

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 517.518, 517.982.22

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-97-117

Орторекурсивное разложение по системе Фабера – Шаудера

П. С. Степанянц

Степанянц Петр Суренович — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: petstep18@gmail.com

Аннотация

В настоящей работе проводится исследование системы Фабера – Шаудера, которая является базисом в пространстве непрерывных функций на отрезке, а также системой представления в лебеговых пространствах $L_p[0; 1]$. Изучается вопрос о возможности построения представлений функций рядами по системе Фабера – Шаудера посредством орторекурсивных разложений по данной системе. В работе приводится доказательство теорем о сходимости орторекурсивных разложений в различных функциональных пространствах. В частности, установлено, что для любой непрерывной функции её орторекурсивное разложение по системе Фабера – Шаудера сходится поточечно всюду к разлагаемой функции, за исключением, быть может, счётного множества точек. Для более широкого класса суммируемых функций доказана сходимость орторекурсивных разложений почти всюду. Кроме того, получены результаты о сходимости по норме в пространствах L_p . В работе также отмечается модификация системы Фабера – Шаудера, построенная на основе половинных сдвигов базисных функций. Такая модификация позволяет достичь равномерной сходимости орторекурсивных разложений непрерывных функций. Сопоставляются теоремы сходимости орторекурсивных разложений по стандартной системе Фабера – Шаудера и по её модификации.

Ключевые слова: орторекурсивное разложение, сходимость, система Фабера – Шаудера, система сжатий и сдвигов, лебеговы пространства.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Степанянц П. С. Орторекурсивное разложение по системе Фабера – Шаудера // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 97–117.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 517.518, 517.982.22

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-97-117

Orthorecursive expansion with respect to Faber-Schauder system

P. S. Stepanyants

Stepanyants Petr Surenovich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: petstep18@gmail.com

Abstract

This paper focuses on the Faber–Schauder system, which serves as a basis in the space of continuous functions on an interval and as a representation system in Lebesgue spaces $L_p[0; 1]$. We consider constructing function representations through series expansions with respect to the Faber–Schauder system using orthorecursive expansion. The work presents proofs of convergence theorems for orthorecursive expansions in various functional spaces. Specifically, we show that for any continuous function, its orthorecursive expansion with respect to the Faber–Schauder system converges pointwise to the decomposed function everywhere except possibly at a countable set of points. For the broader class of Lebesgue integrable functions, convergence almost everywhere of orthorecursive expansions is proved. Furthermore, results on convergence in L_p -norm in Lebesgue spaces are obtained. The paper also examines a modified version of the Faber–Schauder system constructed using semitranslates of basis functions. This modification allows to obtain uniform convergence of orthorecursive expansions for continuous functions. A comparison is provided of convergence theorems for orthorecursive expansions with respect to both the standard Faber–Schauder system and its modified version.

Keywords: orthorecursive expansion, convergence, Faber–Schauder system, system of translates and dilates, Lebesgue spaces.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Stepanyants, P. S. 2026, “Orthorecursive expansion with respect to Faber–Schauder system”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 97–117.

1. Введение

1.1. Система Фабера – Шаудера

Система Фабера – Шаудера получила свое название в честь математиков Георга Фабера и Юлиуша Павла Шаудера, исследовавших данную систему. В 1910 году Фабер [1] построил базис в пространстве $C[0; 1]$, проинтегрировав функции Хаара, тем самым получив систему, впоследствии названную "системой Фабера – Шаудера". В 1927 году Шаудер [2] ввел понятие базиса в банаховом пространстве и переоткрыл систему Фабера – Шаудера как простейший пример базиса в банаховом пространстве непрерывных на отрезке функций.

В наших целях мы отойдем от первоначального определения системы Фабера – Шаудера как интегралов от функций Хаара и введем ее через системы сжатий и сдвигов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть функция ϕ определена на отрезке $[0; 1]$. Доопределим функцию ϕ на $\mathbb{R}$ нулем вне отрезка $[0; 1]$. Для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ определим $\phi_k^n(x) = C_k^n \phi(2^n x - k + 1)$, где C_k^n – ненулевая константа. Систему $\{\phi_k^n\}_{n,k}$ будем называть системой (двоичных) сжатий и сдвигов функции ϕ .

Положим

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0; \frac{1}{2}]; \\ 2 - 2x, & \text{если } x \in [\frac{1}{2}; 1], \end{cases} \quad (1)$$

и обозначим систему сжатий и сдвигов функции $\phi(x)$ как $\Phi := \bigcup_{n,k} \{\phi_k^n\}$. Теперь определим систему Фабера – Шаудера:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\phi_{-2}(x) = 1$ и $\phi_{-1}(x) = x$ при $x \in [0; 1]$. Системой Фабера – Шаудера называется система функций $\{\phi_{-2}, \phi_{-1}\} \cup \Phi$, где константы C_k^n в системе сжатий

и сдвигов полагаются равными 1. Иными словами,

$$\phi_k^n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}\right), \\ 1, & \text{если } x = \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна на } \left[\frac{k-1}{2^n}; \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right] \text{ и } \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}; \frac{k}{2^n}\right]. \end{cases}$$

Как уже было отмечено ранее, система Фабера – Шаудера является базисом в пространстве непрерывных функций $C[0; 1]$. А именно, имеет место следующая теорема (см. [1], а также [3] гл. 6, §1):

ТЕОРЕМА 1 ([3]). Пусть $f \in C[0; 1]$. Для f определим

1. $a_{-2} = f(0)$,
2. $a_{-1} = f(1) - f(0)$,
3. $a_k^n = f\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{k-1}{2^n}\right) + f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right]$.

Тогда ряд

$$a_{-2}\phi_{-2}(x) + a_{-1}\phi_{-1}(x) + \sum_{n,k} a_k^n \phi_k^n(x) \quad (2)$$

равномерно сходится к $f(x)$ на $[0; 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь и далее $\sum_{n,k}$ означает $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma_n(k)=1}^{2^n}$. То есть суммирование вводится по возрастанию номера n , называемого номером пачки. Внутри пачки суммировать можно в произвольном порядке, так как внутренности носителей функций из одной пачки системы Фабера – Шаудера не пересекаются.

Систему Фабера – Шаудера можно ортогонализировать с помощью скалярного произведения в $L_2[0; 1]$ и получить систему Франклина. Ряды Фурье–Франклина сходятся в пространствах $C[0; 1]$ и $L_p[0; 1]$ (см. [3] гл. 6, §3). Однако мы не будем проводить ортогонализацию системы Фабера – Шаудера, а рассмотрим обобщение ортогональных разложений на случай неортогональных систем.

1.2. Орторекурсивные разложения

Орторекурсивные разложения, предложенные Т.П. Лукашенко в работах [4],[5], являются обобщением ортогональных разложений, сохраняющим основные свойства ортогональных разложений. Приведем определение и основные свойства орторекурсивных разложений [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — счетная система ненулевых элементов H . Орторекурсивное разложение элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ осуществляется следующим образом:

1. Положим $r_0 = f$.
2. Если задан остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$ и элемент e_n , то положим

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n) \|e_n\|^{-2}, \quad r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n. \quad (3)$$

Назовём $\hat{f}_k$ орторекурсивным коэффициентом Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Ряд $\sigma(f) = \sum_k \hat{f}_k e_k$ назовём орторекурсивным рядом Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, а $S_n(f) = \sum_{k \leq n} \hat{f}_k e_k$ — n -ой частичной суммой орторекурсивного ряда Фурье.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вместо термина "орторекурсивный ряд Фурье" будем иногда использовать термин "орторекурсивное разложение".

ТЕОРЕМА 2 ([5]). Орторекурсивное разложение обладает следующими свойствами:

1. Аналог тождества Бесселя: $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^N |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2 + \|r_n(f)\|^2$.
2. Аналог неравенства Бесселя: $\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$.
3. Равенство $f = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ в H имеет место тогда и только тогда, когда выполняется аналог равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$.

Если проводить орторекурсивное разложение по ортогональной системе, то орторекурсивный ряд Фурье совпадает с обычным рядом Фурье. Однако интересны разложения по неортогональным, в частности, переполненным системам. Одним из основных преимуществ разложений по таким системам является абсолютная устойчивость к погрешностям в вычислении коэффициентов, а также абсолютная устойчивость к малым изменениям системы [6]. Общие свойства орторекурсивных разложений исследовались в работах [5], [6]. Свойства орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам исследовались в работах [7], [8], а по системам сжатий и сдвигов – в работах [9],[10],[11]. Данные системы активно используются в приложениях.

Системы сжатий и сдвигов являются системами разложения в пространствах $L_p[0; 1]$, то есть имеет место следующий результат (см. [12]):

ТЕОРЕМА 3 ([12]). Пусть функция $\phi \in L_p[0; 1]$, где $1 \leq p < \infty$, такова, что $\int_0^1 \phi d\mu \neq 0$. Тогда для любой функции $f \in L_p[0; 1]$ существуют коэффициенты $\{c_k^n\}_{n,k}$ такие, что ряд $\sum_{n,k} c_k^n \phi_k^n$ сходится к f в L_p .

В работах А.Ю. Кудрявцева [11] и А.В. Политова [9] показано, что в $L_2[0; 1]$ коэффициенты разложения можно отыскать с помощью орторекурсивного разложения по системе сжатий и сдвигов функции ϕ . Таким образом, имеет место следующая теорема:

ТЕОРЕМА 4 ([9]). Пусть функция $\phi \in L_2[0; 1]$ такова, что $\int_0^1 \phi d\mu \neq 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\phi, 2^{-k}) < \infty$, где

$$\omega_2(\phi, \delta) = \left(\sup_{0 < h \leq \delta} \int_0^{1-h} |\phi(x+h) - \phi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

интегральный модуль непрерывности в $L_2[0; 1]$. Тогда для любой функции $f \in L_2[0; 1]$ ее орторекурсивный ряд Фурье по системе сжатий и сдвигов функции ϕ сходится к f в L_2 .

Для системы Фабера – Шаудера данный результат был получен Т.П. Лукашенко [4]:

СЛЕДСТВИЕ 1 ([4]). Пусть $f \in L_2[0; 1]$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе Фабера – Шаудера сходится к f в $L_2[0; 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Наличие функций $\phi_{-2}(x)$ и $\phi_{-1}(x)$ не влияет на сходимость орторекурсивного ряда, так как разложение $f(x)$ по системе Фабера – Шаудера эквивалентно разложению остатка $r_{-1}(x)$ по системе функций Φ . Поэтому при орторекурсивном разложении по системе Фабера – Шаудера будем говорить об орторекурсивном разложении по системе сжатий и сдвигов Φ . Кроме того, положим константы C_k^n в системе сжатий и сдвигов равными $\sqrt{3} \cdot 2^{n/2}$, так чтобы все функции в системе Φ имели норму равную 1 в $L_2[0; 1]$.

Также В.В. Галатенко, Т.П. Лукашенко и В.А. Садовничий получили результат о сходимости к разлагаемой функции почти всюду орторекурсивного ряда Фурье, который в терминах систем сжатий и сдвигов может быть сформулирован следующим образом [10]:

ТЕОРЕМА 5 ([10]). Пусть функция $\phi \in L_2[0; 1]$ такова, что $\phi \geq 0$ на $[0; 1]$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \omega^2(\phi, 2^{-k}) < \infty$, где

$$\omega(\phi, \delta) = \sup_{\substack{0 \leq x < x+h \leq 1 \\ 0 < h \leq \delta}} |\phi(x+h) - \phi(x)|.$$

Тогда для любой функции $f \in L_2[0; 1]$ ее орторекурсивный ряд Фурье по системе сжатий и сдвигов функции ϕ сходится к f почти во всех точках непрерывности функции f .

Для системы Фабера – Шаудера результат выглядит так:

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in L_2[0; 1]$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе Фабера – Шаудера сходится к f почти во всех точках непрерывности функции f .

Заметим, что описанные выше результаты сужают класс рассматриваемых функций до $L_2[0; 1]$. Наша цель получить результаты о сходимости в лебеговых пространствах $L_p[0; 1]$ и результат о сходимости почти всюду для функций из $L_1[0; 1]$. Для этого стоит упомянуть о модификации системы Фабера – Шаудера. Отметим, что орторекурсивное разложение по системе Фабера – Шаудера непрерывной функции, вообще говоря, не сходится всюду на отрезке $[0; 1]$, так как орторекурсивные коэффициенты $\hat{f}_k^n(3)$, вообще говоря, не будут совпадать с коэффициентами a_k^n разложения (2) непрерывной функции f по базису Фабера – Шаудера.

1.3. Модифицированная система Фабера – Шаудера

Идея модификации системы Фабера – Шаудера была предложена в работе [4] и подробным образом рассмотрена в работах автора [13] (совместно с А.К. Пауновым) и [14]. Модификация позволяет получить равномерную сходимость орторекурсивного разложения к разлагаемой непрерывной функции. Данная система рассматривается на одномерном торе S^1 , полученном склеиванием точек 0 и 1 отрезка $[0; 1]$. Модифицированная система отличается от классической системы Фабера – Шаудера добавлением "половинных" сдвигов, а именно:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть функция $e(x)$ определена на $[0; 1]$. Доопределим функцию $e(x)$ на $\mathbb{R}$ нулем вне отрезка $[0; 1]$. Для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}$ определим $e_k^n(x) = C_k^n e(2^n x - k/2 + 1)$, где C_k^n – ненулевая константа. Систему $\{e_k^n\}_{n,k}$ будем называть системой (двоичных) сжатий с половинными сдвигами функции $e(x)$.

Положим $e(x) = \phi(x)$ (см. (1)). Назовем систему сжатий с половинными сдвигами $\{e_k^n\}_{n,k}$ на S^1 с операциями по mod 1 модифицированной системой Фабера – Шаудера. Тогда система Φ является подсистемой модифицированной системы Фабера – Шаудера по всем четным индексам k .

Для модифицированной системы Фабера – Шаудера имеют место следующие результаты о сходимости в банаховых пространствах (см. [13]):

ТЕОРЕМА 6 ([13]). Пусть f является непрерывной функцией на S^1 . Тогда орторекурсивное разложение f по модифицированной системе Фабера – Шаудера сходится к f равномерно на S^1 .

ТЕОРЕМА 7 ([13]). Пусть $1 \leq p < \infty$ и f принадлежит лебегову пространству $L_p(S^1)$. Тогда орторекурсивное разложение f по модифицированной системе Фабера – Шаудера сходится к f в $L_p[0; 1]$.

Также был получен результат о сходимости почти всюду орторекурсивного разложения по модифицированной системе для функций из $L_1(S^1)$ (см. [14]):

ТЕОРЕМА 8 ([14]). Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1(S^1)$. Тогда орторекурсивное разложение f по модифицированной системе Фабера – Шаудера сходится к f почти всюду на S^1 .

2. Основные результаты

2.1. Формулировки теорем

Прежде чем сформулировать основные результаты, введем некоторые определения и обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $x_k^n = (k - 1)/2^{n+1}$, где $k = 1, 2, 3, \dots, 2^{n+1} + 1$. Назовем набор $\{x_k^n\}_{k=1}^{2^{n+1}+1}$ двоично-рациональными точками порядка n . Обозначим через Δ_k^n – носитель $e_k^n(x)$, а через D^n – пространство 1-периодических ломаных с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Набор функций $\{e_k^n\}_{k=1}^{2^{n+1}+1}$ из пачки с номером n модифицированной системы Фабера – Шаудера является базисом в пространстве D^n .

Как уже было отмечено ранее, сходимости в пространстве $C[0; 1]$ орторекурсивного разложения по системе Фабера – Шаудера нет. Однако имеет место результат о поточечной сходимости.

ТЕОРЕМА 9. Пусть f является непрерывной функцией на $[0; 1]$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе Фабера – Шаудера сходится к f во всех точках, кроме, быть может, всех двоично-рациональных точек. То есть орторекурсивный ряд Фурье сходится поточечно на множестве $[0; 1] \setminus \bigcup_{n,k} \{x_k^n\}$.

Класс функций, для которых орторекурсивное разложение сходится почти всюду, можно расширить до $L_1[0; 1]$. Также верен результат о сходимости в лебеговых пространствах.

ТЕОРЕМА 10. Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1[0; 1]$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе Фабера – Шаудера сходится к f почти всюду на $[0; 1]$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $1 \leq p < \infty$ и f принадлежит лебегову пространству $L_p[0; 1]$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе Фабера – Шаудера сходится к f в $L_p[0; 1]$.

Прежде чем перейти к доказательствам теорем, необходимо рассмотреть поведение частичных сумм орторекурсивного разложения по системе Фабера – Шаудера, а также установить сходимость орторекурсивного ряда Фурье при разложении по системе Фабера – Шаудера ломаной.

2.2. Частичные суммы орторекурсивного ряда Фурье

В работах [13] и [14] были рассмотрены частичные суммы орторекурсивного разложения по модифицированной системе Фабера – Шаудера. В данной работе будет использован тот же подход, однако процесс изменения частичных сумм выглядит иначе. В связи с этим оценки в работах [13] и [14] не переносятся на частичные суммы разложения по классической системе Фабера – Шаудера.

Отметим для начала, что частичные суммы $S_k^n(x)$ разложения по классической системе Фабера – Шаудера являются ломаными с вершинами в двоично-рациональных точках, причем $S_k^n(0) = S_k^n(1) = 0$. Значит, что $S_k^n \in D^n$ и частичные суммы представимы в виде

$$S_k^n(x) = \sum_{j=1}^{2^{n+1}} c_j \binom{n}{k} e_j^n(x), \quad (4)$$

где $c_j \binom{n}{k}$ — некоторые коэффициенты. Таким образом, частичной сумме $S_k^n(x)$ поставлен в соответствие набор $\{c_j \binom{n}{k}\}_{j=1}^{2^{n+1}}$, состоящий из 2^{n+1} числа. Определим процесс изменения набора $\{c_j \binom{n}{k}\}_{j=1}^{2^{n+1}}$ при орторекурсивном разложении. Для этого отметим, что для функций из одной пачки $(e_k^n, e_j^n) = 0$, если $j \notin \{k-1, k, k+1\}$, и $(e_k^n, e_{k+1}^n) = 1/4$. Здесь и далее будем считать, что если $k = 2^{n+1}$, то $k+1 = 1$. Без ограничения общности будем полагать, что разложение внутри пачки идет по возрастанию номера k .

1. Положим $c_j \binom{n}{0} = 0$ при $j = 1, 2$.
2. Если $k \neq 2^n$ и определен набор $\{c_j \binom{n}{k}\}_{j=1}^{2^{n+1}}$, то положим

$$\begin{cases} c_j \binom{n}{k+1} = c_j \binom{n}{k}, & \text{если } j \neq 2k+2, \\ c_{2k+2} \binom{n}{k+1} = (f; e_{2k+2}^n) - \frac{1}{4} [c_{2k+1} \binom{n}{k} + c_{k+3} \binom{n}{k}]. \end{cases} \quad (5)$$

3. Если определен набор $\{c_j \binom{n}{2^n}\}_{j=1}^{2^{n+1}}$, то определим набор $\{c_j \binom{n+1}{0}\}_{j=1}^{2^{n+2}}$, состоящий из $n+2$ чисел:

$$\begin{cases} c_{2j-1} \binom{n+1}{0} = \frac{1}{\sqrt{2}} c_j \binom{n}{2^n}, \\ c_{2j} \binom{n+1}{0} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [c_j \binom{n}{2^n} + c_{j+1} \binom{n}{2^n}]. \end{cases} \quad (6)$$

Данный процесс полностью определяет орторекурсивное разложение по системе Фабера – Шаудера. Шаг, определенный в (5) назовем *шагом по пачке*, а шаг, определенный в (6), назовем *переходом от одной пачки к другой*.

Вынесем нормировочный множитель $2^{-1/2}$ и получим, что коэффициент $c_j \binom{n}{k}$ представим в виде

$$c_j \binom{n}{k} = \sum_{m=0}^n 2^{\frac{m-n}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \lambda_{ij}^m (f, e_i^m), \quad (7)$$

где $\lambda_{ij}^m = 0$ для всех нечетных индексов i .

Теперь заметим, что в каждой фиксированной точке x все функции n -ой пачки, за исключением, может быть, двух, равны нулю. Обозначим ту из двух функций, для которой x лежит на промежутке убывания, индексом $\binom{n}{k(x)}$. Получим, что

$$S_k^n(x) = c_{k(x)} \binom{n}{k} e_{k(x)}^n(x) + c_{k(x)+1} \binom{n}{k} e_{k(x)+1}^n(x). \quad (8)$$

Для доказательств теорем нам потребуются оценки коэффициентов λ_{ij}^m . Эти оценки приведены далее в леммах. Также мы будем использовать максимальную функцию Харди – Литлвуда (см. [15] гл. VIII или [3] Приложение 1, 2°).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1(S^1)$. Максимальная функция Харди-Литлвуда для функции $f(x)$ — это функция

$$f^M(x) = \sup_{x \in I} \left(|I|^{-1} \int_I |f(t)| dt \right), \quad x \in S^1, \quad (9)$$

где супремум берется по всем интервалам $I \subseteq S^1$, содержащим точку x .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Определение функции Харди-Литлвуда дано на единичном торе S^1 для удобства получения последующих оценок. В дальнейшем не будем проводить различия между разложениями на отрезке $[0; 1]$ и на одномерном торе S^1 , поскольку результаты о сходимости естественным образом переносятся с одного топологического пространства на другое. Различие между случаями $C(S^1)$ и $C[0; 1]$ будет отмечено в доказательстве Леммы 1.

2.3. Леммы

Идея доказательства результатов данной работы состоит в том, чтобы приблизить разлагаемую функцию f ломаными l , для которых будут установлены результаты о сходимости орторекурсивного разложения по системе Фабера – Шаудера. Затем, получим оценки частичных сумм в соответствующих пространствах, чтобы оценить частичную сумму разложения f через частичные суммы разложений l и $f - l$, используя линейность частичных сумм орторекурсивного разложения по функциональному аргументу. Сформулируем полученные результаты в виде лемм.

Лемма 1 представляет собой результат о сходимости орторекурсивного разложения ломаных по системе Фабера – Шаудера.

ЛЕММА 1. Пусть $l(x)$ является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n для некоторого натурального n . Тогда орторекурсивное разложение по классической системе Фабера – Шаудера сходится поточечно к l , кроме, быть может, всех двоично-рациональных точек x_k^n .

Поскольку набор всех двоично-рациональных точек является счетным множеством, то получим:

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $l(x)$ является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n . Тогда орторекурсивное разложение l по системе Фабера – Шаудера сходится к l почти всюду.

Из Леммы 1 также можно получить Следствие 4. Доказательство этого следствия приведено в разделе Доказательства Лемм.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $l(x)$ является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n . Тогда орторекурсивное разложение l по системе Фабера – Шаудера сходится к l в $L_p[0; 1]$ для всех $1 \leq p < \infty$.

Перейдем теперь к оценкам частичных сумм. Сперва нам потребуется уточнить вид (7) коэффициентов $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$. А именно рассмотрение линейной комбинации скалярных произведений функции f со функциями e_i^m можно ограничить, взяв только одну функцию e_i^m из каждой пачки.

ЛЕММА 2. При орторекурсивном разложении f по системе Фабера – Шаудера для каждого j и фиксированного $m \leq n$ всего один коэффициент $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ является ненулевым. Таким образом, коэффициент $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ представим в виде

$$c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = \sum_{m=0}^n 2^{\frac{m-n}{2}} \lambda_{i(j),j}^m(f; e_{i(j)}^m),$$

где $i(j)$ выбирается так, что $\Delta_j^n \subseteq \Delta_{i(j)}^m$ и $\lambda_{i(j),j}^m \neq 0$.

Затем получим оценку суммы всех коэффициентов λ_{ij}^m , входящих в коэффициент $c_j \binom{n}{k}$. Сформулируем этот результат в Лемме 3 с помощью обозначений, введенных в Лемме 2.

ЛЕММА 3. При орторекурсивном разложении f по системе Фабера – Шаудера для каждого коэффициента $c_j \binom{n}{k}$ сумма модулей ненулевых коэффициентов λ_{ij}^m , стоящих при скалярных произведениях f с функциями системы Фабера – Шаудера ограничена. Точнее, для каждого $j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$ имеем

$$\sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(j),j}^m \binom{n}{k} \right| < 2.$$

После Леммы 3 можно перейти к доказательству Теоремы 9 о поточечной сходимости. Для доказательства сходимости почти всюду и в лебеговых пространствах потребуется Лемма 4.

ЛЕММА 4. Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1(S^1)$. Тогда модуль значения в любой точке любой частичной суммы орторекурсивного разложения f по системе Фабера – Шаудера не превосходит умноженного на некоторую константу значения максимальной функции Харди-Литлвуда (9) в этой точке. Точнее,

$$|S_k^n(f; x)| < 12f^M(x)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}^+$, $k = 1, 2, \dots, 2^n$ и $x \in S^1$.

С помощью Леммы 4 можно перейти к доказательству Теоремы 10. Из утверждения Теоремы 10 можно получить утверждение Теоремы 11 для случая $p \neq 1$. Для доказательства сходимости в лебеговом пространстве $L_1[0; 1]$ потребуются Лемма 5 и Лемма 6.

Для доказательства сходимости в случае $L_1[0; 1]$ нам потребуется оценка сумм всех коэффициентов $c_j \binom{n}{k}$. Для этого сперва установим порядок роста сумм (по j) коэффициентов $\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}$.

ЛЕММА 5. При орторекурсивном разложении f по системе Фабера – Шаудера для каждой функции e_i^m сумма (по j) модулей числовых коэффициентов $\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}$, стоящих при скалярных произведениях f с функцией системы Фабера – Шаудера e_i^m в коэффициенте $c_j \binom{n}{k}$, растет не быстрее, чем $O((3/2)^{n-m})$. Точнее, для каждого $i = 2, 4, \dots, 2^{m+1}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} \left| \lambda_{ij}^m \binom{n}{k} \right| \leq 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m},$$

а после прохождение всей пачки имеем

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} \left| \lambda_{ij}^m \binom{n}{2^n} \right| \leq \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}.$$

Теперь мы можем оценить L_1 -норму частичных сумм орторекурсивного разложения функции с помощью нормы этой функции.

ЛЕММА 6. Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1[0; 1]$. Тогда L_1 -норма любой частичной суммы орторекурсивного разложения f по системе Фабера – Шаудера не превосходит L_1 -норму функции $9f$. Другими словами,

$$\|S_k^n(f; x)\|_{L_1[0;1]} < 9\|f\|_{L_1[0;1]}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k = 1, 2, \dots, 2^n$.

С помощью полученного в Лемме 6 результата можно завершить доказательство Теоремы 11 для случая $p = 1$.

3. Доказательства

3.1. Доказательства лемм

3.1.1. Доказательство Леммы 1 и Следствия 4

ЛЕММА 1. Пусть $l(x)$ является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n для некоторого натурального n . Тогда орторекурсивное разложение по классической системе Фабера – Шаудера сходится поточечно к l , кроме, быть может, всех двоично-рациональных точек x_k^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство Леммы 1.] Ограничимся рассмотрением случая $l \in D^n$, то есть $l(0) = l(1)$. В случае $l(0) \neq l(1)$ необходимо вместо $e_1^n(x)$ с носителем $\Delta_1^n = [x_{2^{n+1}}^n; x_2^n] \subset S^1$ нужно рассматривать две функции $\tilde{e}_1^n(x)$ с носителем $[0; x_2^n]$ и $\tilde{e}_{2^{n+1}+1}^n(x)$ с носителем $[x_{2^{n+1}}^n; 1]$, являющиеся отдельно участками убывания и возрастания функции $e_1^n(x)$ с новой нормировкой. Скалярные произведения новых функций с единственной соседней равны $1/2$, что не влияет на процесс доказательства.

Рассмотрим орторекурсивное разложение l . Пусть r_k^N – остаток разложения для $N > n$. r_k^N – ломаная с вершинами в двоично-рациональных точках порядка N , то есть $r_k^N \in D^N$ и r_k^N раскладывается по базису из $\{e_k^N\}_{k=1}^{2^{N+1}}$ в D^N :

$$r_k^N = \sum_{j=1}^{2^{N+1}} d_j e_j^N.$$

При шаге по пачке (3) имеем:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{k+1}^N &= (r_k^N; e_{2k+2}^N) = d_{2k+2} + 1/4 \cdot d_{2k+1} + 1/4 \cdot d_{2k+3}. \\ r_{k+1}^N &= r_k^N - \hat{f}_{k+1}^N \cdot e_{2k+2}^N. \end{aligned}$$

Все d_j сохраняются, кроме d_{2k+2} , которые заменяются на $-1/4 \cdot d_{2k+1} - 1/4 \cdot d_{2k+3}$, поэтому

$$|r_k^N(x_{2k+2}^N)| \leq 1/2 \cdot \max(|r_k^N(x_{2k+1}^N)|; |r_k^N(x_{2k+3}^N)|),$$

то есть модуль значения в точке x_{2k+2}^N становится как минимум половиной модуля значения в каждой из соседних вершин.

Пусть $\|r_0^{n+1}\|_{C(S^1)} = \|r_{2^{n+1}}^n\|_{C(S^1)} = M$. Фиксируем точку x (не двоично-рациональную). При прохождении пачки с номером $N > n$ значение остатка в точке x не превосходит максимума значений в ближайших двоично-рациональных точках:

$$|r_k^N(x)| < \max(|r_k^N(x_{k(x)}^N)|; |r_k^N(x_{k(x)+1}^N)|).$$

После прохождения пачки N значение остатка изменится ровно в одной из двух точек $x_{k(x)}^N$ и $x_{k(x)+1}^N$ ($x_{k(x)}^N \leq x \leq x_{k(x)+1}^N$), в той, у которой индекс четный.

Поскольку x не является двоично-рациональной точкой, то в записи числа x в двоичной системе исчисления имеется бесконечно много 0 и 1 и, как следствие, пар вида 10 и 01.

Рассмотрим первую такую пару после n -го знака после запятой. Пусть эта пара встречается на N_1 -ом знаке и пусть для определенности это пара 10. Тогда при прохождении пачки N_1 значение остатка изменится в точке $x_{k(x)}^{N_1}$, а при прохождении пачки $N_1 + 1$ значение остатка изменится в точке $x_{k(x)+1}^{N_1+1}$. При этом точка $x_{k(x)}^{N_1+1}$ будет являться точкой $x_{k(x)}^{N_1}$, а значит в ней значение изменилось на прошлой пачке. По доказанному выше получаем, что

$$\left| r_{2^{N_1+2}}^{N_1+1} \left(x_{k(x)}^{N_1+1} \right) \right| < \frac{M}{2}, \quad \left| r_{2^{N_1+2}}^{N_1+1} \left(x_{k(x)+1}^{N_1+1} \right) \right| < \frac{M}{2}, \quad \text{а следовательно} \quad \left| r_{2^{N_1+2}}^{N_1+1}(x) \right| < \frac{M}{2}.$$

Ищем следующую пару вида 10 или 01 в записи числа x . Пусть это будет на N_2 знаке. Повторяя рассуждения выше, получим, что

$$\left| r_{2^{N_2+2}}^{N_2+1}(x) \right| < \frac{M}{4}.$$

Находим $N_3, N_4, \dots$ Для N_s выполнено

$$\left| r_{2^{N_s+2}}^{N_s+1}(x) \right| < \frac{M}{2^s},$$

поэтому значение остатка в точке x стремится к 0, а, следовательно, орторекурсивное разложение по системе Фабера – Шаудера ломаной l сходится к $l(x)$ в точке x , не являющейся двоично-рациональной.

Доказательство Леммы 1 завершено. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $l(x)$ является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n . Тогда орторекурсивное разложение l по системе Фабера – Шаудера сходится к l в $L_p[0; 1]$ для всех $1 \leq p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. Последовательность $|r_k^N|^p$, начиная с $N > n$, ограничена суммируемой функцией M^p и сходится к 0 почти всюду на S^1 . По теореме Лебега (см. [16] гл.3, §16) получаем, что

$$\int_{S^1} |r_k^N|^p d\mu \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Доказательство Следствия 4 завершено.

3.1.2. Доказательство Леммы 2

ЛЕММА 2. При орторекурсивном разложении f по системе Фабера – Шаудера для каждого j и фиксированного $m \leq n$ всего один коэффициент $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ является ненулевым. Таким образом, коэффициент $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ представим в виде

$$c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = \sum_{m=0}^n 2^{\frac{m-n}{2}} \lambda_{i(j),j}^m(f; e_{i(j)}^m),$$

где $i(j)$ выбирается так, что $\Delta_j^n \subseteq \Delta_{i(j)}^m$ и $\lambda_{i(j),j}^m \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Сформулируем правила изменения набора $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ для $m < n$:

Переход от одной пачки к другой, осуществляемый посредством (6), для коэффициентов $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ выглядит так:

$$\begin{cases} \lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \\ \lambda_{i,2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right). \end{cases} \quad (10)$$

Шаг по пачке, осуществляемый посредством (5), выглядит так:

$$\lambda_{i,2k+2}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{4} \left(\lambda_{i,2k+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,2k+3}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) \right). \quad (11)$$

Составим матрицу $G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = \left(\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) \right)_{i,j}$ для каждого m и по индукции покажем следующее:

1. Все нечетные строки G^m — нулевые.

2. В четных строках ненулевые элементы идут подряд, причем для i -ой строки и n -ой пачки разложения номера j ненулевых элементов строки идут с $2^{n-m}i - 2^{n-m+1} + 2$ по $2^{n-m}i$.

Заметим, что условие 2 означает, что если $\lambda_{ij}^m \binom{n}{k} \neq 0$, то $\Delta_j^n \subseteq \Delta_i^m$.

База. При $n < m$ матрица $G^m \binom{n}{k}$ нулевая.

При $n = m$ матрица $G^m \binom{n}{k}$ заполняется по столбцам и для $k = 2^n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Переход от одной пачки к другой. При переходе от одной пачки к другой нечетные строки остаются нулевыми. Если $\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}$, где $j = 2^{n-m}i - 2^{n-m+1} + 2$ — первый ненулевой в строке i , то, согласно (10), $2j - 2 = 2^{(n+1)-m}i - 2^{(n+1)-m+1} + 2$ — новый индекс первого ненулевого элемента. Аналогично получаем, что если $j = 2^{n-m}i$ — индекс последнего ненулевого элемента, то при переходе к другой пачке $2j = 2^{(n+1)-m}i$ — индекс последнего ненулевого элемента.

Шаг по пачке. Заметим, что номера j ненулевых элементов в разных строках не пересекаются и не стоят рядом. Действительно, последний ненулевой элемент в строке i имеет индекс $2^{n-m}i$, а первый ненулевой элемент в строке $i + 2$ (строка $i + 1$ — нулевая) имеет индекс $2^{n-m}(i + 2) - 2^{n-m} = 2^{n-m}i + 2$. Во время шага по пачке (11) столбец с четным номером матрицы G^m заменяется на сумму $1/4$ столбца слева и $1/4$ столбца справа, что удовлетворяет условиям 1 и 2.

Доказательство Леммы 2 завершено.

3.1.3. Доказательство Леммы 3

ЛЕММА 3. При орторекурсивном разложении f по системе Фабера – Шаудера для каждого коэффициента $s_j \binom{n}{k}$ сумма модулей ненулевых коэффициентов λ_{ij}^m , стоящих при скалярных произведениях f с функциями системы Фабера – Шаудера ограничена. Точнее, для каждого $j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$ имеем

$$\sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(j),j}^m \binom{n}{k} \right| < 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Докажем индукцией по n .

База. После прохождения 0-й пачки $\lambda_{1,j}^0 \binom{0}{1} = 0$, $\lambda_{2,j}^0 \binom{0}{1} = 1$.

Переход от одной пачки к другой. При переходе от одной пачки к другой значения всех коэффициентов $\lambda_{i,j}^{n+1} \binom{n+1}{0}$ равны 0. Поэтому, используя правила перехода от одной пачки к другой (10), для нечетных индексов получаем

$$\sum_{m=0}^{n+1} \left| \lambda_{i(2j-1),2j-1}^m \binom{n+1}{0} \right| = \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j-1),2j-1}^m \binom{n+1}{0} \right| = \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(j),j}^m \binom{n}{2^n} \right| < 2.$$

Отметим, что $\Delta_{2j-1}^{n+1} \subset \Delta_j^n \subseteq \Delta_{i(j_n)}^m = \Delta_{i(2j-1)_{n+1}}^m$, то есть для разложения по пачке с номером $n + 1$ индекс $i(2j - 1)$ выбирается так, что отрезок $\Delta_{i(2j-1)}^m$ — это тот же отрезок, что и отрезок $\Delta_{i(j)}^m$ в процессе разложения по пачке с номером n .

Аналогично, для четных индексов имеем

$$\sum_{m=0}^{n+1} \left| \lambda_{i(2j),2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(j),j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(j+1),j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| < 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

В данном случае $\Delta_{2j}^{n+1} \subset \Delta_j^n \subseteq \Delta_{i(j)n}^m = \Delta_{i(2j)n+1}^m$ и $\Delta_{2j}^{n+1} \subset \Delta_{j+1}^n \subseteq \Delta_{i((j+1)n)}^m = \Delta_{i(2j)n+1}^m$.

Шаг по пачке. Для всех $m < n$ коэффициенты $\lambda_{i(2j),2j}^m$ с четными индексами изменяются ровно один раз по формулам (11) в процессе прохождения всей пачки. Коэффициенты $\lambda_{i(2j-1),2j-1}^m$ с нечетными индексами не изменяются. При этом $\lambda_{i(2j),2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) = 1$, а $\lambda_{i(2j+1),2j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) = 0$. Таким образом, сумма коэффициентов с четными индексами изменилась, и имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j),2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| &\leq \sum_{m=0}^{n-1} \left| \lambda_{i(2j),2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| + \lambda_{i(2j),2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{n+1} \left| \lambda_{i(2j),2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right| + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{n+1} \left| \lambda_{i(2j),2j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right| + 1 < \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Сумма коэффициентов с нечетными индексами при этом не изменилась:

$$\sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j+1),2j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| = \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j+1),2j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right| < 2.$$

Отметим, что по Лемме 2 либо $\Delta_{2j+1}^n \subset \Delta_{i(2j)}^m$, либо $\lambda_{i(2j),2j+1}^m = 0$. Второе означает, что индекс $i(2j)$ не совпадает с индексом $i(2j+1)$, для которого соответствующий коэффициент $\lambda_{i(2j+1),2j+1}^m$ является ненулевым. Аналогично либо $\Delta_{2j-1}^n \subset \Delta_{i(2j)}^m$, либо $\lambda_{i(2j),2j-1}^m = 0$.

Доказательство Леммы 3 завершено.

3.1.4. Доказательство Леммы 4

ЛЕММА 4. Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1(S^1)$. Тогда модуль значения в любой точке любой частичной суммы орторекурсивного разложения f по системе Фабера – Шаудера не превосходит умноженного на некоторую константу значения максимальной функции Харди – Литлвуда (9) в этой точке. Точнее,

$$|S_k^n(f; x)| < 12f^M(x)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}^+$, $k = 1, 2, \dots, 2^n$ и $x \in S^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Оценим скалярные произведения функции f с функциями системы Фабера – Шаудера:

$$|(f; e_i^m)| \leq \sqrt{3} \cdot 2^{\frac{m}{2}} \cdot \int_{\Delta_i^m} |f| dx. \quad (13)$$

Значение частичной суммы орторекурсивного разложения функции f в точке x , исходя из (8), оценивается следующим образом:

$$|S_k^n(x)| \leq \left| c_{k(x)} \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) \right| e_{k(x)}^n(x) + \left| c_{k(x)+1} \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) \right| e_{k(x)+1}^n(x) < \sqrt{3} \cdot 2^{n/2} (|c_{k(x)} \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)| + |c_{k(x)+1} \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)|). \quad (14)$$

Используя (13) и Лемму 3, оценим коэффициент $c_{k(x)} \binom{n}{k}$ через значение максимальной функции Харди-Литлвуда (9) в точке x :

$$\begin{aligned} |c_{k(x)} \binom{n}{k}| &\leq \sum_{m=0}^n 2^{\frac{m}{2}-\frac{n}{2}} \cdot \left| \lambda_{i(k(x)), k(x)}^m \right| \cdot |(f; e_{k(x)})| = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(k(x)), k(x)}^m \right| \sqrt{3} \left(\frac{1}{2^{-m}} \int_{\Delta_i^m} |f| dx \right) \leq \\ &\leq 2^{-\frac{n}{2}} f^M(x) \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(k(x)), k(x)}^m \right| \leq 2^{1-\frac{n}{2}} f^M(x) \cdot \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Аналогичная оценка есть и для коэффициента $c_{k(x)+1} \binom{n}{k}$. Подставляя полученные оценки в (14) получаем неравенство

$$|S_k^n(f; x)| < 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{1-\frac{n}{2}} f^M(x) \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 12 f^M(x).$$

Доказательство Леммы 4 завершено.

3.1.5. Доказательство Леммы 5

ЛЕММА 5. При орторекурсивном разложении f по системе Фабера – Шаудера для каждой функции e_i^m сумма (по j) модулей числовых коэффициентов $\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}$, стоящих при скалярных произведениях f с функцией системы Фабера – Шаудера e_i^m в коэффициенте $c_j \binom{n}{k}$, растет не быстрее, чем $O((3/2)^{n-m})$. Точнее, для каждого $i = 2, 4, \dots, 2^{m+1}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}| \leq 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m},$$

а после прохождение всей пачки имеем

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n}{2^n}| \leq \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Вновь рассмотрим матрицу $G^m \binom{n}{k} = \left(\lambda_{ij}^m \binom{n}{k} \right)_{i,j}$ для каждого m и по индукции покажем, что максимальная строчная норма

$$\|G^m \binom{n}{k}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2^{m+1}} \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}|$$

не превосходит $2 \cdot (3/2)^{n-m}$. Более того, при $k = 2^n$ имеем

$$\|G^m \binom{n}{2^n}\|_\infty \leq \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}.$$

База. При $n < m$ матрица $G^m \binom{n}{k}$ нулевая.

При $n = m$ матрица $G^n \binom{n}{k}$ заполняется по столбцам и для $k = 2^n$ имеет вид (12).

Переход от одной пачки к другой. При переходе от одной пачки к другой число столбцов увеличивается вдвое, причем новые столбцы с нечетными номерами — это все старые столбцы, а новые столбцы с четными номерами получаются как средние арифметические соседних столбцов (10). Следовательно,

$$\begin{aligned} \|G^m \binom{n}{0}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 2^{m+1}} \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n}{0}| = 2 \max_{1 \leq i \leq 2^{m+1}} \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{ij}^m \binom{n-1}{2^{n-1}}| = \\ &= 2 \|G^m \binom{n-1}{2^{n-1}}\|_\infty < 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}. \end{aligned}$$

Шаг по пачке. После прохождения всей пачки столбцы с нечетными номерами сохраняются, а столбцы с четными номерами получаются как половина среднего арифметического соседних (11). При этом соседние, нечетные столбцы, не изменяются с предыдущей пачки. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)| &\leq \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)| + \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{i,2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)| + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{2^n} (|\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)| + |\lambda_{i,2j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)|) \leq \\ &\leq \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)| \leq \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{i,j}^m \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ 2^{n-1} \end{smallmatrix} \right)| \leq \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1-m} = \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}. \end{aligned}$$

Получаем, что

$$\|G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)\|_{\infty} \leq \frac{3}{2} \|G^m \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ 2^{n-1} \end{smallmatrix} \right)\|_{\infty} \leq \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}.$$

При этом

$$\|G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)\|_{\infty} \leq \max(\|G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)\|_{\infty}, \|G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)\|_{\infty}) \leq 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}.$$

Доказательство Леммы 5 завершено.

3.1.6. Доказательство Леммы 6

ЛЕММА 6. Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1[0; 1]$. Тогда L_1 -норма любой частичной суммы орторекурсивного разложения f по системе Фабера – Шаудера не превосходит L_1 -норму функции $9f$. Другими словами,

$$\|S_k^n(f; x)\|_{L_1[0;1]} < 9\|f\|_{L_1[0;1]}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k = 1, 2, \dots, 2^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Используя разложение (4) частичной суммы по базису пространства D^n , получим оценку L_1 -нормы частичной суммы

$$\|S_k^n(f; x)\|_{L_1[0;1]} \leq \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |c_j| \cdot \|e_j^n\|_{L_1[0;1]} = \sqrt{3} \cdot 2^{-1-\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |c_j|. \quad (15)$$

Оценим сумму модулей коэффициентов c_j :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |c_j| &\leq \sum_{j=1}^{2^{n+1}} \sum_{m=0}^n 2^{-\frac{1}{2}(n-m)} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{ij}^m| (|f|; e_i^m) \leq \sum_{m=0}^n 2^{-\frac{n}{2}} \cdot 2^{\frac{m}{2}} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} (|f|; e_i^m) \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m| \leq \\ &\leq 2 \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^n \sum_{m=0}^n 2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^{-m} \left(|f|; \sum_{i=1}^{2^{m+1}} e_i^m \right) \leq 2\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^n \|f\|_{L_1} \cdot \sum_{m=0}^n \left(\frac{4}{3} \right)^m \leq \\ &\leq 6\sqrt{3} \frac{3^n}{(2\sqrt{2})^n} \cdot \frac{4^n}{3^n} \cdot \|f\|_{L_1} \leq 6\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (15), заключаем, что

$$\|S_k^n(f; x)\|_{L_1} \leq 9\|f\|_{L_1}.$$

Доказательство Леммы 6 завершено.

3.2. Доказательства теорем

3.2.1. Доказательство Теоремы 9

ТЕОРЕМА 9. Пусть f является непрерывной функцией на $[0; 1]$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе Фабера – Шаудера сходится к f во всех точках, кроме, быть может, всех двоично-рациональных точек. То есть орторекурсивный ряд Фурье сходится поточечно на множестве $[0; 1] \setminus \bigcup_{n,k} \{x_k^n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Для модуля значения частичной суммы орторекурсивного разложения непрерывной функции f в произвольной точке x верна оценка (14).

По неравенству Гельдера (см. [16] гл. 4, §22) имеем:

$$|(f; e_i^m)| \leq \|f\|_{L_\infty[0;1]} \cdot \|e_i^m\|_{L_1[0;1]} = \sqrt{3} \cdot 2^{-1-m/2} \|f\|_{C[0;1]}.$$

Тогда для коэффициента $c_{k(x)}(\frac{n}{k})$ по Лемме 3 выполнено

$$\begin{aligned} |c_{k(x)}^n| &< \sum_{m=0}^n 2^{\frac{m}{2} - \frac{n}{2}} \cdot \left| \lambda_{i(k(x)), k(x)}^m \right| \cdot |(f; e_{k(x)})| \leq \\ &\leq 2^{-\frac{n}{2}} \cdot \|f\|_{C[0;1]} \cdot \sqrt{3} \cdot \sum_{m=0}^n 2^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{-1-\frac{m}{2}} \cdot \left| \lambda_{i(k(x)), k(x)}^m \right| \leq \\ &\leq 2^{-1-\frac{n}{2}} \cdot \|f\|_{C[0;1]} \cdot \sqrt{3} \cdot \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(k(x)), k(x)}^m \right| \leq \sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \cdot \|f\|_{C[0;1]}. \end{aligned}$$

Аналогичная оценка присутствует и для коэффициента $c_{k(x)+1}(\frac{n}{k})$. Подставляя полученные оценки в (14) получаем оценку нормы частичной суммы

$$\|S_k^n(f)\|_{C[0;1]} < 6\|f\|_{C[0;1]},$$

которая выполнена для любой непрерывной на отрезке $[0; 1]$ функции f .

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для некоторого натурального N существует ломаная l с вершинами в двоично-рациональных точках порядка N , такая, что $\|f - l\|_{C[0;1]} < \varepsilon$. Тогда по Лемме 1 для всякой точки x , не являющейся двоично-рациональной, существует натуральное число $M > N$ такое, что для всех $n > M$ и для всех $k = 1, \dots, 2^n$ выполнено

$$|l(x) - S_k^n(l; x)| < \varepsilon.$$

Тогда для всякой точки x , не являющейся двоично-рациональной, выполнено

$$|f(x) - S_k^n(f; x)| \leq |(f-l)(x) - S_k^n((f-l); x)| + |l(x) - S_k^n(l; x)| < |f(x) - l(x)| + 6|f(x) - l(x)| + \varepsilon < 8\varepsilon.$$

Доказательство Теоремы 9 завершено.

3.2.2. Доказательство Теоремы 10

ТЕОРЕМА 10. Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1[0; 1]$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе Фабера – Шаудера сходится к f почти всюду на $[0; 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Согласно критерию сходимости почти всюду (см. [16], гл. 2, §13), сходимость почти всюду на S^1 частичных сумм $S_k^n(f; x)$ к $f(x)$ эквивалентна следующему утверждению: для любого $\varepsilon > 0$ верно равенство

$$\lim_{\substack{(n_0) \\ (k_0) \rightarrow \infty}} \mu \left(\bigcup_{\substack{(n) \\ (k) = (k_0)}}^{\infty} G_k^n \right) = 0$$

где G_k^n — множество $x \in S^1$, таких, что $|S_k^n(f; x) - f(x)| > \varepsilon$. Докажем это утверждение. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ существует ломаная с вершинами в двоично-рациональных точках $l_j \in D^{N_0}$ (для некоторого $N_0(j)$), такая, что $\|f - l_j\|_{L_1} < \varepsilon^2/2^j$. Полученная последовательность $\{l_j\}_{j=1}^\infty$ сходится к $f(x)$ в $L_1(S^1)$.

По Следствию 3 последовательность $S_k^n(l_j; x)$ сходится к l_j почти всюду на S^1 . По теореме Егорова (см. [16], гл. 2, §13) существует такое множество $H_j \subset S^1$, что $\mu(H_j) < \varepsilon/2^j$ и на множестве $S^1 \setminus H_j$ последовательность $S_k^n(l_j; x)$ сходится к l_j равномерно.

Таким образом, существует такой индекс $\binom{N}{K}_j$, что для всех индексов $\binom{n}{k} > \binom{N}{K}_j$ неравенство

$$|S_k^n(l_j; x) - l_j(x)| < \varepsilon/3 \quad (16)$$

выполняется для всех $x \in S^1 \setminus H_j$. А значит, для достаточно больших индексов $\binom{n}{k}$ существует натуральное число j , такое, что выполнено неравенство (16) для всех больших индексов.

Положим индекс $\binom{n_0}{k_0}$ и натуральное число j_0 такими, чтобы неравенство (16) выполнялось для $j = j_0$, всех индексов $\binom{n}{k} \geq \binom{n_0}{k_0}$ и при $x \in S^1 \setminus H_{j_0}$. Затем для каждого индекса $\binom{n}{k} > \binom{n_0}{k_0}$ выберем число j следующим образом: если для индекса $\binom{n}{k-1}$ (или $\binom{n}{2^n}$) было выбрано число j , то для индекса $\binom{n}{k}$ (или $\binom{n+1}{0}$) выбираем число $j+1$, если неравенство (16) выполнено для всех $x \in S^1 \setminus H_{j+1}$ и для всех индексов, начиная с $\binom{n}{k}$. Иначе, выберем число j . В таком случае мы получим неубывающую стремящуюся к бесконечности последовательность j , поставленную в соответствие последовательности индексов $\binom{n}{k}$.

Введем следующие множества:

$$\begin{cases} H_k^n := \{x \in S^1 : |S_k^n(l_j; x) - l_j(x)| > \varepsilon/3\}, \\ I_k^n := \{x \in S^1 : |S_k^n(f - l_j; x)| > \varepsilon/3\}, \\ J_k^n := \{x \in S^1 : |l_j(x) - f(x)| > \varepsilon/3\}, \\ F_k^n := \{x \in S^1 : |12(f - l_j)^M(x)| > \varepsilon/3\}. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь $(f - l_j)^M$ является максимальной функцией Харди-Литлвуда (9) для функции $f(x) - l_j(x)$. Заметим, что J_k^n и F_k^n напрямую зависят только от j , поэтому обозначим также J_k^n как J_j и F_k^n как F_j .

Частичные суммы линейны по функциональному аргументу. Поэтому

$$|S_k^n(f; x) - f(x)| \leq |S_k^n(l_j; x) - l_j(x)| + |S_k^n(f - l_j; x)| + |l_j(x) - f(x)|.$$

Таким образом, применяя (17), получим, что

$$G_k^n = \{x \in S^1 : |S_k^n(f; x) - f(x)| > \varepsilon\} \subseteq H_k^n \cup I_k^n \cup J_k^n.$$

Номер j был выбран так, чтобы выполнялось неравенство (16) на $S^1 \setminus H_j$. Таким образом, $H_k^n \subset H_j$. Имеем $(f - l_j) \in L_1(S^1)$, поэтому по Лемме 4 частичные суммы $S_k^n(f - l_j; x)$ удовлетворяют неравенству $|S_k^n(f - l_j; x)| \leq 12(f - l_j)^M(x)$, и $I_k^n \subseteq F_k^n$. Таким образом, $G_k^n \subseteq F_k^n \cup J_k^n \cup H_k^n$.

Рассмотрим объединение:

$$\bigcup_{\binom{n}{k} = \binom{n_0}{k_0}}^\infty G_k^n \subseteq \bigcup_{\binom{n}{k} = \binom{n_0}{k_0}}^\infty (F_k^n \cup J_k^n \cup H_k^n) \subseteq \left(\bigcup_{j=j_0}^\infty F_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=j_0}^\infty J_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=j_0}^\infty H_j \right). \quad (18)$$

Ломаная l_j была выбрана так, чтобы норма $\|f - l_j\|_{L_1} < \varepsilon^2/2^j$. Поэтому выполнено неравенство

$$\mu(J_j) = \mu(\{x \in S^1 : |l_j(x) - f(x)| > \varepsilon/3\}) < 3\varepsilon/2^j. \quad (19)$$

По свойству функции Харди-Литлвуда (см. [3], Приложение 1, 2°),

$$\mu(F_j) = \mu(\{x \in S^1 : |(f - l_j)^M(x)| > \varepsilon/36\}) \leq \frac{5 \cdot 36}{\varepsilon} \|f - l_j\|_{L_1} \leq \frac{180}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^j} = \frac{180\varepsilon}{2^j}. \quad (20)$$

Рассмотрим меры объединения (18). Множество H_j было выбрано так, чтобы $\mu(H_j) < \varepsilon/2^j$. Используя этот факт, а также (19) и (20), получаем, что

$$\mu\left(\bigcup_{\binom{n}{k}=\binom{n_0}{k_0}} G_k^n\right) \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \mu(F_j) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \mu(J_j) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \mu(H_j) \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{180\varepsilon}{2^j} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{3\varepsilon}{2^j} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \frac{184\varepsilon}{2^{j_0-1}}.$$

Последовательность j была выбрана таким образом, чтобы при стремлении $\binom{n_0}{k_0}$ к бесконечности j_0 также стремился к бесконечности. А потому

$$\lim_{\binom{n_0}{k_0} \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{\binom{n}{k}=\binom{n_0}{k_0}} G_k^n\right) = \lim_{j_0 \rightarrow \infty} \frac{184\varepsilon}{2^{j_0-1}} = 0.$$

Доказательство Теоремы 10 завершено.

3.2.3. Доказательство Теоремы 11

ТЕОРЕМА 11. Пусть $1 \leq p < \infty$ и f принадлежит лебегову пространству $L_p[0; 1]$. Тогда орторекурсивное разложение f по системе Фабера – Шаудера сходится к f в $L_p[0; 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11. Рассмотрим сначала случай $1 < p < \infty$.

Поскольку мера отрезка $[0; 1]$ конечна, то пространство $L_p[0; 1]$ вложено в пространство $L_1[0; 1]$ (см. [16] гл. 4, §22). Значит, можно считать, что $f \in L_1(S^1)$ и для f справедлива Лемма 4. При этом для максимальной функции Харди-Литлвуда (9) выполнено неравенство $\|f^M(x)\|_{L_p} \leq a_{ep} \|f\|_{L_p}$ (см. [15] гл. VIII или [3] Приложение 1, 2°), где a_{ep} — константа, зависящая только от p .

Таким образом, последовательность $|S_k^n(f; x) - f(x)|^p$ ограничена суммируемой функцией $|f(x) + 12f^M(x)|^p$. По Теореме 10 последовательность $|S_k^n(f; x) - f(x)|^p$ сходится к 0 почти всюду. А значит, по теореме Лебега (см. [16] гл.3, §16) заключаем, что

$$\|f - S_k^n(f; x)\|_{L_p[0;1]} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим теперь случай $p = 1$. Пространство ломаных $\bigcup_{n=0}^{\infty} D^n$ с вершинами в двоично-рациональных точках всюду плотно в пространстве $L_1(S^1)$. Используем этот факт и Лемму 6 для доказательства теоремы.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для некоторого натурального N существует ломаная l с вершинами в двоично-рациональных точках порядка N , такая, что $\|f - l\|_{L_1[0;1]} < \varepsilon$. Тогда по Следствию 4 существует натуральное число $M > N$ такое, что для всех $n > M$ и для всех $k = 1, \dots, 2^n$ выполнено

$$\|l(x) - S_k^n(l; x)\|_{L_1[0;1]} < \varepsilon.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|f - S_k^n(f)\|_{L_1[0;1]} &\leq \|(f - l) - S_k^n(f - l)\|_{L_1[0;1]} + \|l - S_k^n(l)\|_{L_1[0;1]} < \\ &< \|(f - l)\|_{L_1[0;1]} + 9 \|(f - l)\|_{L_1[0;1]} + \varepsilon < 11\varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство Теоремы 11 завершено.

4. Заключение

Ранее в работах автора [13] и [14] были получены результаты о сходимости орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера – Шаудера. В данной работе рассмотрена классическая система. Для орторекурсивных разложений по ней справедливы результаты о сходимости в пространствах L_p ($1 \leq p < \infty$) и о сходимости почти всюду при разложении интегрируемой по Лебегу функции. Также удалось получить поточечную сходимость для непрерывных функций за исключением, быть может, двоично-рациональных точек.

Автор выражает глубокую благодарность доценту В.В. Галатенко и профессору Т.П. Лукашенко за ряд ценных советов, полезные обсуждения и поддержку в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faber G. Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar. Deutsche Mathematiker-Vereinigung. 1910. Vol. 19. S. 104–112.
2. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. Mathematische Zeitschrift. 1927. Vol. 26. S. 47–65.
3. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
4. Лукашенко Т. П. Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера-Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы. Саратов: Издательство Саратовского университета. 2000. Т. 83.
5. Лукашенко Т. П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. 2001. (1). С. 6–10.
6. Галатенко В. В. Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Известия РАН. Серия математическая. 2005. Т. 69, № 1. С. 3–16. DOI: <https://doi.org/10.4213/im622>.
7. Кудрявцев А. Ю. О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Математические заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 707–720. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8933>.
8. Кудрявцев А. Ю. О скорости сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Известия РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 4. С. 49–64. DOI: <https://doi.org/10.4213/im7301>.
9. Политов А. В. Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. 2010. Т. 65, № 3. С. 95–99.
10. Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichiy V. A. Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansions in Systems of Translates and Dilates // Modern Mathematics and Mechanics. 2019. С. 3–11. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_1.
11. Кудрявцев А. Ю. Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. Воронеж. 2001. С. 161–162.
12. Filippov V. I., Oswald P. Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // Journal of Approximation Theory. 1995. Vol. 82, № 1. P. 15–29.

13. Степанянц П. С., Паунов А. К. Орторекурсивное разложение по модификации системы Фабера-Шаудера // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. 2023. Т. 65, № 4. С. 15–22. DOI: <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-3>.
14. Stepanyants P. S. Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansion with Respect to Modified Faber–Schauder System // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, № 12. P. 6610–6623. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224607057>.
15. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . Москва: Мир, 1984.
16. Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. Москва: Факториал, 1998.

REFERENCES

1. Faber, G. 1910, “About the orthogonal functions of Herr Haar.”, *German Mathematical Society*, vol. 19, pp. 104–112 [in German].
2. Schauder, J. 1927, “On the theory of continuous functions in functional spaces”, *Mathematical Journal*, vol. 26. pp. 47–65 [in German].
3. Kashin, B. S., Saakyan, A. A. 1984, *Orthogonal series*, Moscow: Nauka [in Russian].
4. Lukashenko, T. P. 2000, “On orthorecursive expansions by the Faber–Schauder system”, *10th International Saratov Winter School “Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications”*, Saratov: Izv. Saratov. Univ., p. 83 [in Russian].
5. Lukashenko, T. P. 2001, “Properties of orthorecursive expansions in nonorthogonal systems”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, vol. 56, no. 1, pp. 5–9 [in Russian].
6. Galatenko, V. V. 2005, “On orthorecursive expansions with errors in the calculation of coefficients”, *Izv. Math.*, vol. 69, no. 1, pp. 3–16 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.4213/im622>.
7. Kudryavtsev, A. Yu. 2012, “On the convergence of orthorecursive expansions with respect to nonorthogonal splashes”, *Mat. Zametki*, vol. 92, no. 5. pp. 707–720 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8933>.
8. Kudryavtsev, A. Yu. 2012, “On the convergence rate of orthorecursive expansions with respect to nonorthogonal splashes”, *zv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat.*, vol. 76, no. 4. pp. 49–64 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.4213/im7301>.
9. Politov, A. V. 2010, “Orthorecursive expansions in Hilbert spaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 65, no. 3, pp. 95–99 [in Russian].
10. Galatenko, V. V., Lukashenko, T. P., Sadovnichiy, V. A. 2019, “Convergence almost everywhere of orthorecursive expansions in systems of translates and dilates”, *Modern Mathematics and Mechanics*, pp. 3–11. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_1.
11. Kudryavtsev, A. Yu. 2001, “Orthorecursive expansions with respect to systems of translates and dilates of a fixed function”, *Proc. Voronezh Winter Math. School “Modern Methods of Function Theory and Related Problems”*, Voronezh: Voronezh State Univ., pp. 161–162 [in Russian].
12. Filippov, V. I., Oswald, P. 1995, “Representation in L_p by series of translates and dilates of one function”, *Journal of Approximation Theory*, vol. 82, no. 1. pp. 15–29.

13. Paunov, A. K., Stepanyants, P. S. 2023, “Orthorecursive expansion with respect to modified Faber–Schauder system”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, vol. 65, no. 4, pp. 15–22 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-3>.
14. Stepanyants, P. S. 2024, “Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansion with Respect to Modified Faber–Schauder System”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 45, no. 12. pp. 6610–6623. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224607057>.
15. Kusiś, P. 1984, “*Introduction to H^p spaces*”, Moscow: Mir [in Russian].
16. Dyachenko, M. I., Ulyanov, P. L. 1998, “*Measure and integral*”, Moscow: Faktorial [in Russian].

Получено: 16.07.2025

Принято в печать: 19.05.2026