

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 511.344

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-71-96

К обобщению тернарной проблемы Гольдбаха
с почти равными слагаемыми

З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов, П. З. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).

e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmonov@gmail.com

Рахмонов Фируз Заруллоевич — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).

e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Рахмонов Парвиз Заруллоевич — кандидат физико-математических наук, Marex Group Plc (Великобритания, г. Лондон).

e-mail: parviz.msu@gmail.com

Аннотация

Получена асимптотическая формула для числа представлений достаточно большого натурального числа N в виде

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N$$

при условиях

$$\left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{5}{8} + \varepsilon}, \quad b_i \leq (\ln N)^{B_i},$$

где b_1, b_2, b_3 и N — попарно взаимно простые натуральные числа, а B_i — произвольные фиксированные положительные числа.

Ранее аналогичная асимптотическая формула была доказана при условии

$$H \geq (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}.$$

Ключевые слова: тернарная проблема Гольдбаха, почти равные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, малая окрестность центров больших дуг.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З., Рахмонов П. З. К обобщению тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Чебышёвский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 71–96.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 511. 344

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-71-96

On a Generalization of the Ternary Goldbach Problem with Almost Equal Summands

Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov, P. Z. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).

e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmonov@gmail.com

Rakhmonov Firuz Zarulloevich — candidate of physical and mathematical sciences, A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).

e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Rakhmonov Parviz Zarulloevich — candidate of physical and mathematical sciences, Marex Group Plc (United Kingdom, London).

e-mail: parviz.msu@gmail.com

Abstract

An asymptotic formula is obtained for the number of representations of a sufficiently large natural number N in the form

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N$$

under the conditions

$$\left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{5}{8} + \varepsilon}, \quad b_i \leq (\ln N)^{B_i},$$

where b_1, b_2, b_3 and N are pairwise coprime natural numbers, and B_i are arbitrary fixed positive constants.

Previously, a similar asymptotic formula was established under the condition

$$H \geq (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}.$$

Keywords: ternary Goldbach problem, almost equal terms, short exponential sum with primes, small neighborhood of centers of major arcs.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

Rakhmonov, Z. Kh., Rakhmonov, F. Z., Rakhmonov, P. Z. 2026, "On a generalization of the ternary Goldbach problem with almost equal summands", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 71–96.

1. Введение

Тернарная проблема Гольдбаха с почти равными слагаемыми формулируется следующим образом: *любое достаточно большое нечётное число N представимо в виде*

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \quad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad (1)$$

с возможно меньшим значением $H = N^\theta$, $\theta < 1$, где p_1 , p_2 и p_3 — простые числа.

Тернарную проблему Гольдбаха с почти равными слагаемыми впервые решил К. В. Хазелгров [1] при условии

$$\theta \geq \frac{63}{64} + \varepsilon.$$

В 1991 г. Т. Жан [2], доказал асимптотическую формулу для тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми с наилучшим на сегодняшний день показателем:

$$\theta \geq \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщением тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми называется задача о представлении достаточно большого натурального числа N в виде тернарной линейной формы с почти равными слагаемыми:

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \quad \left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad (2)$$

где неизвестные p_1 , p_2 и p_3 являются простыми числами, а коэффициенты — возрастающими функциями параметра N .

Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми впервые исследовали З. Х. Рахмонов, И. Аллаков и Б. Х. Абраев [3, 4]. Они доказали, что если b_1 , b_2 , b_3 , N — попарно взаимно простые натуральные числа, $N > N_0$, B_1 , B_2 , B_3 — произвольные фиксированные положительные числа, $b_i \leq (\ln N)^{B_i}$, то при

$$H \geq (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60} \quad (3)$$

для числа решений диофантова уравнения (2) в простых числах p_1 , p_2 и p_3 справедлива асимптотическая формула.

Основным результатом этой работы является новая теорема об асимптотической формуле в обобщении тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми при условии, что коэффициенты b_1 , b_2 , b_3 не превосходят произвольной фиксированной положительной степени логарифма от числа N , и условие (3) в работах [3, 4] заменяется на $H \geq N^{\frac{5}{8} + \varepsilon}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть b_1 , b_2 , b_3 , N — попарно взаимно простые натуральные числа, $N > N_0$, B_1 , B_2 , B_3 — произвольные фиксированные положительные числа, $b_i \leq (\ln N)^{B_i}$, $I(N, H)$ — число решений диофантова уравнения

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \quad \left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H,$$

в простых числах p_1 , p_2 и p_3 , ε — положительная сколь угодно малая постоянная. Тогда при $H \geq N^{\frac{5}{8} + \varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N, H) = \frac{3\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N)}{b_1 b_2 b_3 (\ln N)^3} \frac{H^2}{(\ln N)^4} + O\left(\frac{H^2 \ln \ln N}{b_1 b_2 b_3 (\ln N)^4}\right),$$

$$\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|b_1 b_2 b_3 N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right),$$

причём особый ряд $\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N)$ абсолютно сходится и $\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N) > 1$.

Теорема 1 доказывается круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова в соединении с методом доказательства работ [5, 6, 7]. Основные утверждения, позволившие получить новую границу параметра

$H \geq N^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$, содержатся в теоремах 2 и 3. В этих теоремах для *специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами*:

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(b\alpha n),$$

где параметр b возрастающая функция относительно x , получены соответственно нетривиальная оценка в малых дугах и асимптотическая формула в больших дугах.

Тригонометрическая сумма $S_1(b\alpha; x, y)$ в малых дугах впервые была изучена в работах [3, 4]. Воспользовавшись элементарным методом оценок тригонометрических сумм И. М. Виноградова, а также методами работы [8, 9] в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathcal{L}_x^{4A+82})$, при $\tau = y^2 x^{-1} \mathcal{L}_x^{-4A-82}$, была доказана нетривиальная оценка вида

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}, \quad y \geq bx^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_x^{\frac{8}{3}A+52}, \quad b \leq \mathcal{L}_x^B, \quad (4)$$

где A и B — абсолютные постоянные.

Для характера Дирихле χ по модулю q , фиксированного натурального числа n и вещественного параметра λ функцию

$$\psi_n(u, \chi, \lambda) = \sum_{m \leq u} \Lambda(m) \chi(m) e(\lambda m^n), \quad (5)$$

которая при $\lambda = 0$ совпадает с обычной функцией Чебышёва, называют функцией Чебышёва с экспоненциальным весом степени n . Воспользовавшись методами исследования средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16], а также по всем примитивным характерам Дирихле, модули которых не превосходят заданной величины [17, 18], для средних значений функций $\psi_n(u, \chi, \lambda)$ в коротких интервалах по всем характерам Дирихле по модулю q :

$$t_n(x; q, y, \lambda) = \sum_{\chi \bmod q} |\psi_n(x, \chi, b\lambda) - \psi_n(x-y, \chi, b\lambda)|, \quad (6)$$

в работах [19, 20] при условиях $y \geq \sqrt{x}(\ln(xq))^2$, $q \leq x^3 y^{-3}$, $|\lambda| \leq (x^{n-2} y^2)^{-1}$ и $n \geq 1$ получена равномерная по параметрам оценка

$$t_n(x; q, y, \lambda) \ll x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\varepsilon} q + x^{\frac{n}{3}+\frac{3}{10}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} q |\lambda|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} (\ln(xq))^{30} + y (\ln(xq))^{30}. \quad (7)$$

Эта оценка в линейной случае $n = 1$ ранее была получена в работах [21, 22, 23].

Из оценки (7) для коротких тригонометрических сумм с простыми числами при $\theta \geq 0,6$, $q \leq x^{3-3\theta}$, $(a, q) = 1$, $|q\alpha - a| \leq x^{-n+2-2\theta} q$ следует оценка (см. [19, 20], теорема 2)

$$\sum_{x-x^\theta < m \leq x} \Lambda(m) e(\alpha m^n) \ll x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\theta+\frac{1}{3}\varepsilon} q^{\frac{1}{2}} + \left(x^{\frac{3}{10}+0,5\theta} + x^\theta q^{-\frac{1}{2}} \right) (\tau(q))^{\frac{\ln n}{\ln 2}} \mathcal{L}_x^{31}, \quad \mathcal{L}_x = \ln x,$$

которая, в частности, является нетривиальной при $\theta > 0,6 + \frac{2}{7}\varepsilon$, если $P \leq q \leq \min(x^{\frac{1}{15}}, x^{3-3\theta})$ и $P \geq \mathcal{L}_x^{\frac{66}{1-\varepsilon}}$. Это усиливает оценки, ранее полученные А. В. Кумчевым [24], Б. Хуаном [25] и З. Х. Рахмоновым и Ф. З. Рахмоновым [26, 27].

Оценка (7) позволяет также получить в малых дугах равномерную по параметрам оценку специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами $S_1(b\alpha; x, y)$, следствием которого является нетривиальную оценку для более коротких сумм по сравнению с оценкой (4).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $y > x^{\frac{3}{5}} \mathcal{L}_x^{62}$, α — вещественное число, а целые числа a и q удовлетворяют условиям

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad q_1 = \frac{q}{(b, q)} \leq \frac{x^3}{y^3}, \quad |b\lambda| \leq \frac{x}{y^2}.$$

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\varepsilon} q_1^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} q_1^{\frac{1}{2}} |b\lambda|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31} + y q_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31},$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от ε .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть b — натуральное число, $h \geq 1$ — вещественное число, $x^{\frac{3}{5}} \mathcal{L}_x^{62} < y \leq x^{\frac{4}{5}} h^{\frac{1}{5}}$, α — вещественное число, а целые числа a и q удовлетворяют условиям

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad bh < q \leq \tau \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \tau = \frac{y^2}{xh}, \quad q_1 = \frac{q}{(b, q)}, \quad b_1 = \frac{b}{(b, q)}.$$

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\varepsilon} q_1^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} q_1^{\frac{1}{6}} \tau^{-\frac{1}{3}} b_1^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31} + y q_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31}.$$

Если $h = x^{0.7\varepsilon}$ и $b \leq \mathcal{L}_x^B$, A и B — положительные фиксированные числа, то при $y \geq x^{0.6+0.55\varepsilon}$ справедлива нетривиальная оценка вида

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A},$$

где постоянные под знаками Виноградова зависят от ε .

В больших дугах сумма $S_1(b\alpha; x, y)$ впервые были изучена также в работах [3, 4]. Была доказана асимптотическая формула в $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_x^{c_1})$ при условии

$$y \geq bx^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}_x^{2.25A+c_1+81}, \quad b \leq \mathcal{L}_x^B, \quad \tau = y^2 x^{-1} \mathcal{L}_x^{-c_2}, \quad (8)$$

где A , B , c_1 и c_2 — абсолютные фиксированные постоянные, $c_2 \leq c_1$. В следующей теореме асимптотическая формула выводится в более «коротких» больших дугах.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x \geq x_0$, A и B — положительные фиксированные постоянные числа, b — натуральное число, $b \leq \mathcal{L}_x^B$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq h, \quad \mathcal{L}_x^{2A+6} \leq h \leq x^{\frac{1}{8}}, \quad \tau = \frac{y^2}{xh}.$$

Тогда при $y \geq x^{\frac{5}{8}} b h \mathcal{L}_x^{1.5A+16.5}$ справедливо равенство

$$S_1(b\alpha; x, y) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b, q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b, q)}\right)} \frac{\sin \pi b \lambda y}{\pi b \lambda} e\left(b \lambda \left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O(y \mathcal{L}_x^{-A}).$$

Теорема 3 доказывается методом работы [28], где, воспользовавшись вторым моментом L -функций Дирихле на критической прямой для суммы

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k)$$

в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_x^b)$, $\tau = y^{2k-1}x^{-k+1}\mathcal{L}_x^{-b_1}$, за исключением малой окрестности их центров получена нетривиальная оценка, а в малой окрестности центров больших дуг доказана асимптотическая формула (см. также [29, 30, 31, 32, 33]).

Обозначения. $N > N_0$ — натуральное число, ε — произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $\mathcal{L}_x = \ln x$,

$$S(a, q) = \sum_{m=1}^q e\left(\frac{am^n}{q}\right), \quad \gamma_n(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2} + yu\right)^n\right) du.$$

2. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1. [34]. Пусть $2 \leq T_0 \leq x$, $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули функции $L(s, \chi)$. Тогда

$$\psi(x, \chi) = E_0 x - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{x^\rho}{\rho} + R(x, T_0), \quad R(x, T_0) \ll \frac{x \mathcal{L}_x^2}{T_0},$$

где $E_0 = 1$, если $\chi = \chi_0$; $E_0 = 0$, если $\chi \neq \chi_0$.

ЛЕММА 2. [35]. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c = c(\varepsilon)$ такое, что если χ_1 — действительный характер по модулю q и β_1 — действительный нуль $L(s, \chi_1)$, то

$$\beta_1 \leq 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^\varepsilon}.$$

ЛЕММА 3. [36]. Пусть действительная функция — $f(u)$, и монотонная функция — $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)| \geq m_1 > 0$, $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка:

$$\int_a^b g(u) e(f(u)) du \ll \frac{M}{m_1}.$$

ЛЕММА 4. [37]. Пусть $q \geq 3$, и пусть $\chi \bmod q$ — характер Дирихле. Функция Дирихле $L(\sigma + it, \chi)$ не обращается в нуль в области

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{10.5 \ln q + 61.5 (\ln |t|)^{\frac{2}{3}} (\ln \ln |t|)^{\frac{1}{3}}}, \quad |t| > 10.$$

ЛЕММА 5. [38, 39]. Пусть ε — сколь угодно малая положительная постоянная, и $T^{\frac{35}{108} + \varepsilon} \leq H \leq T$, тогда справедливы оценки

$$\sum_{\chi \bmod q} (N(u, T+H, \chi) - N(u, T, \chi)) \ll \begin{cases} (qH)^{\frac{4}{3-2u}(1-u)} (\ln qH)^9, & \text{для } \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{3}{4} \\ (qH)^{\frac{2}{u}(1-u) + \varepsilon}, & \text{для } \frac{3}{4} \leq u \leq 1, \end{cases}$$

ЛЕММА 6. ([3], стр. 284) Пусть b — натуральное число, N — достаточно большое натуральное число,

$$\mathcal{S}_1(b\alpha; N, H) = \sum_{|bp - \frac{N}{3}| \leq H} e(b\alpha p), \quad S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(b\alpha n).$$

Тогда при $\sqrt{bN} \left(\ln \frac{N}{3b}\right)^2 \leq H \leq N^{1-\frac{1}{30}}$, имеет место соотношение

$$\mathcal{S}_1(b\alpha; N, H) = \frac{1}{\ln \frac{N}{3b}} S_1\left(b\alpha; \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}, \frac{2H}{b}\right) + O\left(\frac{H^2}{bN \ln \frac{N}{3b}}\right).$$

3. Доказательство теоремы 2

Для удобства с помощью обозначений $q_1 = \frac{q}{(b, q)}$ и $b_1 = \frac{b}{(b, q)}$ представляя числа q и b в виде $b = b_1(b, q)$, $q = q_1(b, q)$, $1 \leq q_1 \leq q$, $(b_1, q_1) = 1$, имеем

$$b\alpha = \frac{b_1 a}{q_1} + b\lambda, \quad (b_1 a, q_1) = 1.$$

Отсюда, воспользовавшись свойством ортогональности характеров, а затем, вспоминая определение суммы Гаусса $\tau(\chi)$, и функции Чебышёва с экспоненциальным весом $\psi_n(u, \chi, \lambda)$, находим

$$\begin{aligned} S_1(b\alpha; x, y) &= \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \sum_{r=1}^{q_1} \bar{\chi}(r) e\left(\frac{ab_1 r}{q_1}\right) \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) e(b\lambda n) + O(\mathcal{L}_x^2) = \\ &= \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \chi(ab_1) \tau(\bar{\chi}) (\psi_1(x, \chi, b\lambda) - \psi_1(x-y, \chi, b\lambda)) + O(\mathcal{L}_x^2). \end{aligned}$$

Переходя к оценкам, пользуясь для суммы Гаусса оценкой $|\tau(\chi)| \leq \sqrt{q_1}$, и неравенством

$$\frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} = \frac{1}{\sqrt{q_1}} \cdot \frac{q_1}{\varphi(q_1)} \ll \frac{1}{\sqrt{q_1}} \cdot \ln \ln q_1, \quad (9)$$

которое в свою очередь следует из известного соотношения $q_1 \ll \varphi(q_1) \ln \ln q_1$, а затем вспоминая из (6) определение суммы $t_n(x; q, y, \lambda)$, получим

$$\begin{aligned} S_1(b\alpha; x, y) &\ll \frac{\ln \ln q_1}{\sqrt{q_1}} \sum_{\chi \bmod q_1} |\psi_1(x, \chi, b\lambda) - \psi_1(x-y, \chi, b\lambda)| + \mathcal{L}_x^2 = \\ &= \frac{\ln \ln q_1}{\sqrt{q_1}} t_1(x; q_1, y, b\lambda) + \mathcal{L}_x^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для $t_1(x; q_1, y, b\lambda)$ все условия оценки (7) при $n = 1$ выполняются, то есть

$$y > x^{\frac{3}{5}} \mathcal{L}_x^{62}, \quad q_1 = \frac{q}{(b, q)} \leq \frac{x^3}{y^3}, \quad |b\lambda| \leq \frac{x}{y^2}.$$

Поэтому согласно оценки (7) при $n = 1$, имеем

$$\begin{aligned} S_1(b\alpha; x, y) &\ll \frac{\ln \ln q_1}{\sqrt{q_1}} \left(x^{\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\varepsilon} q_1 + x^{\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} q_1 |b\lambda|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} q_1^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{30} + y \mathcal{L}_x^{30} \right) + \mathcal{L}_x^2 \\ &\ll x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\varepsilon} q_1^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} q_1^{\frac{1}{2}} |b\lambda|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31} + y q_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

4. Доказательство следствия 1

Воспользовавшись значением параметра τ и условиями $y \leq x^{\frac{4}{5}} h^{\frac{1}{5}}$ и $q_1 > b_1 h$, имеем

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{y^2}{xh} = \frac{x^3}{y^3} \cdot \left(\frac{y}{x^{\frac{4}{5}} h^{\frac{1}{5}}} \right)^5 \leq \frac{x^3}{y^3}, \\ |b\lambda| &\leq \frac{b}{q\tau} = \frac{b_1}{q_1\tau} = \frac{b_1}{q_1} \cdot \frac{xh}{y^2} = \frac{b_1 h}{q_1} \cdot \frac{x}{y^2} < \frac{x}{y^2}, \end{aligned}$$

то есть выполняются условия теоремы 2, поэтому, заменяя в утверждении этой теоремы $|b\lambda|$ на $\frac{b_1}{q_1\tau}$, получим первое утверждение следствия:

$$\begin{aligned} S_1(b\alpha; x, y) &\ll x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon} q_1^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} q_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b_1}{q_1\tau} \right)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31} + y q_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31} \leq \\ &\leq x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon} q_1^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} q_1^{\frac{1}{6}} \tau^{-\frac{1}{3}} b_1^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31} + y q_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31}. \end{aligned}$$

Теперь докажем второе утверждение. Воспользовавшись соотношениями $b_1 h \leq q_1 \leq \tau$, $\tau = \frac{y^2}{xh}$, имеем

$$\begin{aligned} S_1(b\alpha; x, y) &\ll x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon} \tau^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{6}} b_1^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31} + y (b_1 h)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31} = \\ &= x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon} \left(\frac{y^2}{xh} \right)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y^2}{xh} \right)^{-\frac{1}{6}} b_1^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{31} + \frac{y \mathcal{L}_x^{31}}{(b_1 h)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= y \left(\frac{x^{\frac{1}{3}\varepsilon}}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon} h^{\frac{1}{6}} b_1^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}} + \frac{x^{\frac{3}{10}} \mathcal{L}_x^{31}}{y^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mathcal{L}_x^{31}}{(b_1 h)^{\frac{1}{2}}} \right) = \\ &= y \left(\frac{x^{\frac{1}{3}\varepsilon}}{h^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{x^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\varepsilon} h^{\frac{1}{5}} b_1^{\frac{2}{5}}}{y} \right)^{\frac{5}{6}} + \left(\frac{x^{\frac{3}{5}} \mathcal{L}_x^{62}}{y} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\mathcal{L}_x^{31}}{(b_1 h)^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда при $h = x^{0.7\varepsilon} > x^{\frac{2}{3}\varepsilon} \mathcal{L}_x^{2A}$ и $y \geq x^{0.6+0.55\varepsilon}$, получим

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll y \left(\left(\frac{x^{0.6+0.54\varepsilon} \mathcal{L}_x^{\frac{2B}{5}}}{y} \right)^{\frac{5}{6}} + \left(\frac{x^{0.6} \mathcal{L}_x^{62}}{y} \right)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{L}_x^{-A} \right) \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}.$$

5. Доказательство теоремы 3

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$y = x^{\frac{5}{8}} b h \mathcal{L}_x^{1.5A+16,5}. \quad (11)$$

Для удобства с помощью обозначений $q_1 = \frac{q}{(b, q)}$ и $b_1 = \frac{b}{(b, q)}$ чисел q и b представим в виде

$$b = b_1(b, q), \quad q = q_1(b, q), \quad 1 \leq q_1 \leq q, \quad (b_1, q_1) = 1.$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, находим

$$S_1(b\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \chi(ab_1) \tau(\bar{\chi}) \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) e(b\lambda n) + O(\mathcal{L}_x^2) \quad (12)$$

Применяя преобразование Абеля в интегральной форме, имеем:

$$\sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) e(b\lambda n) = - \int_{x-y}^x \psi(u, \chi) de(b\lambda u) + e(b\lambda x) \psi(x, \chi) - e(b\lambda(x-y)) \psi(x-y, \chi).$$

Пользуясь леммой 1 при $T_0 = \frac{\sqrt{q_1}(1+b|\lambda|y)x\mathcal{L}_x^{A+2}}{y}$, найдём

$$\begin{aligned} \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) e(b\lambda n) &= - \int_{x-y}^x \left(E_0 u - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{u^\rho}{\rho} \right) de(b\lambda u) + \\ &+ e(b\lambda x) \left(E_0 x - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{x^\rho}{\rho} \right) - e(b\lambda(x-y)) \left(E_0(x-y) - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{(x-y)^\rho}{\rho} \right) \\ &- \int_{x-y}^x R(u, T_0) 2\pi i b \lambda e(b\lambda u) du + e(b\lambda x) R(x, T_0) - e(b\lambda(x-y)) R(x-y, T_0). \end{aligned}$$

Применяя к первому интегралу формулу интегрирования по частям и, пользуясь оценкой для $R(u, T_0) \ll u \mathcal{L}_x^2 T_0^{-1}$ из леммы 1, и значением параметра T_0 , находим

$$\begin{aligned} \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) e(b\lambda n) &= E_0 \int_{x-y}^x e(b\lambda u) du - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \int_{x-y}^x \frac{u^{\rho-1}}{\rho} e(b\lambda u) du + R_1 \\ &= E_0 \frac{\sin \pi b \lambda y}{\pi b \lambda} e \left(b \lambda \left(x - \frac{y}{2} \right) \right) - \sum_{|\gamma| \leq T_0} I(\rho, b\lambda) + R_1, \\ I(\rho, b\lambda) &= \int_{x-y}^x u^{\beta-1} e \left(b \lambda u + \frac{\gamma}{2\pi} \ln u \right) du, \\ R_1 &\ll \frac{(1+b|\lambda|y)x\mathcal{L}_x^2}{T_0} = \frac{y}{\sqrt{q_1} \mathcal{L}_x^A}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (12) для $S_1(b\alpha; x, y)$, найдём следующее выражение:

$$\begin{aligned} S_1(b\alpha; x, y) &= \frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)} \frac{\sin \pi b \lambda y}{\pi b \lambda} e \left(b \lambda \left(x - \frac{y}{2} \right) \right) - W(b\alpha; x, y) - E_1 W_1(b\alpha; x, y) + R_2, \quad (13) \\ W(b\alpha; x, y) &= \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \chi(ab_1) \tau(\bar{\chi}) \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} I(\rho, b\lambda), \\ W_1(b\alpha; x, y) &= \frac{\chi_1(ab) \tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)} I(\beta_1, b\lambda), \\ R_2 &\ll \sqrt{q_1} |R_1| \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}, \end{aligned}$$

где $E_1 = 1$, если по модулю q_1 существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль β_1 ,

$$\beta_1 \geq 1 - \frac{c}{\ln q},$$

и $E_1 = 0$ в противном случае.

5.1. Оценка $|W_1(b\alpha; x, y)|$

Воспользовавшись оценкой суммы Гаусса $|\tau(\chi)| \leq \sqrt{q_1}$ и тривиальной оценкой интеграла $I(\beta_1, \lambda)$ а затем неравенством (9), найдём

$$W_1(b\alpha; x, y) = \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)} \int_{x-y}^x \frac{u^{\beta_1-1}}{\beta_1} e(b\lambda u) du \ll \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} y x^{\beta_1-1} \ll \frac{\mathcal{L}_x}{\sqrt{q_1}} y x^{\beta_1-1}.$$

Рассмотрим два случая: **а)** $q_1 \leq \mathcal{L}_x^{2A+2}$ и **б)** $\mathcal{L}_x^{2A+2} < q_1 \leq h$.

а) Согласно лемме 2, имея в виду, что $q_1 < q \leq \mathcal{L}_x^{2A+2}$, при $\varepsilon = (2c)^{-1}$, $c = c(\varepsilon)$, имеем

$$x^{\beta_1-1} = \exp((\beta_1 - 1)\mathcal{L}_x) \leq \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathcal{L}_x}{q^\varepsilon}\right) \leq \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathcal{L}_x}{\mathcal{L}_x^{c\varepsilon}}\right) = \exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathcal{L}_x}).$$

Следовательно

$$|W_1(b\alpha; x, y)| \ll \frac{\mathcal{L}_x}{\sqrt{q_1}} y \exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathcal{L}_x}) \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}. \quad (14)$$

б) В этом случае тривиально имеем

$$W_1(b\alpha; x, y) \ll \frac{y \mathcal{L}_x}{\sqrt{q_1}} \leq \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}.$$

5.2. Преобразование $|W(b\alpha; x, y)|$

Переходя к оценкам, имеем

$$|W(b\alpha; x, y)| \leq \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} |\tau(\bar{\chi})| |\mathscr{W}(b\lambda, \chi)|, \quad \mathscr{W}(b\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, b\lambda)|, \quad (15)$$

где β_1 — действительный нуль, если по модулю q_1 существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1 \geq 1 - \frac{c}{\ln q}$. Сумму $|W(\alpha; x, y)|$ оценим в случае $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda \leq 0$, сводится к случаю $\lambda \geq 0$ с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \mathscr{W}(b\lambda, \chi) &= \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} \left| \overline{I(\rho, b\lambda)} \right| = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} \left| \int_{x-y}^x u^{\beta-1} e\left(-b\lambda u - \frac{1}{2\pi} \gamma \ln u\right) du \right| = \\ &= \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\bar{\rho}, -b\lambda)| = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, -b\lambda)| = \mathscr{W}(-b\lambda, \chi), \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 3, при $M = x^{\beta-1}$, $f(u) = b\lambda u + \frac{\gamma}{2\pi} \ln u$ и $m_1 = \min f'(u)$, оценим тригонометрический интеграл $I(\rho, b\lambda)$. Найдём

$$|I(\rho, \lambda)| \leq \frac{x^{\beta-1}}{\min |f'(u)|} = \frac{x^\beta}{\min |xf'(u)|}, \quad f'(u) = b\lambda + \frac{\gamma}{2\pi u} = \frac{\gamma + 2\pi kb\lambda u}{2\pi u}.$$

Отсюда и из тривиальной оценки

$$|I(\rho, b\lambda)| \leq \int_{x-y}^x u^{\beta-1} du \leq yx^{\beta-1},$$

получим

$$|I(\rho, b\lambda)| \leq x^\beta \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min |xf'(u)|}\right).$$

Эту оценку, пользуясь соотношением

$$|xf'(u)| = |\gamma + 2\pi kb\lambda u| \frac{x}{2\pi u} \geq \frac{1}{2\pi} |\gamma + 2\pi kb\lambda u|,$$

представим в виде

$$|I(\rho, b\lambda)| \ll x^\beta \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min |\gamma + 2\pi kb\lambda u|}\right). \quad (16)$$

Подставляя эту оценку, а также оценку $|\tau(\chi)| \leq \sqrt{q_1}$, в (15), а затем пользуясь неравенством (9), получим

$$|W(b\alpha; x, y)| \ll \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \mathscr{W}(b\lambda, \chi) \ll \frac{\ln \mathscr{L}_x}{\sqrt{q_1}} \sum_{\chi \bmod q_1} \mathscr{W}(b\lambda, \chi). \quad (17)$$

Все нетривиальные нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ с условием $|\gamma| \leq T_0$ разобьём на множества

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ \rho : -T_0 \leq \gamma < -2\pi b\lambda x - \frac{x}{y} \right\}, \\ D_2 &= \left\{ \rho : -2\pi b\lambda x - \frac{x}{y} \leq \gamma \leq -2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} \right\}, \\ D_3 &= \left\{ \rho : -2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} < \gamma \leq T_0 \right\}. \end{aligned}$$

Обозначая суммой модулей сумма модулей интеграла $I(\rho, b\lambda)$ по нулям ρ , принадлежащим множеству D_j , через $\mathscr{W}_j(b\lambda, \chi)$, $j = 1, 2, 3$, представим сумму $\mathscr{W}(b\lambda, \chi)$ в (15) в виде:

$$\mathscr{W}(b\lambda, \chi) = \mathscr{W}_1(b\lambda, \chi) + \mathscr{W}_2(b\lambda, \chi) + \mathscr{W}_3(\chi, b\lambda). \quad (18)$$

5.2.1. Преобразование $\mathscr{W}_1(b\lambda, \chi)$

Ко всем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_1 , прибавляя слагаемое $2\pi b\lambda u$, $x - y \leq u \leq x$, получим

$$D_1 = \left\{ \rho : -T_0 + 2\pi b\lambda u \leq \gamma + 2\pi b\lambda u < -2\pi b\lambda x + 2\pi b\lambda u - \frac{x}{y} \right\}.$$

Функция $2\pi b\lambda u$ в интервале $x - y \leq u \leq x$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множества D_1 , имеем

$$-2\pi b\lambda x + 2\pi b\lambda u - \frac{x}{y} \leq -\frac{x}{y}.$$

Следовательно, если $\rho \in D_1$, то выполняется неравенство $\gamma + 2\pi b\lambda u < -\frac{x}{y}$, поэтому в интервале $x - y \leq u \leq x$ для монотонно возрастающей функции $\gamma + 2\pi b\lambda u$ справедливо соотношение

$$\min |\gamma + 2\pi b\lambda u| = -\max(\gamma + 2\pi b\lambda u) = -\gamma - 2\pi b\lambda x \geq \frac{x}{y}, \quad \text{если } \rho \in D_1.$$

Отсюда и из второй оценки (16), найдём

$$\mathscr{W}_1(b\lambda, \chi) \ll \sum_{\rho \in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi b\lambda x}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_1 = \left\{ \rho : -T_0 \leq \gamma < -2\pi b\lambda x - \frac{x}{y} \right\} = \left\{ \rho : \frac{x}{y} \leq -\gamma - 2\pi b\lambda x < T_0 - 2\pi b\lambda x \right\},$$

разобьём на классы $D_{11}, \dots, D_{1r}$, $r \ll T_0 x^{-1}y$, в класс D_{1n} отнесём те нули ρ , для которых выполняется условие:

$$nH < -\gamma - 2\pi b\lambda x \leq (n+1)H, \quad H = \frac{b_1 h x}{q_1 y}, \quad 1 \leq n \leq r.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_1(b\lambda, \chi) &\ll \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi b\lambda x} \leq \frac{1}{H} \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{n} \leq \\ &\leq \frac{\mathscr{L}_x}{H} \max_{1 \leq n \leq r} \sum_{\rho \in D_{1n}} x^\beta \leq \frac{\mathscr{L}_x}{H} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-H < \gamma \leq T} x^\beta. \end{aligned}$$

5.2.2. Преобразование $\mathscr{W}_3(\chi, b\lambda)$

Ко всем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_3 , прибавляя слагаемое $2\pi b\lambda u$, $x - y \leq u \leq x$, получим

$$D_3 = \left\{ \rho : 2\pi b\lambda u - 2\pi b\lambda(x - y) + \frac{x}{y} < \gamma + 2\pi b\lambda u \leq T_0 + 2\pi b\lambda u \right\}.$$

Функция $2\pi b\lambda u$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ монотонно возрастает, поэтому на левой границе множества D_3 , имеет место неравенство

$$2\pi b\lambda u - 2\pi b\lambda(x - y) + \frac{x}{y} \geq \frac{x}{y}.$$

Отсюда следует, что если $\rho \in D_3$, то имеет место неравенство $\gamma + 2\pi b\lambda u > \frac{x}{y}$. Следовательно в отрезке $x - y \leq u \leq x$ для монотонно возрастающей функции $\gamma + 2\pi b\lambda u$ справедливо неравенство

$$\min |\gamma + 2\pi b\lambda u| = \min(\gamma + 2\pi b\lambda u) = \gamma + 2\pi b\lambda(x - y) \geq \frac{x}{y}, \quad \text{при } \rho \in D_3.$$

Отсюда и из второй оценки (16), находим

$$\mathscr{W}_3(\chi, b\lambda) \ll \sum_{\rho \in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi b\lambda(x - y)}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_3 = \left\{ \rho : \frac{x}{y} \leq \gamma + 2\pi b\lambda(x - y) < T_0 + 2\pi b\lambda(x - y) \right\},$$

разобьём на классы $D_{31}, \dots, D_{3r}$, $r \ll T_0 H^{-1}$, в класс D_{3n} отнесём те нули ρ , для которых выполняется условие:

$$nH < \gamma + 2\pi b\lambda(x - y) \leq (n+1)H, \quad H = \frac{b_1 h x}{q_1 y}, \quad 1 \leq n \leq r.$$

Следовательно

$$\mathscr{W}_3(\chi, b\lambda) \ll \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi b\lambda(x - y)} \leq \frac{1}{H} \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{n} \leq \frac{\mathscr{L}_x}{H} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-H < \gamma \leq T} x^\beta.$$

5.2.3. Преобразование $\mathscr{W}_2(b\lambda, \chi)$

Представляя множество D_2 в виде

$$\begin{aligned} D_2 &= \left\{ \rho : -2\pi b\lambda x - \frac{x}{y} \leq \gamma \leq -2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} \right\} = \\ &= \left\{ \rho : T_1 - 2\pi b\lambda y - \frac{2x}{y} \leq -\gamma \leq T_1 \right\}, \quad T_1 = 2\pi b\lambda x + \frac{x}{y} \leq T_0, \end{aligned}$$

и имея в виду, что для длины множества D_2 при $|\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, $\tau = \frac{y^2}{xh}$ и $c_2 \leq c_1$, выполняется неравенство

$$2\pi b\lambda y + \frac{2x}{y} \leq \frac{2\pi by}{q\tau} + \frac{2x}{y} = \frac{2\pi b\lambda x}{qy} + \frac{2x}{y} \ll \frac{b_1 x h}{q_1 y} = H,$$

и пользуясь тривиальной оценкой тригонометрического интеграла $I(\rho, b\lambda)$, то есть первой оценкой (16), получим

$$\mathscr{W}_2(b\lambda, \chi) \leq \sum_{\rho \in D_2} |I(\rho, b\lambda)| \ll \frac{y}{x} \sum_{\rho \in D_2} x^\beta \leq \frac{y}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-H \leq -\gamma \leq T} x^\beta \ll \frac{y}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-H \leq \gamma \leq T} x^\beta.$$

5.3. Сведение оценки $W(b\alpha; x, y)$ к минимизации $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$

Подставляя полученные оценки для $\mathscr{W}_1(b\lambda, \chi)$, $\mathscr{W}_3(\chi, b\lambda)$ и $\mathscr{W}_3(\chi, b\lambda)$ в (18), а потом в (17), а затем, воспользовавшись соотношением

$$\frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \left(\frac{\mathscr{L}_x}{H} + \frac{y}{x} \right) = \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \left(\frac{q_1 \mathscr{L}_x}{b_1 h} + 1 \right) \frac{y}{x} \ll \frac{\sqrt{q_1} y \mathscr{L}_x}{\varphi(q_1) x},$$

находим

$$\begin{aligned} |W(b\alpha; x, y)| &\ll \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \left(\frac{\mathscr{L}_x}{H} + \frac{y}{x} \right) \mathscr{W}(b\lambda, \chi) \ll \frac{\sqrt{q_1} y \mathscr{L}_x}{\varphi(q_1) x} \max_{|T| \leq T_0} \mathscr{V}_{q_1}(T, H), \\ \mathscr{V}_{q_1}(T, H) &= \sum_{\chi \bmod q_1} \sum_{T-H < \gamma \leq T} x^\beta. \end{aligned} \tag{19}$$

Сумму $\mathscr{V}_{q_1} = \mathscr{V}_{q_1}(T, H)$ оценим, воспользовавшись теоремой о плотности нулей L -рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы. Имеем

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_{q_1} &= \sum_{\chi \bmod q_1} \sum_{T-H < \gamma \leq T} \left(\mathscr{L}_x \int_0^\beta x^u du + 1 \right) = \mathscr{L}_x \int_0^1 x^u \sum_{\chi \bmod q_1} \sum_{\substack{T-H < \gamma \leq T \\ \beta \geq u}} du + \sum_{\chi \bmod q_1} \sum_{T-H < \gamma \leq T} 1 \\ &= \mathscr{L}_x \int_0^1 x^u \sum_{\chi \bmod q_1} (N(u, T, \chi) - N(u, T-H, \chi)) du + \sum_{\chi \bmod q_1} (N(T, \chi) - N(T-H, \chi)). \end{aligned}$$

Нетривиальные нули $\rho = \beta + i\gamma$ расположены симметрично относительно критической прямой $\sigma = 0.5$. Воспользовавшись этим свойством нулей, правую часть последнего равенства

представим в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{q_1}(T, H) &\leq \mathcal{L}_x \int_{0,5}^1 x^u \sum_{\chi \bmod q_1} (N(u, T, \chi) - N(u, T - H, \chi)) du + \\
&+ \left(\frac{\sqrt{x} \mathcal{L}_x}{2} + 1 \right) \sum_{\chi \bmod q_1} (N(T, \chi) - N(T - H, \chi)) \leq \\
&\leq \mathcal{L}_x \max_{u \geq 0,5} x^u \sum_{\chi \bmod q_1} (N(u, T, \chi) - N(u, T - H, \chi)) + \\
&+ \sqrt{x} \mathcal{L}_x \sum_{\chi \bmod q_1} (N(T, \chi) - N(T - H, \chi)).
\end{aligned}$$

Согласно лемме 4 функция $L(u + it, \chi)$ не имеет нулей в области

$$u \geq 1 - \delta(q_1, t), \quad \delta(q_1, t) = \frac{c_3}{10.5 \ln q_1 + 61.5 (\ln |t|)^{\frac{2}{3}} (\ln \ln |t|)^{\frac{1}{3}}},$$

для всех характеров $\chi \bmod q_1$, за исключением, быть может простого действительного нуля β_1 у L -функции, определенной исключительным характером χ_1 , кроме того имеет место следующая оценка сверху

$$\sum_{\chi \bmod q} (N(T, \chi) - N(T - H, \chi)) \ll \varphi(q) H \ln T \ll \varphi(q) H \mathcal{L}_x.$$

Поэтому, имея в виду, что $\delta(q_1, T) \geq \delta(q_1, T_0)$, найдём

$$\mathcal{V}_{q_1}(T, H) \ll \mathcal{L}_x \max_{0,5 \leq u \leq 1-\delta} x^u \sum_{\chi \bmod q_1} (N(u, T, \chi) - N(u, T - H, \chi)) + \varphi(q_1) x^{\frac{1}{2}} H \mathcal{L}_x^2.$$

Подставляя правую часть этого неравенства в (19), а затем воспользовавшись неравенством

$$\frac{\sqrt{x} b_1 h}{\sqrt{q_1}} \mathcal{L}_x^3 = \sqrt{x} b_1 h \mathcal{L}_x^3 = \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} \cdot \frac{\sqrt{x} b_1 h \mathcal{L}_x^{A+3}}{y} = \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} \cdot \frac{b_1}{x^{\frac{1}{8}} b \mathcal{L}_x^{0,5A+13,5}} \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A},$$

имеем

$$\begin{aligned}
|W(\alpha; x, y)| &\ll \frac{\sqrt{q_1} y \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1) x} \max_{\substack{|T| \leq T_0 \\ 0,5 \leq u \leq 1-\delta}} x^u \sum_{\chi \bmod q_1} (N(u, T, \chi) - N(u, T - H, \chi)) + \frac{\sqrt{x} b_1 h}{\sqrt{q_1}} \mathcal{L}_x^3 \ll \\
&\ll \frac{\sqrt{q_1} y \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1) x} \max_{\substack{|T| \leq T_0 \\ 0,5 \leq u \leq 1-\delta}} x^u \sum_{\chi \bmod q_1} (N(u, T, \chi) - N(u, T - H, \chi)) + \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}. \quad (20)
\end{aligned}$$

Из определения параметра T_0 , условия $|\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, $\tau = \frac{y^2}{xh}$, $q_1 \leq h$, $1 \leq b \leq \mathcal{L}_x^B$ и (11), находим

$$\begin{aligned}
\frac{T}{H^3} &\leq \frac{T_0(q_1 y)^3}{(b_1 x h)^3} = \frac{(q_1 y)^3}{(b_1 x h)^3} \frac{\sqrt{q_1} (1 + b|\lambda|y) x \mathcal{L}_x^{A+2}}{y} \leq \frac{(q_1 y)^3}{(b_1 x h)^3} \left(\frac{x}{y} + \frac{b h x^2}{q y^2} \right) \sqrt{q_1} \mathcal{L}_x^{A+2} = \\
&= \frac{y}{b_1^2 x} \left(\frac{q_1^3 y}{b_1 h^3 x} + \frac{q_1^2}{h^2} \right) \sqrt{q_1} \mathcal{L}_x^{A+2} \leq \frac{y}{b_1^2 x} \left(\frac{y}{b_1 x} + 1 \right) \sqrt{q_1} \mathcal{L}_x^{A+2} \leq \frac{2 y h^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^{A+2}}{x} = \\
&= \frac{2 b h^{\frac{3}{2}} \mathcal{L}_x^{3,5A+18,5}}{x^{\frac{3}{8}}} \leq \frac{2 \mathcal{L}_x^{3,5A+B+18,5}}{x^{\frac{3}{16}}} \leq 1.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что в сумме по $\pmod{q}$ в (20) выполняется условие $\frac{x}{y} \geq T^{\frac{1}{3}}$, то есть к этой сумме можно применить лемму 5. Разбивая отрезок $0,5 \leq u \leq 1 - \delta$ на отрезки $0,5 \leq u \leq 0,75$ и $0,75 \leq u \leq 1 - \delta$ получим на две суммы, которых соответственно будем обозначать через $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, а затем полагая в лемме 5 $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, $\delta = \delta(q, T_0)$, имеем

$$\begin{aligned}
|W(\alpha; x, y)| &\ll \frac{\sqrt{q_1} y \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1) x} \left(\max_{\substack{|T| \leq T_0 \\ 0,5 \leq u \leq 0,75}} x^u \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)^{\frac{4-4u}{3-2u}} \mathcal{L}_x^9 + \max_{\substack{|T| \leq T_0 \\ 0,75 \leq u \leq 1-\delta}} x^u \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon} \right) + \\
&+ \frac{\sqrt{x} b_1 h}{\sqrt{q_1}} \mathcal{L}_x^3 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}, \\
\mathcal{A}_1 &= \frac{\sqrt{q_1} y \mathcal{L}_x^{11}}{\varphi(q_1) x} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} x^u \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)^{\frac{4-4u}{3-2u}} = \frac{\sqrt{q_1} b_1^2 h^2 x \mathcal{L}_x^{11}}{\varphi(q_1) y} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} f_1(u), \\
\mathcal{A}_2 &= \frac{\sqrt{q_1} y \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1) x} \max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta} x^u \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon} = \frac{\sqrt{q_1} y^{3-\varepsilon} \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1) (b_1 h)^{2-\varepsilon} x^{3-\varepsilon}} \max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta} f_2(u), \\
f_1(u) &= x^u \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)^{\frac{1}{u-1,5}}, \quad f_2(u) = x^u \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)^{\frac{2}{u}}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что значения $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ при $u = 0,75$ по определению совпадают, поэтому для единообразия после применения леммы 5, за оценку сверху $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ при $u = 0,75$ возьмем для удобства оценку для $\mathcal{A}_1$.

5.4. Оценка $\mathcal{A}_1$

Имеем

$$f_1'(u) = f_1(u) \left(\ln x + \frac{\ln \left(\frac{y}{b h x} \right)}{(u-1,5)^2} \right) = \frac{f_1(u)}{(u-1,5)^2} \ln \frac{y}{b h x^{-u^2+3u-1,25}}.$$

Из условия (11) и из соотношения

$$\max_{0,5 \leq u \leq 0,75} (-u^2 + 3u - 1,25) = (-u^2 + 3u - 1,25)|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

следует, что

$$\ln \frac{y}{b h x^{-u^2+3u-1,25}} \geq \ln \frac{y}{b h x^{\frac{7}{16}}} = \ln \left(x^{\frac{3}{16}} \mathcal{L}_x^{1,5A+18} \right) > 0,$$

то есть $f_1'(u) > 0$ и $f_1(u)$ возрастающая функция. Воспользовавшись этим свойством, а затем соотношением (11), имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \frac{\sqrt{q_1} b_1^2 h^2 x \mathcal{L}_x^{11}}{\varphi(q_1) y} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} f_1(0,75) = \frac{\sqrt{q_1} b_1^2 h^2 x \mathcal{L}_x^{11}}{\varphi(q_1) y} x^{\frac{3}{4}} \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)^{-\frac{4}{3}} = \\
&= \frac{\sqrt{q_1} y}{\varphi(q_1)} \cdot \frac{(b_1 h)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{12}} \mathcal{L}_x^{11}}{y^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{q_1} y}{\varphi(q_1) \mathcal{L}_x^A} \left(\frac{b_1 h x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}_x^{1,5A+16,5}}{y} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{q_1} y}{\varphi(q_1) \mathcal{L}_x^A} \leq \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}.
\end{aligned} \tag{22}$$

5.5. Оценка $\mathcal{A}_2$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\sqrt{q_1} y^{3-\varepsilon} \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1) (b_1 h)^{2-\varepsilon} x^{3-\varepsilon}} \max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta} f_2(u), \quad f_2(u) = x^u \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)^{\frac{2}{u}}.$$

Воспользовавшись условием (11), имеем

$$\begin{aligned}
 f'_2(u) &= f_2(u) \left(\ln x + \frac{2 \ln \left(\frac{y}{b_1 h x} \right)}{u^2} \right) = \frac{2f_2(u)}{u^2} \ln \frac{y}{b_1 h x^{1-0,5u^2}}, \\
 f'_2(0,75) &= \frac{32f_2(0,75)}{9} \ln \frac{y}{b_1 h x^{\frac{23}{32}}} = \frac{32f_2(0,75)}{9} \ln \frac{\mathcal{L}_x^{1,5A+16,5}}{x^{\frac{3}{32}}} < 0, \\
 f'_2(1-\delta) &= \frac{2f_2(1-\delta)}{(1-\delta)^2} \ln \frac{y}{b_1 h x^{0,5+\delta-0,5\delta^2}} = \frac{2f_2(1-\delta)}{(1-\delta)^2} \ln \left((b, h) x^{\frac{1}{8}-\delta+0,5\delta^2} \mathcal{L}_x^{1,5A+16,5} \right) > 0, \\
 f''_2(u) &= f_2(u) \left(\ln x - \frac{2 \ln \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)}{u^2} \right)^2 + f_2(u) \frac{4 \ln \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)}{u^3} > 0,
 \end{aligned}$$

Следовательно в интервале $0,75 \leq u \leq 1-\delta$ существует точка u_0 , что $f'_2(u_0) = 0$ и $f''_2(u_0) > 0$, то есть в интервале $0,75 \leq u \leq 1-\delta$ график функции $f_2(u)$ является вогнутым вниз и сумма $\mathcal{A}_2$ оценивается сверху её значением в точках $u = 0,75$ и $u = 1-\delta$. Выше мы условились, что за оценку сверху суммы $\mathcal{A}_2$ при $u = 0,75$ возьмем оценку для $\mathcal{A}_1$ в этой точке, поэтому ввиду (22), имеем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_2 &\ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{\sqrt{q_1} y^{3-\varepsilon} \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1)(b_1 h)^{2-\varepsilon} x^{3-\varepsilon}} f_2(1-\delta) = \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{\sqrt{q_1} y^{3-\varepsilon} \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1)(b_1 h)^{2-\varepsilon} x^{3-\varepsilon}} x^{1-\delta} \left(\frac{b_1 h x}{y} \right)^{\frac{2}{1-\delta}} = \\
 &= \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{\sqrt{q_1} y \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1)} \cdot \frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon} (b_1 h)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}}{y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}} = \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{\sqrt{q_1} y \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1)} \left(\frac{b_1 h x^{\frac{5}{8}}}{y} x^{f(\delta, \varepsilon)} \right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}, \\
 f(\delta, \varepsilon) &= \frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{2\delta + (1-\delta)\varepsilon} - \frac{5}{8}.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из условия (11), получим

$$\mathcal{A}_2 \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{\sqrt{q_1} y \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1)} \cdot x^{f(\delta, \varepsilon) \frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}}.$$

Далее при $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, воспользовавшись соотношением

$$\begin{aligned}
 f(\delta, \varepsilon) \frac{2\delta + (1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} &= \frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} - \frac{5(2\delta + (1-\delta)\varepsilon)}{8(1-\delta)} = \\
 &= -\frac{\delta}{8} + \frac{3}{8} \left(\varepsilon - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta^2}{3(1-\delta)} \right) < -\frac{\delta}{8} + \frac{3}{8} \left(\varepsilon - \frac{\delta}{3} \right) \leq -\frac{\delta}{8},
 \end{aligned}$$

находим

$$\mathcal{A}_2 \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{\sqrt{q_1} y \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1)} x^{-0,125\delta} = \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{\sqrt{q_1} y \mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1)} \cdot \exp(-0,125\delta \mathcal{L}_x). \quad (23)$$

Возможны случаи: а) $\mathcal{L}_x^{2A+6} < q_1 \leq h$, и б) $q \leq \mathcal{L}_x^{2A+6}$.

а) В этом случае из (23) и из известного соотношения $q_1 \ll \varphi(q_1) \ln \ln q_1$, тривиально имеем

$$\mathcal{A}_2 \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{\ln \ln q_1 \cdot y \mathcal{L}_x^2}{\sqrt{q_1}} \cdot \exp(-0,125\delta \mathcal{L}_x) \leq \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{y \mathcal{L}_x^3}{\sqrt{q_1}} \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}.$$

6) Пользуясь условиями $\lambda \leq \frac{1}{q\tau}$, $\tau = \frac{y^2}{xh}$ и условием (11), имеем

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{\sqrt{q_1}(1+b|\lambda|y)x\mathcal{L}_x^{A+2}}{y} = \sqrt{q_1} \left(\frac{x}{y} + \frac{bx}{q\tau} \right) \mathcal{L}_x^{A+2} = \left(\frac{\sqrt{q_1}x}{y} + \frac{b_1hx^2}{\sqrt{q_1}y^2} \right) \mathcal{L}_x^{A+2} \leq \\ &\leq \left(\frac{x\sqrt{h}}{y} + \frac{b_1hx^2}{y^2} \right) \mathcal{L}_x^{A+2} = \frac{b_1hx^2}{y^2} \left(\frac{y}{xb_1\sqrt{h}} + 1 \right) \mathcal{L}_x^{A+2} \leq \frac{2b_1hx^2}{y^2} \mathcal{L}_x^{A+2} = \frac{2b_1x^{\frac{3}{4}}}{b^2h\mathcal{L}_x^{2A+31}} \leq x. \end{aligned}$$

Пользуясь этим неравенством и условием $q \leq \mathcal{L}_x^{2A+6}$, оценим снизу параметр $\delta = \delta(q, T_0)$:

$$\begin{aligned} \delta(q, T_0) &= \frac{c_3}{10.5 \ln q_1 + 61.5(\ln T_0)^{\frac{2}{3}}(\ln \ln T_0)^{\frac{1}{3}}} \geq \\ &\geq \frac{c_3}{10.5(2A+6) \ln \mathcal{L}_x + 61.5\mathcal{L}_x^{\frac{2}{3}}(\ln \mathcal{L}_x)^{\frac{1}{3}}} \geq \frac{c_3}{123\mathcal{L}_x^{\frac{2}{3}}(\ln \mathcal{L}_x)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (23), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &\ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{\sqrt{q_1}y\mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1)} \cdot \exp(-0,125\delta\mathcal{L}_x) \ll \\ &\ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A} + \frac{\sqrt{q_1}y\mathcal{L}_x^2}{\varphi(q_1)} \exp\left(-\frac{c_3}{984} \left(\frac{\mathcal{L}_x}{\ln \mathcal{L}_x}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку, а также оценок (23) и (22) в правую часть (21), получим

$$|W(b\alpha; x, y)| \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}.$$

Из полученной оценки и оценки (14), имея в виду (13), получим утверждение теоремы.

6. Доказательство теоремы 1

Как в работе [3] для удобства вводим следующие обозначения:

$$\mathcal{L} = \ln \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3} \right), \quad \mathcal{L}_i = \ln \frac{N}{3b_i} \quad \mathcal{L} \ll \mathcal{L}_i \ll \mathcal{L}, \quad (24)$$

и не ограничивая общности, будем считать, что выполняются следующие условия

$$H = N^{\frac{5}{8}+\varepsilon}, \quad b_1 < b_2 < b_3, \quad (25)$$

а также пусть $\mathfrak{a} = \tau^{-1}$, где

$$\tau = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3h}, \quad h = \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3} \right)^{0.7\varepsilon}. \quad (26)$$

Имеем

$$\begin{aligned} I(N, H) &= \int_{-\mathfrak{a}}^{1-\mathfrak{a}} \mathbb{F}(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha, \\ \mathbb{F}(\alpha) &= \mathbb{F}(\alpha; N, H) = \prod_{i=1}^3 \mathcal{S}_1(b_i\alpha; N, H), \quad \mathcal{S}_1(b_i\alpha; N, H) = \sum_{|b_ip - \frac{N}{3}| \leq H} e(b_i\alpha p). \end{aligned}$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}. \quad (27)$$

В этом представлении $0 \leq a \leq q - 1$, причём $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α , для которых

$$q \leq \mathcal{L}^c, \quad c = 4 + \frac{\ln b_1 + \ln b_2 + 2 \ln b_3}{2\mathcal{L}}, \quad (28)$$

в представлении (27), через $\mathfrak{m}$ – обозначим оставшиеся α . Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{ \alpha : \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq q^c, \quad |\lambda| \leq \frac{\sqrt{b_1 b_2} \mathcal{L}^3}{H b_3^{-1}} \right\}, \quad (29)$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{ \alpha : \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq q^c, \quad \frac{\sqrt{b_1 b_2} \mathcal{L}^3}{H b_3^{-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau} \right\}. \quad (30)$$

Обозначим через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Будем иметь

$$I(N, H) = I(\mathfrak{M}_1) + I(\mathfrak{M}_2) + I(\mathfrak{m}). \quad (31)$$

В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M}_1)$, доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N, H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

6.1. Вывод асимптотической формулы для интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$

По определению интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}_1) = \int_{\mathfrak{M}_1} \mathbb{F}(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha = \sum_{q \leq \mathcal{L}^c} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} e\left(-\frac{aN}{q}\right) I(a, q), \quad (32)$$

$$I(a, q) = \int_{|\lambda| \leq \frac{\sqrt{b_1 b_2} \mathcal{L}^3}{H b_3^{-1}}} \mathbb{F}\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) e(-\lambda N) d\lambda. \quad (33)$$

Применяя к суммам $\mathcal{S}_1(b_i \alpha; N, H)$, $i = 1, 2, 3$ лемму 6, и пользуясь формулой (24), получим

$$\mathcal{S}_1(b_i \alpha; N, H) = \frac{1}{\mathcal{L}_i} S_1\left(b_i \alpha; \frac{N}{3b_i} + \frac{H}{b_i}, \frac{2H}{b_i}\right) + O\left(\frac{H^2}{b_i N \mathcal{L}}\right). \quad (34)$$

А к суммам $S_1\left(b_i \alpha; \frac{N}{3b_i} + \frac{H}{b_i}, \frac{2H}{b_i}\right)$, $i = 1, 2, 3$ при α из множества $\mathfrak{M}_1$, полагая

$$A = 2c + 4 + \frac{\ln b_1 + \ln b_2 + 2 \ln b_3}{2 \ln \mathcal{L}}, \quad (35)$$

применим теорему 3. Из значений параметров h и H соответственно из (25) и (26), следует, что выполняется условие:

$$\begin{aligned} \frac{H}{b_3} &= \frac{N^{\frac{5}{8} + \varepsilon}}{b_3} = \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}\right)^{\frac{5}{8} + 0.7\varepsilon} b_3 \mathcal{L}^{1.5A + 16.5} \cdot \frac{3^{\frac{5}{8} + 0.7\varepsilon} N^{0.3\varepsilon}}{b_3^{\frac{3}{8} - 0.7\varepsilon} \mathcal{L}^{1.5A + 16.5}} \left(1 + \frac{3H}{N}\right)^{-\frac{5}{8} - 0.7\varepsilon} \geq \\ &\geq \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}\right)^{\frac{5}{8}} b_3 h \mathcal{L}^{1.5A + 16.5}, \end{aligned} \quad (36)$$

(далее для нетривиальной оценки суммы $S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)$ при оценке интегралов $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ мы также применим теорему 3, и будем пользоваться выполнением условия (36)). Согласно этой теореме, и формуле (24), находим

$$S_1\left(b_i\alpha; \frac{N}{3b_i} + \frac{H}{b_i}, \frac{2H}{b_i}\right) = \mathcal{B}_i(q) \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi b_i\lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) + O\left(\frac{H}{b_i\mathcal{L}^A}\right), \quad \mathcal{B}_i(q) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b_i, q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b_i, q)}\right)}.$$

Из этой формулы и (34), имея в виду, что $H \leq N\mathcal{L}^{-A}$, найдём

$$\mathcal{S}_1(b_i\alpha; N, H) = \frac{\mathcal{B}_i(q)}{b_i\mathcal{L}_i} \cdot \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) + \mathbb{R}_{1i}, \quad \mathbb{R}_{1i} \ll \frac{H}{b_i\mathcal{L}^{A+1}}. \quad (37)$$

Воспользовавшись этой формулой, а также соотношением (24), и имея в виду, что

$$\left| \mathcal{B}_i(q) \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi b_i\lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) \right| \leq \frac{H}{b_i}, \quad |\mathcal{S}_1(b_i\alpha; N, H)| \ll \frac{H}{b_i\mathcal{L}}, \quad (38)$$

найдём

$$\mathbb{F}(\alpha) = \frac{\mathcal{B}_1(q)\mathcal{B}_2(q)\mathcal{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3} \cdot \frac{\sin^3 2\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3} e(\lambda N) + \mathbb{R}_2, \quad \mathbb{R}_2 \ll \frac{H^3}{b_1b_2b_3\mathcal{L}^{A+3}}.$$

$$\mathbb{R}_2 \ll$$

Подставляя значение функции $\mathbb{F}(\alpha)$, в (33), находим

$$I(a, q) = \frac{\mathcal{B}_1(q)\mathcal{B}_2(q)\mathcal{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3} \cdot J(H) + \mathbb{R}_3, \\ J(H) = \int_{|\lambda| \leq \frac{\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}^3}{Hb_3^{-1}}} \frac{\sin^3 2\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3} d\lambda, \quad \mathbb{R}_3 \ll \frac{H^2}{\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}^A}.$$

Подставляя полученное значение интеграла $I(a, q)$ в (32), а затем при оценке остаточного члена $\mathbb{R}_4$ пользуясь значением параметра A из формулы (35), получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{J(H)}{b_1b_2b_3\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3} \cdot \sum_{q \leq \mathcal{L}^c} \mathcal{B}_1(q)\mathcal{B}_2(q)\mathcal{B}_3(q)c_q(-N) + \mathbb{R}_4, \quad (39) \\ \mathbb{R}_4 \ll \sum_{q \leq \mathcal{L}^c} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} \mathbb{R}_3 \ll \frac{H^2}{\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}^{A-2c}} = \frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathcal{L}^4},$$

где

$$c_q(-N) = \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} e\left(-\frac{aN}{q}\right) - \text{сумма Рамануджана}.$$

Заменяя сумму по q в (39) близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от h , то есть

$$\sum_{q \leq \mathcal{L}^c} \mathcal{B}_1(q)\mathcal{B}_2(q)\mathcal{B}_3(q)c_q(-N) = \mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N) - R(b_1, b_2, b_3, N), \\ \mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N) = \sum_{q=1}^{\infty} \mathcal{B}_1(q)\mathcal{B}_2(q)\mathcal{B}_3(q)c_q(-N), \quad (40) \\ R(b_1, b_2, b_3, N) = \sum_{q > \mathcal{L}^c} \mathcal{B}_1(q)\mathcal{B}_2(q)\mathcal{B}_3(q)c_q(-N),$$

получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N)J(H)}{b_1 b_2 b_3 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3} - \mathbb{R}_5 + O\left(\frac{H^2}{b_1 b_2 b_3 \mathcal{L}^4}\right), \quad \mathbb{R}_5 = \frac{R(b_1, b_2, b_3, N)J(H)}{b_1 b_2 b_3 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3}. \quad (41)$$

Теперь воспользовавшись следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(N, b_1, b_2, b_3) &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|b_1 b_2 b_3 N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right), \\ J(H) &= 3H^2 + O\left(\frac{H^2}{\mathcal{L}}\right), \quad R(b_1, b_2, b_3, N) \ll \mathcal{L}^{-1}, \end{aligned}$$

доказанные в работе [3], имеем

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{3\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N) H^2}{b_1 b_2 b_3 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3} + O\left(\frac{H^2}{b_1 b_2 b_3 \mathcal{L}^4}\right). \quad (42)$$

6.2. Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$

Поступая, как в работе [3], имеем

$$I(\mathfrak{M}_2) = \int \prod_{i=1}^3 \mathcal{S}_1(b_i \alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha \ll \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} \mathcal{L}} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |\mathcal{S}_1(b_3 \alpha; N, H)|. \quad (43)$$

Воспользовавшись формулой (34), оценку суммы $\mathcal{S}_1(b_i \alpha; N, H)$ сведём к оценке суммы $S_1\left(b_3 \alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)$. Имеем

$$\mathcal{S}_1(b_3 \alpha; N, H) \ll \frac{1}{\mathcal{L}} \left| S_1\left(b_3 \alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right) \right| + \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} b_3 \mathcal{L}^3}. \quad (44)$$

Для получения нетривиальной оценки суммы $S_1\left(b_3 \alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)$ при $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, с учётом выполнения условия (36), применим теорему 3, полагая

$$A = 3 + \frac{\ln b_1 + \ln b_2}{2 \ln \mathcal{L}}.$$

Согласно этой теореме и учитывая, что $|\lambda| > \frac{\sqrt{b_1 b_2} \mathcal{L}^3}{H b_3^{-1}}$, получаем

$$\begin{aligned} S_1\left(b_3 \alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right) &= \frac{\mu\left(\frac{q}{(b_3, q)}\right) \sin\left(\frac{2\pi \lambda H}{b_3}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b_3, q)}\right) \pi \lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3b_3}\right) + O\left(\frac{H}{b_3 \mathcal{L}^A}\right) \ll \\ &\ll \frac{1}{\lambda} + \frac{H}{b_3 \mathcal{L}^A} < \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} b_3 \mathcal{L}^3} + \frac{H}{b_3 \mathcal{L}^A} = \frac{2H}{\sqrt{b_1 b_2} b_3 \mathcal{L}^3}. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в правую часть соотношения (44), а затем в (43), получаем

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} \mathcal{L}} \cdot \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} b_3 \mathcal{L}^3} = \frac{H^2}{b_1 b_2 b_3 \mathcal{L}^4}. \quad (45)$$

6.3. Оценка интеграла $I(\mathfrak{m})$

Поступая аналогично случаю оценки интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$, имеем

$$I(\mathfrak{m}) = \int \prod_{i=1}^3 \mathcal{S}_1(b_i \alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha \ll \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} \mathcal{L}} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |\mathcal{S}_1(b_3 \alpha; N, H)|, \quad (46)$$

$$\mathcal{S}_1(b_3 \alpha; N, H) \ll \frac{1}{\mathcal{L}} \left| S_1 \left(b_3 \alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3} \right) \right| + \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} b_3 \mathcal{L}^3}. \quad (47)$$

Для получения нетривиальной оценки суммы $S_1 \left(b_3 \alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3} \right)$ при $\alpha \in \mathfrak{m}$ рассмотрим два возможных случая: **а)** $\mathcal{L}^c < q \leq b_3 h$ и **б)** $b_3 h < q \leq \tau$.

а) С учётом выполнения условия (36) применим теорему 3, полагая

$$A = 3 + \frac{\ln b_1 + \ln b_2}{2 \ln \mathcal{L}}.$$

Согласно этой теореме в сочетании с известными неравенствами $|\sin u| \leq |u|$ и $q_1 \ll \ll \varphi(q_1) \ln \ln q_1$, а также учитывая условие рассматриваемого случая, получаем

$$\begin{aligned} S_1 \left(b_3 \alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3} \right) &= \frac{\mu \left(\frac{q}{(b_3, q)} \right) \sin \left(\frac{2\pi \lambda H}{b_3} \right)}{\varphi \left(\frac{q}{(b_3, q)} \right) \pi \lambda} e \left(\frac{\lambda N}{3b_3} \right) + O \left(\frac{H}{b_3 \mathcal{L}^A} \right) \ll \\ &\ll \frac{H(b_3, q) \ln \mathcal{L}}{q b_3} + \frac{H}{b_3 \mathcal{L}^A} \ll \frac{H \mathcal{L}}{q} + \frac{H}{b_3 \mathcal{L}^A} \leq \frac{H}{\mathcal{L}^{c-1}} + \frac{H}{b_3 \mathcal{L}^A} = \frac{2H}{b_3 \sqrt{b_1 b_2} \mathcal{L}^3}. \end{aligned}$$

б) Воспользуемся вторым утверждением следствия 1 теоремы 2, полагая

$$A = 3 + \frac{\ln b_1 + \ln b_2}{2 \ln \mathcal{L}}.$$

Проверим выполнение условий следствия 1. Пользуясь значением параметра $H = N^{\frac{5}{8} + \varepsilon}$ и условием $1 \leq b_3 \leq (\ln N)^{B_3}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{H}{b_3} &= \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3} \right)^{0.6+0.55\varepsilon} \cdot \frac{3^{0.6+0.55\varepsilon} N^{\frac{1}{40}+0.45\varepsilon}}{b_3^{0.4-0.55\varepsilon}} \left(1 + \frac{3H}{N} \right)^{-0.6-0.55\varepsilon} \geq \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3} \right)^{0.6+0.55\varepsilon}, \\ \frac{H}{b_3} &= \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3} \right)^{\frac{4}{5}} \cdot \frac{3^{\frac{4}{5}} N^{-\frac{7}{40} + \varepsilon}}{b_3^{\frac{1}{5}}} \left(1 + \frac{H}{N} \right)^{-\frac{4}{5}} \leq \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3} \right)^{\frac{4}{5}}. \end{aligned}$$

Заметим, что если $\alpha \in \mathfrak{m}$ и выполняется условие рассматриваемого случая, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad b_3 h < q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \tau = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3 h}, \quad h = \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3} \right)^{0.7\varepsilon}.$$

Таким образом, все условия следствия 1 выполняются, и, согласно его второму утверждению, получаем

$$S_1 \left(b_3 \alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{H}{b_3} \right) \ll \frac{2H}{b_3} \left(\ln \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3} \right) \right)^{-A} = \frac{2H}{b_3 \mathcal{L}^A} = \frac{2H}{b_3 \sqrt{b_1 b_2} \mathcal{L}^3}.$$

Подставляя полученную оценку в правую часть соотношения (47), а затем в (46), получаем

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} \mathcal{L}} \cdot \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} b_3 \mathcal{L}^3} = \frac{H^2}{b_1 b_2 b_3 \mathcal{L}^4}. \quad (48)$$

6.4. Асимптотическая формула для $I(N, H)$

Подставляя найденные оценки для $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно из формул (42), (45) и (48) в (31), а затем воспользовавшись соотношением

$$\frac{1}{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3} = \left(\frac{1}{\ln N} + O\left(\frac{\ln \ln N}{(\ln N)^2}\right) \right)^3 = \frac{1}{\ln^3 N} + O\left(\frac{\ln \ln N}{(\ln N)^4}\right).$$

являющиеся следствием условий $b_i \leq (\ln N)^{B_i}$, B_i — абсолютная постоянная, получим

$$I(N, H) = \frac{3\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N) H^2}{b_1 b_2 b_3 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3} + O\left(\frac{H^2}{b_1 b_2 b_3 \mathcal{L}^4}\right) = \frac{3\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N) H^2}{b_1 b_2 b_3 (\ln N)^3} + O\left(\frac{H^2 \ln \ln N}{b_1 b_2 b_3 (\ln N)^4}\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Haselgrove C. B. Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math. Soc. 1951. V. 26. P. 273 – 277.
2. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. 1991. V. 7, No 3. P. 135 – 170.
3. Рахмонов З. Х., Аллаков И., Абраев Б. Т. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. № 4. С. 264–298.
4. Рахмонов З. Х., Аллаков И., Абраев Б. Т. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Доклады НАН Таджикистана. 2023. Т. 66, № 5-6. С. 257–262.
5. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 2 (93). С. 139 – 168.
6. Рахмонов П. З. Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа // Математические заметки. 2014. Т. 95. Вып. :5. С. 763 – 774.
7. Рахмонов П. З. Обобщенная тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2016. Т. 100. Вып. :3. С. 410 – 420.
8. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 11. С. 853 – 860.
9. Rakhmonov Z. K., Rakhmonov F. Z. Sum of short exponential sums over prime numbers // Doklady Mathematics. 2014. Т. 90. № 3. С. 699 – 700.
10. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x, \chi)$ и ее приложения // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57. Выпуск 4. С. 55–71.
11. Рахмонов З. Х. Средние значения функции Чебышева // Доклады Российской Академии наук. 1993. Т. 331. № 3 С. 281–282/
12. Рахмонов З. Х., Нозиров О. О. О средних значениях функций Чебышёва и их приложениях // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 5(81). С. 198–222.
13. Rakhmonov Z, Nozirov O. On the mean values of the Chebyshev functions and their applications // <https://arxiv.org/abs/2503.07620v1>, 25 Feb 2025, doi:10.48550/arXiv.2503.07620

14. Рахмонов З. Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами // Доклады АН Тадж. ССР. 1986. Т. 29. № 1. С. 16 – 20.
15. Рахмонов З. Х. Распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР, сер. матем., 1989. Т. 53. № 1. С. 211 – 224.
16. Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.
17. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении функций Чебышева // Известия Российской Академии наук. Серия математическая 1994. Т. 58. Выпуск 3. С. 127-139.
18. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении в теории простых чисел // Доклады Российской Академии наук. 1996. Т. 349. № 5. С. 606-607.
19. Рахмонов З. Х. Средние значения функций Чебышёва с экспоненциальным весом в коротких интервалах // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 2026. Т. 90. Выпуск ..., С. ... (принята в печать).
20. Рахмонов З. Х. Средние значения функций Чебышёва с экспоненциальным весом в коротких интервалах // Доклады НАН Таджикистана. 2025. Т. 68, № 5. С. 415-420.
21. Рахмонов З. Х. Простые числа и средние значения функций Чебышева // Автореферат дисс. ... докт. физ.-матем. наук. 1996. Изд-во Моск. ун-та. Москва.
22. Рахмонов З. Х. Средние значения функций Чебышёва в коротких интервалах // Мат. межд. конф., посв. 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева, Москва, 14-19 мая 1996 г. МГУ. Москва. 1996. Т. 1. С. 48-53.
23. Рахмонов З. Х. Средние значения функции Чебышева в коротких интервалах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 1999. Т. 42. № 4. С. 14-18.
24. Kumchev A. V. On Weyl sums over primes in short intervals // “Arithmetic in Shangrila”—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. Singapore: World Scientific. 2012. V. 9. P. 116–131.
25. Huang B. Exponential sums over primes in short intervals and an application to the Waring–Goldbach problem // Mathematika. 2016. V. 62. P. 508–523.
26. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук. 2016. Т. 296. С. 220 – 242.
27. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 4. С. 281 – 305.
28. Рахмонов З. Х. Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4(81). С. 199 – 223.
29. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74, вып. 4. С. 564 – 572.
30. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95, вып. 3. С. 445 – 456.

31. Рахмонов Ф. З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3. С. 56 – 60.
32. Рахмонов Ф. З. Оценка тригонометрических сумм с простыми числами // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. № 1 (37). С. 158 – 171.
33. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.
34. Дэвенпорт Х. Мультипликативная теория чисел — М.: Наука. 1971 г.
35. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983.
36. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — М.: Наука. 1987 г. 368 с.
37. Tanmay Khale. An Explicit Vinogradov–Korobov Zero-Free Region for Dirichlet L -Functions // Quarterly Journal of Mathematics. 2024. V. 75(1). P. 299–332, <https://arxiv.org/abs/2210.06457v1> [math.NT], 12 Oct 2022.
38. Zhan T. On the Mean Square of Dirichlet L -Functions // Acta Mathematica Sinica. New Series. 1992. Vol. 8, No 2. pp. 204-224.
39. Rakhmonov Z. K. Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function // Russian Mathematical Surveys. 1994. Т. 49. № 2. С. 168 – 169.

REFERENCES

1. Haselgrove C. B., 1951, “Some theorems in the analitic theory of number”, *J. London Math. Soc.*, vol. 26, pp. 273 – 277.
2. Zhan, T., 1991, “On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes”, *Acta Math Sinica. New ser.*, vol. 7, Is. 3, pp. 135 – 170.
3. Rakhmonov Z. Kh., Allakov I., Abrayev B. Kh., 2023, “Generalization of Goldbach’s ternary problem with almost equal terms”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 24, Is. 4, pp. 264 – 298.
4. Rakhmonov Z. Kh., Allakov I., Abrayev B. Kh., 2023, “Asymptotic formula in the generalization of Goldbach’s ternary problem with almost equal terms”, *Doklady Natsional’noi akademii nauk Tadzhikistana*, vol. 66, no 5-6, pp. 257-262, (in Russian).
5. Rakhmonov Z. K., Rakhmonov F. Z. 2024, “Asymptotic formula in the Waring’s problem with almost proportional summands”, *Chebyshevskii Sb.*, vol.25, Is. 2(93), pp. 139 – 168.
6. Rakhmonov, P. Z., 2014, “Short Sums with a Noninteger Power of a Natural Number”, *Mathematical Notes*, vol. 95, Is. 5, pp. 697-707.
7. Rakhmonov, P. Z., 2016, “The Generalized Estermann Ternary Problem for Noninteger Powers with Almost Equal Summands”, *Mathematical Notes*, vol. 100, Is. 3, pp. 438-4447.
8. Rakhmonov Z. K., Rakhmonov F. Z., 2013, “Sum of short double exponential sums”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no 11, pp. 853-860, (in Russian).
9. Rakhmonov Z. K., Rakhmonov F. Z., 2014, “Sum of short exponential sums over prime numbers”, *Doklady Mathematics*, vol. 90, № 3. pp. 699 – 700.

10. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Theorem on the mean value of $\psi(x, \chi)$ and its applications”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49–64.
11. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Mean values of the Chebyshev function”, *Russ. Acad. Sci., Dokl., Math.*, vol. 48, Is. 1, pp. 85–87.
12. Rakhmonov, Z. Kh., & Nozirov O. O., 2021, “On the mean values of the Chebyshev function and their applications”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no 5(81), pp. 198–222.
13. Rakhmonov Z., Nozirov O., 2025, “On the mean values of the Chebyshev functions and their applications”, <https://arxiv.org/abs/2503.07620v1>, 25 Feb 2025, doi:10.48550/arXiv.2503.07620.
14. Rakhmonov, Z. Kh., 1986, “Estimation of the sum of characters with primes”, *Dokl. Akad. Nauk Tadzhik. SSR*, vol. 29, Is. 1, pp. 16–20, (in Russian).
15. Rakhmonov, Z. Kh., 1990, “The distribution of Hardy–Littlewood numbers in arithmetic progressions”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 34, Is. 1, pp. 213–228.
16. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, “On the distribution of the values of Dirichlet characters and their applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 263–272.
17. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, “A mean-value theorem for Chebyshev functions”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 44, Is. 3, pp. 555–569.
18. Rakhmonov, Z. Kh., 1996, “The mean-value theorem in prime number theory”, *Doklady Mathematics*, vol. 54, Is. 1, pp. 597–598.
19. Rakhmonov, Z. Kh., 2026, “Mean values of Chebyshev functions with exponential weight in short intervals”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 90, Is. ..., pp. ... (accepted for publication).
20. Rakhmonov Z. Kh., 2025, “Mean values of Chebyshev functions with exponential weight in short intervals”, *Doklady Natsional’noi akademii nauk Tadzhikistana*, vol. 68, no 5, pp. 415–420, (in Russian).
21. Rakhmonov, Z. Kh., 1996, “Prime numbers and mean values of Chebyshev functions”, *Abstract of dissertation ... dost. phys.-mathematical sciences*, Publishing House of Moscow University, Moscow.
22. Rakhmonov, Z. Kh., 1996, “Mean values of Chebyshev functions in in short intervals”, *Proc. Int. Conf. dedicated to the 175th anniversary of P. L. Chebyshev’s birth*, Moscow, May 14–19, 1996, vol. 1, pp. 48–53.
23. Rakhmonov, Z. Kh., 1999, “Mean values of Chebyshev functions in in short intervals”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 42, no 4, pp. 14–18.
24. Kumchev A. V., 2012, “On Weyl sums over primes in short intervals”, *Arithmetic in Shangrila—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications*. Singapore: World Scientific, vol. 9, pp. 116–131.
25. Huang B., 2016, “Exponential sums over primes in short intervals and an application to the Waring–Goldbach problem”, *Mathematika*, vol. 62, pp. 508–523.
26. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2017, “Short Cubic Exponential Sums over Primes”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211–233.

27. Rakhmonov Z. Kh., Rahmonov F. Z., 2019, “Short cubic exponential sums with Möbius function”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 20. № 4(72). pp. 281-305, (in Russian).
28. Rakhmonov, Z. Kh., 2021, “Estimates of short exponential sums with primes in major arcs”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, Is. 4(81), pp. 199 – 223, (in Russian).
29. Rakhmonov, Z. Kh., 2003, “Estermann’s ternary problem with almost equal summands”, *Mathematical Notes*, vol. 74, Is. 4, pp. 534-542.
30. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, “The Estermann cubic problem with almost equal summands”, *Mathematical Notes*, vol. 95, Is. 3-4, pp. 407–417.
31. Rahmonov, F. Z., 2011, “Estimate of quadratic trigonometric sums with prime numbers”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 3, pp. 56 – 60.
32. Rahmonov F. Z., 2011, “Estimation of trigonometric sums with prime numbers”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, № 1(37). pp. 158-171, (in Russian).
33. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2014, “Sum of short exponential sums over prime numbers”, *Doklady Mathematics*, vol. 90, No 3, pp. 699–700.
34. Davenport H., 1967, *Multiplicative Number Theory*, Markham Publishing Company, Chigago.
35. Karatsuba A. A., 1993, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, xiv+222 pp.
36. Arkhipov G. I. & Chubarikov V. N. & Karatsuba A. A. 2004. *Trigonometric sums in number theory and analysis*, Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 554 p.
37. Tanmay Khale, 2024, “An Explicit Vinogradov-Korobov Zero-Free Region for Dirichlet L -Functions”, *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 75(1), pp. 299–332, <https://arxiv.org/abs/2210.06457v1> [math.NT], 12 Oct 2022.
38. Zhan T., 1992, “On the Mean Square of Dirichlet L -Functions”, *Acta Mathematica Sinica. New Series*, vol. 8, no 2. pp. 204-224.
39. Rakhmonov Z. Kh., 1994, “Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function”, *Russian Math. Surveys*, vol. 49, is. 2, pp. 168–169.

Получено: 17.01.2026

Принято в печать: 19.05.2026