln p)^{-2n/(n-2)} \geq (2n)^{2n/(n-2)}, \\ (2n)^{2/n}, & \text{если } p(\ln p)^{-2n/(n-2)} < (2n)^{2n/(n-2)}, p \geq (2n)^{n/(n-2)}, \\ (2n)^{3/n}, & \text{если } n < p < (2n)^{n/(n-2)}, \\ (2n)^{3/n+1}, & \text{если } n \leq p. \end{cases}$$

Будем предполагать, что при $l = 1$ справедливо неравенство

$$S(F) = S\left(\frac{f(x)}{p}; F\right) = \sum_{x=1}^p F\left(\frac{f(x)}{p}\right) \leq (n-1)\sqrt{p} \ln p.$$

2. Вспомогательные утверждения

Вывод теоремы 1 основан на следующих вспомогательных утверждениях.

ЛЕММА 1. Пусть p — простое число, $g(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a — корень кратности t сравнения $g(x) \equiv 0 \pmod{p}$, и пусть u — наибольшая степень числа p , делящая все коэффициенты многочлена $h(x) = g(px + a)$. Тогда число корней сравнения

$$p^{-u}h(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

с учетом их кратностей не превосходит t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, в [2], с. 55, лемма 2. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть p — простое число, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \dots, a_1, p) = 1$, и пусть u — наивысшая степень числа p , делящая все коэффициенты многочлена $g(x) = f(\lambda + px) - f(\lambda)$. Тогда имеем $1 \leq u \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [2], стр. 56, лемма 3. $\square$

Пусть p — простое число, $l \geq 2$ — натуральное число,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (a_n, \dots, a_1, p) = 1.$$

Рассмотрим сначала случай, когда p превосходит степень многочлена f , т.е. $p > n$. Представим сумму $S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right)$ в виде

$$S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right) = \sum_{\xi=1}^p S_{\xi}, \quad S_{\xi} = \sum_{\substack{x=1 \\ x \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^l} F\left(\frac{f(x)}{p^l}\right). \quad (3)$$

Имеем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $f'(\xi) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда $S_{\xi} = F\left(\frac{f(\xi)}{p}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} S_{\xi} &= \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^{l-1}} \sum_{z=0}^{p-1} F\left(\frac{f(y + p^{l-1}z)}{p^l}\right) = \\ &= \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^{l-1}} \sum_{z=0}^{p-1} F\left(\frac{f(y)}{p^l} + \frac{f'(y)z}{p}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользуемся функциональным уравнением (1). Найдем

$$S_{\xi} = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^{l-1}} F\left(\frac{f(y)}{p^{l-1}}\right).$$

Повторяя эту процедуру $l - 2$ раза, получим утверждение леммы 3. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $f'(\xi) \equiv 0 \pmod{p}$. Тогда

$$S_{\xi} = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^{l-1}} F\left(\frac{f(y)}{p^l}\right) p = p \sum_{y=1}^{p^{l-2}} F\left(\frac{f(\xi + py)}{p^l}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (4) получим утверждение леммы 4. $\square$

ЛЕММА 5. Пусть $a > 1$ и r, k — натуральные числа, $1 \leq r \leq k$, и

$$M(k) = \max_{m_1 + \dots + m_r = k} \sum_{s=1}^r a^{m_s},$$

где $m_1, \dots, m_r$ — натуральные числа. Тогда

$$M(k) \leq \max \{ka, a^k\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [2], стр. 56, лемма 4. $\square$

3. Примеры

1. Рассмотрим аналог суммы Гаусса

$$S(F) = S\left(\frac{n^2}{p^l}; F\right) = \sum_{n=1}^{p^l} F\left(\frac{n^2}{p^l}\right),$$

где p — нечетное простое число.

Имеем

$$S(F) = \sum_{\xi=0}^{p-1} S_{\xi}, \quad S_{\xi} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^l} F\left(\frac{n^2}{p^l}\right).$$

Из леммы 3 при $\xi \neq 0$ получим

$$S_{\xi} = F\left(\frac{\xi^2}{p}\right).$$

Пусть, теперь, $\xi = 0$. Пользуясь леммой 4, находим

$$S_0 = \sum_{n=1}^{p^{l-1}} F\left(\frac{n^2}{p^{l-2}}\right) = p \sum_{n=1}^{p^{l-2}} F\left(\frac{n^2}{p^{l-2}}\right) = p S\left(\frac{n^2}{p^{l-2}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$S(F) = S\left(\frac{n^2}{p^l}; F\right) = (1 + p + \dots + p^{[(l-1)/2]}) \sum_{\xi=1}^{p-1} F\left(\frac{\xi^2}{p}\right) + F(0).$$

В частности, полагая $F(x) = \rho(x) = 0, 5 - \{x\}$, находим

$$S(\rho) = S\left(\frac{n^2}{p^l}; \rho\right) = \sum_{n=1}^{p^l} \rho\left(\frac{n^2}{p^l}\right) = \frac{p^{[(l+1)/2]} - 1}{p - 1} \sum_{n=1}^{p-1} \rho\left(\frac{n^2}{p}\right) + \frac{1}{2}.$$

2. Далее рассмотрим простейшую полную рациональную сумму с многочленом степени k в аргументе функции F . Пусть $p > k$. Имеем

$$S(F) = S\left(\frac{n^k}{p^l}; F\right) = \sum_{n=1}^{p^l} F\left(\frac{n^k}{p^l}\right).$$

По аналогии с предыдущим примером представим сумму $S(F)$ в виде

$$S(F) = \sum_{\xi=0}^{p-1} S_{\xi}, \quad S_{\xi} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv \xi \pmod{p}}}^{p^l} F\left(\frac{n^k}{p^l}\right).$$

При $\xi \neq 0$ воспользуемся леммой 3 и условием $p > k$. Найдем

$$S_{\xi} = F\left(\frac{\xi^k}{p}\right).$$

При $\xi = 0$ и $l = l_1 k + r, 0 \leq r < k, l_1 = [l/k] \geq 1$ лемма 4 дает

$$S_0 = \sum_{n=1}^{p^{l-1}} F\left(\frac{n^k}{p^{l-k}}\right) = p^{k-1} \sum_{n=1}^{p^{l-k}} F\left(\frac{n^k}{p^{l-k}}\right) = p^{k-1} S\left(\frac{n^k}{p^{l-k}}; F\right).$$

Отсюда получим

$$S(F) = S\left(\frac{n^k}{p^l}; F\right) = (1 + p^{k-1} + \dots + p^{(k-1)(l_1-1)}) \sum_{n=1}^{p-1} F\left(\frac{f(x)}{p}\right) + \sum_{n=0}^{p^r} F\left(\frac{f(x)}{p^r}\right)$$

В частности, имеем

$$S(\rho) = S\left(\frac{n^k}{p^l}; \rho\right) = \frac{p^{(k-1)l_1} - 1}{p - 1} \sum_{n=1}^{p-1} \rho\left(\frac{f(x)}{p}\right) + \sum_{n=0}^{p^r} \rho\left(\frac{f(x)}{p^r}\right).$$

4. Доказательство теоремы

Рассмотрим только случай $p > n$. Будем вести индукцию по l . При $l = 1$, воспользовавшись разложением $F(x)$ в ряд Фурье и оценками А. Вейля тригонометрической суммы от многочлена с простым знаменателем, получим

$$\left| S\left(\frac{f(x)}{p}; F\right) \right| \leq \max \{p^{1/n}, (n-1)p^{-0,5+1/n} \ln p\} p^{1-1/n}.$$

Далее будем рассматривать $l \geq 2$. Пусть A обозначает множество корней сравнения $f'(x) \equiv 0 \pmod{p}$: вычеты $\xi_1, \dots, \xi_r$ по модулю p — различные корни и $m_1, \dots, m_r$ — кратности этих корней. Имеем $0 \leq m_1 + \dots + m_r \leq n-1$. Множество оставшихся вычетов по модулю p обозначим $B = \mathbf{Z}_p \setminus A$. Далее представим сумму $S(F)$ в виде

$$S(F) = \sum_{\xi=1}^p S_{\xi} = \Sigma_A + \Sigma_B, \quad S_{\xi} = \sum_{\substack{x \equiv \xi \pmod{p} \\ x=1}}^{p^l} F\left(\frac{f(x)}{p^l}\right),$$

$$\Sigma_A = \sum_{\xi \in A} S_{\xi}, \quad \Sigma_B = \sum_{\xi \in B} S_{\xi}.$$

Рассмотрим сначала $\xi \in B$. Тогда по лемме 3 получим

$$S_{\xi} = F\left(\frac{f(\xi)}{p}\right).$$

Следовательно,

$$\Sigma_B = \sum_{\xi \in B} F\left(\frac{f(\xi)}{p}\right).$$

Пусть, теперь, $\xi \in A$ и $m = m(\xi)$ — кратность корня ξ сравнения $f'(\xi) \equiv 0 \pmod{p}$. Обозначим $\sigma = \sigma(\xi)$ наивысшую степень числа p , делящую каждый из коэффициентов многочлена

$$f(\xi + py) - f(\xi) = p^{\sigma} g_{\xi}(y).$$

Отсюда, пользуясь разложением по формуле бинома Ньютона

$$f(\xi + py) - f(\xi) = f'(\xi)py + \frac{f''(\xi)}{2!}(py)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(py)^m + \dots,$$

находим, что $2 \leq \sigma \leq m+1$.

По лемме 4 при $l \geq 2$ для $\xi \in A$ получим

$$S_{\xi} = p \sum_{y=0}^{p^{l-2}-1} F\left(\frac{f(\xi + py)}{p^l}\right). \quad (5)$$

В частности, отсюда при $l = 2$ находим

$$S(F) = p \sum_{\xi \in A} F\left(\frac{f(\xi)}{p^2}\right) + \sum_{\xi \in B} F\left(\frac{f(\xi)}{p}\right); |S(F)| \leq (n-1)(p + \sqrt{p} + 1) \leq 2(n-1)p.$$

Далее при $\xi \in A$ возможны две ситуации: 1) $l > \sigma = \sigma(\xi)$ и 2) $l \leq \sigma$. В случае 1) по (5) имеем

$$S_\xi = p^{\sigma-1} \sum_{y=0}^{p^{l-\sigma}-1} F\left(\frac{g_\xi(y)}{p^{l-\sigma}} + \frac{f(\xi)}{p^l}\right) = p^{\sigma-1} S\left(\frac{g_\xi(y)}{p^{l-\sigma}} + \frac{f(\xi)}{p^l}\right).$$

В случае 2) по (5) получим

$$|S_\xi| \leq p^{l-1} \leq p^{l(1-1/n)} p^{-1+\sigma/n}.$$

Таким образом по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} |S_\xi| &\leq p^{\sigma-1+(l-\sigma)(1-1/n)} \max\{1/2, \min\{p^{1/n}, (n-1)p^{-0,5+1/n} \ln p\}\} = \\ &= p^{l(1-1/n)-1+\sigma/n} \max\{1/2, \min\{p^{1/n}, (n-1)p^{-0,5+1/n} \ln p\}\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |S(F)| &= \left| S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right) \right| \leq \sum_{\xi \in A} |S_\xi| + \left| \sum_{\xi \in B} S_\xi \right| \leq \\ &\leq p^{l(1-1/n)} \max\{1/2, \min\{p^{1/n}, (n-1)p^{-0,5+1/n} \ln p\}\} J + \left| \sum_{\xi \in B} S_\xi \right|, \end{aligned} \quad (6)$$

где $J = \sum_{\xi \in A} p^{-1+\sigma(\xi)/n}$.

При $p \geq (n-1)p^{n/(n-2)}$ оценим сверху сумму J . Используя неравенства

$$\sigma(\xi) \leq m(\xi) + 1, \sum_{\xi \in A} m(\xi) \leq n-1,$$

и лемму 5, находим

$$J = \sum_{\xi \in A} p^{-1+\sigma(\xi)/n} \leq p^{-1+1/n} \sum_{\xi \in A} p^{m(\xi)/n} \leq p^{-1+1/n} \max\{(n-1)p^{1/n}, p^{(n-1)/n}\} \leq 1.$$

Наконец, из (6) получим

$$|S(F)| \leq p^{l(1-1/n)} \max\{1/2, \min\{p^{1/n}, (n-1)p^{-0,5+1/n} \ln p\}\} \sum_{\xi \in A} p^{-1+\sigma(\xi)/n} +$$

$$+ \left| \sum_{\xi=0}^{p-1} F \left(\frac{f(\xi)}{p} \right) \right| + (n-1).$$

Отсюда при $p(\ln p)^{-2n/(n-2)} \geq (2n)^{2n/(n-2)}$ имеем $|S(F)| \leq p^{l(1-1/n)}$, а при $p \geq (n-1)^{n/(n-2)}$ — неравенство $|S(F)| \leq c(n)p^{l(1-1/n)}$, $c(n) = (2n)^{2/n}$.

Рассмотрим случай $n < p \leq (n-1)^{n/(n-2)}$. Будем, как и прежде, вести индукцию по l . При $l = 1$ и при $l = 2$ утверждение верно. Пусть $l \geq 3$ и утверждение верно для всех значений параметра, меньших l . Имеем

$$S(F) = \sum_{\xi \in A} S_{\xi} + \sum_{\xi \in B} F \left(\frac{f(\xi)}{p} \right). \quad (7)$$

Пусть $\xi \in A$. Возможны два случая: 1) $l > \sigma(\xi)$, 2) $l \leq \sigma(\xi)$. В случае 1) находим

$$S_{\xi} = p^{\sigma-1} S \left(\frac{g_{\xi}(y)}{p^{l-\sigma}} + \frac{f(\xi)}{p^l} \right).$$

По леммам 1 и 2 число корней η сравнения $g'_{\xi}(\eta) \equiv 0 \pmod{p}$ не превосходит $m = m(\xi)$. Множество всех корней η обозначим символом $A(\xi)$, и пусть $B(\xi) = \mathbf{Z}_p \setminus A(\xi)$. Определим многочлен $h_{\xi,\eta}(z)$ из соотношения $p^{\tau(\xi,\eta)} h_{\xi,\eta}(z) = g_{\xi}(\eta + pz) - g_{\xi}(\eta)$, где $\tau = \tau(\xi, \eta)$ — наивысшая степень числа p , делящая все коэффициенты последнего многочлена от переменной z , причем $\tau \leq \sigma$. Имеем

$$S_{\xi} = \sum_{\eta \in A(\xi)} S_{\xi,\eta} + \sum_{\eta \in B(\xi)} S_{\xi,\eta},$$

где

$$S_{\xi,\eta} = p^{\sigma-1} \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \eta \pmod{p}}}^{p^{l-\sigma}} F \left(\frac{g_{\xi}(y)}{p^{l-\sigma}} + \frac{f(\xi)}{p^l} \right).$$

Пусть $\eta \in A(\xi)$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{\xi,\eta} &= p^{\sigma-1} \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \eta \pmod{p}}}^{p^{l-\sigma-1}} \sum_{z=0}^{p-1} F \left(\frac{g_{\xi}(y + p^{l-\sigma-1}z)}{p^{l-\sigma}} + \frac{f(\xi)}{p^l} \right) = \\ &= p^{\sigma-1} \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \eta \pmod{p}}}^{p^{l-\sigma-1}} \sum_{z=0}^{p-1} F \left(\frac{g'_{\xi}(y)z}{p} + \frac{g_{\xi}(y)}{p^{l-\sigma}} + \frac{f(\xi)}{p^l} \right) = \\ &= p^{\sigma} \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \eta \pmod{p}}}^{p^{l-\sigma-1}} F \left(\frac{g_{\xi}(y)}{p^{l-\sigma}} + \frac{f(\xi)}{p^l} \right) = p^{\sigma} \sum_{z=0}^{p^{l-\sigma-2}-1} F \left(\frac{g_{\xi}(\eta + pz)}{p^{l-\sigma}} + \frac{f(\xi)}{p^l} \right). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\eta \in B(\xi)$. Имеем

$$\begin{aligned} S_{\xi, \eta} &= p^{\sigma-1} \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \eta \pmod{p}}}^{p^{l-\sigma-1}} \sum_{z=0}^{p-1} F \left(\frac{g'_{\xi}(y)z}{p} + \frac{g_{\xi}(y)}{p^{l-\sigma}} + \frac{f(\xi)}{p^l} \right) = \\ &= p^{\sigma-1} \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \eta \pmod{p}}}^{p^{l-\sigma-1}} F \left(\frac{g_{\xi}(y)}{p^{l-\sigma-1}} + \frac{f(\xi)}{p^{l-1}} \right) = \dots = p^{\sigma-1} F \left(\frac{g_{\xi}(\eta)}{p} + \frac{f(\xi)}{p^{\sigma+1}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$S_{\xi} = \sum_{\eta \in A(\xi)} p^{\sigma} \sum_{z=0}^{p^{l-\sigma-2}-1} F \left(\frac{g_{\xi}(\eta + pz)}{p^{l-\sigma}} + \frac{f(\xi)}{p^l} \right) + \sum_{\eta \in B(\xi)} p^{\sigma-1} F \left(\frac{g_{\xi}(\eta)}{p} + \frac{f(\xi)}{p^{\sigma+1}} \right).$$

Далее воспользуемся предположением индукции. Получим

$$\begin{aligned} |S_{\xi}| &\leq \sum_{\eta \in A(\xi)} p^{\sigma} c(n) p^{(l-\sigma-2)(1-1/n)} + (n-1)\sqrt{p} + (n-1) \leq \\ &\leq \sum_{\eta \in A(\xi)} c(n) p^{l-2-(l-\sigma-2)/n} + (n-1)\sqrt{p} + (n-1) \leq mc(n) p^{l(1-1/n)-2+(m+1)/n}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (7), имеем

$$|S(F)| \leq c(n) p^{l(1-1/n)-2+1/n} \sum_{\xi \in A} m p^{m/n} + (n-1)\sqrt{p} + (n-1) \leq c(n) p^{l(1-1/n)}.$$

Это завершает вывод оценки $S(F)$ в случае 1). Случай 2) рассматривается так же, как соответствующий случай при больших значениях p . Теорема доказана. $\square$

5. Заключение

В настоящей статье найден аналог оценки Хуа Ло-кена полной рациональной тригонометрической суммы от многочлена см. [1]—[4].

Вывод этой оценки основан на функциональном уравнении [5], обобщающем теорему Гаусса умножения для гамма-функции Эйлера. Представляют интерес более точные оценки для многочленов специального вида.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2-е изд., М.: Наука. 1980, 144 с.
2. Chen Jing-run. On Professor Hua's estimate on exponential sum // *Acta Sci. Sinica*. 1977. Vol. 20. № 6. P. 711–719.
3. Архипов Г. И. Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.
4. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 p.
5. Романов Н. П. Теория чисел и функциональный анализ: сборник трудов. Томск: Изд-во Том.ун-та. 2013. 478 с.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M. 1980, "*Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel*.", [The method of trigonometric sums in the theory of numbers] 2nd edition, Nauka, Moscow, 144 pp. (Russian)
2. Chen, Jing-run. 1977, "On Professor Hua's estimate on exponential sum", *Acta Sci. Sinica.*, vol. 20, № 6, pp. 711–719.
3. Arkhipov, G. I. 2013, "*Izbrannye trudy*.", [Selected works], Orl. Gos. Univ., Orel, 464 p. (Russian)
4. Arkhipov, G. I., Chubarikov V. N. & Karatsuba A. A. 2004, "Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis.", *De Gruyter expositions in mathematics*, vol. 39, Berlin, New York, 554 p.
5. Romanov, N. P. 2013, "*Teorija chisel i funkcional'nyj analiz: sbornik trudov*.", [Number theory and functional analysis: collected papers], Tom. Univ., Tomsk, 478 pp. (Russian)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Поступило 25.08.2015