

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 517.955.8

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-48-59

**Регуляризованная асимптотика решения сингулярно
возмущенной задачи Коши для однородного уравнения
Шредингера с потенциалом $Q = X^2$, содержащей фокальные
точки и сингулярные начальные условия¹**

А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова

Елисеев Александр Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: yeliseevag@mpei.ru

Ратникова Татьяна Анатольевна — кандидат физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: ratnikovata@mpei.ru

Шапошникова Дарья Алексеевна — кандидат физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: shaposhnikovda@mpei.ru

Аннотация

В работе строится регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения Шредингера на промежутках времени, содержащих фокальные точки. Опираясь на идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром указано, каким образом следует вводить регуляризирующие функции, подробно описан формализм метода регуляризации для указанного вида особенности, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотическое решение, метод регуляризации, фокальные точки.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

Елисеев А. Г., Ратникова Т. А., Шапошникова Д. А. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения Шредингера с потенциалом $Q(x) = x^2$ // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 48–59.

¹Результаты А. Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2026-0010)

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 517.955.8

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-48-59

Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem for the homogeneous Schrödinger equation with potential $Q = X^2$, containing focal points and singular initial conditions

A. G. Eliseev, T. A. Ratnikova, D. A. Shaposhnikova

Eliseev Alexander Georgievich — doctor of physical and mathematical science, professor, National Research University “MPEI” (Moscow).

e-mail: yeliseevag@mpei.ru

Ratnikova Tatyana Anatolyevna — candidate of physical and mathematical sciences, National Research University “MPEI” (Moscow).

e-mail: ratnikovata@mpei.ru

Shaposhnikova Daria Alekseevna — candidate of physical and mathematical sciences, National Research University “MPEI” (Moscow).

e-mail: shaposhnikovda@mpei.ru

Abstract

The article is devoted to the development of S. A. Lomov’s regularization method for singularly perturbed problems in the presence of spectral singularities in the limit operator. In particular, a regularized asymptotic solution to the singularly perturbed Cauchy problem for the Schrödinger equation is constructed on time intervals containing focal points. Based on the ideas of asymptotic integration of problems with an unstable spectrum, it is indicated how regularizing functions should be introduced, the formalism of the regularization method for the specified type of singularity is described in detail, the justification of this algorithm is carried out and an asymptotic solution of any order with respect to a small parameter is constructed.

Keywords: singularly perturbed problem, asymptotic solution, regularization method, focal points.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

Eliseev, A. G., Ratnikova, T. A., Shaposhnikova, D. A. 2026, “Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem for an equation of Schrödinger with potential $Q(x) = x^2$ ”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 48–59.

1. Введение

В настоящее время различным методам асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач посвящено огромное количество работ, их столь много, что полного обзора в статье ограниченного объема привести не представляется возможным. Отсылаем читателя к монографиям [1, 2], где приведены подробные библиографии по существующим подходам в теории сингулярных возмущений и сделан обзор о современном состоянии метода регуляризации С.А. Ломова, основные принципы которого, по признанию самого автора в монографии [1], были заложены в конце пятидесятих, начале шестидесятих годов. Основная проблема, с

которой сталкивается исследователь при применении метода регуляризации, связана с поиском и описанием регуляризирующих функций, которые содержат в себе неравномерную сингулярную зависимость решения искомой задачи, выделяя которые, можно оставшуюся часть решения искать в виде степенных рядов по малому параметру. Примеры регуляризирующих функций в случае точечных особенностей спектра предельного оператора приведены в работах [3, 4, 5, 6, 7, 8].

Среди сингулярно возмущенных задач следует выделить задачу Коши для уравнения Шредингера с сингулярно возмущенным начальным условием. Этой задаче посвящено большое количество работ. Здесь следует отметить работы Маслова В.П.[9], С.Ю. Доброхотова [10] и других. Если постоянную Планка $\hbar$ в уравнении Шредингера считать малой величиной², то формальный предельный переход $\hbar \rightarrow 0$ в соотношениях квантовой теории осуществляет переход от квантовой к классической механике (см., например, [11], §6), поэтому в тех случаях, когда целесообразно искать приближенные (по малому $\hbar$) решения уравнения Шредингера, говорят о квазиклассическом приближении (см. [11], Гл. 7). Описанный квазиклассический переход в нестационарном уравнении Шредингера в координатном представлении с гамильтонианом $\hat{H}(p, x) = \hat{p}^2 + \hat{x}^2$ порождает сингулярно возмущенную задачу, асимптотическому интегрированию которой методом регуляризации посвящена настоящая работа. Сингулярно возмущенное однородное уравнение Шредингера с потенциалом X^2 интересно тем, что оно содержит особенности по t , которые называются фокальными точками. Данная работа посвящена построению регуляризованной асимптотики решения на промежутках времени, при которых возникают фокальные точки.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u, \\ u(x, 0) = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x), \quad t \in [0, T], \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (1)$$

с условиями:

- 1) $T > \frac{\pi}{8}$ - (условие существования фокальных точек);
- 2) $f(x) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$;
- 3) $f(x) \in S$ - пространству Шварца $S(R)$;

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество гладких функций, вообще говоря комплекснозначных на R , принадлежит пространству Шварца, если любая ее производная убывает на бесконечности быстрее любой степени модуля аргумента x . Другими словами верны оценки для всяких целых положительных чисел m, n и $x \in R$

$$\sup_{0 \leq p \leq m} (1 + |x|^n) |f^{(p)}(x)| = C_{nm} < \infty$$

Классическим решением задачи (1) называется функция $u(x, t, \varepsilon)$, непрерывная в $\bar{Q}_T = (-\infty, +\infty) \times [0, T]$, имеющая непрерывные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в Q_T , удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению (1) и непрерывно примыкающая к начальным условиям $f(x)$. Справедлива следующая теорема

²Строго говоря, постоянная Планка $\hbar$ является размерной величиной и имеет вполне конкретное значение, и утверждение о малости $\hbar$ следует понимать в том смысле, что всегда можно выделить безразмерную комбинацию параметров, содержащую $\hbar$ в какой-то степени, малую по сравнению с другими безразмерными параметрами, не содержащими $\hbar$.

ТЕОРЕМА 1. *Классическое решение задачи (1) при выполненных условиях 1)– 3) существует и единственно.*

Особенность и сложность этой сингулярно возмущенной задачи Коши состоит в том, что сингулярность решения зависит как от сингулярности оператора Шредингера, так и сингулярности начального условия. Взаимодействия их приводит к существенному усложнению построения асимптотики решения. Прежде чем излагать построение регуляризованной асимптотики решения задачи Коши (1), рассмотрим вкратце существующие подходы. Решение на промежутке $t \in [0, \frac{\pi}{8}]$ задачи (1) ищут в виде $u(x, t, \varepsilon) = e^{-\frac{i}{\varepsilon}\varphi(x, t)}v(x, t, \varepsilon)$. Подставив в однородное уравнение задачи (1), получим

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - x^2\right)v(x, t, \varepsilon) + i\varepsilon\left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}v(x, t, \varepsilon) - 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial v(x, t, \varepsilon)}{\partial x}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 v(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} = 0$$

Выберем функцию $\varphi(x, t)$ как решение задачи Коши для нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - x^2 = 0, \\ \varphi(x, 0) = \frac{x^2}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Введем обозначения $p = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $q = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Тогда уравнение (2) примет вид $p - q^2 = x^2$. Уравнение характеристик для задачи (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{2x} = \frac{d\varphi}{x^2 - q^2} = d\tau, \\ \text{Н.У. : } t = 0, x = s, \varphi = \frac{s^2}{2}, q = s, p = 2s^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя систему (3), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} t = \tau, x = s(\cos(2\tau) - \sin(2\tau)), q = s(\sin(2\tau) + \cos(2\tau)), \\ \varphi = \frac{s^2 \cos(4\tau)}{2} \end{aligned}$$

В результате получим $\varphi = \frac{x^2 \cos(4t)}{2(\cos(2t) - \sin(2t))^2} = \frac{x^2(\sin(2t) + \cos(2t))}{2(\cos(2t) - \sin(2t))}$. Якобиан $\frac{D(t, x)}{D(\tau, s)} = \cos(2\tau) - \sin(2\tau)$ обращается в нуль в точках $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, которые носят названия фокальных. Интересно вычислить значение точного решения в фокальных точках. Запишем решение задачи (1) через фундаментальное решение Меллера.

$$u(x, t, \varepsilon) = \frac{\exp(-\frac{i\pi}{4} \text{sign}(\sin(2t)))}{\sqrt{2\pi\varepsilon} |\sin(2t)|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\xi^2}{2\varepsilon}} f(\xi) \exp \left[i \left(\text{ctg}(2t) \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon \sin(2t)} \right) \right] d\xi$$

При $t = \frac{\pi}{8}$ имеем

$$u(x, \frac{\pi}{8}, \varepsilon) = \frac{\exp(-\frac{i\pi}{4})}{\sqrt{\sqrt{2\pi\varepsilon}}} e^{\frac{ix^2}{2\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{i\sqrt{2}x\xi}{\varepsilon}} d\xi = \sqrt[4]{2} \exp(-\frac{i\pi}{4}) e^{\frac{ix^2}{2\varepsilon}} \widehat{f}_{\varepsilon}(\sqrt{2}x)$$

$-f_{\varepsilon}$ -есть ε -преобразование Фурье начального условия.

Задача Коши для определения функции $v(x, t, \varepsilon)$ после определения функции $\varphi(x, t)$ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, t, \varepsilon)}{\partial t} - 2x \frac{(\sin(2t) + \cos(2t))}{(\cos(2t) - \sin(2t))} \frac{\partial v(x, t, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{(\sin(2t) + \cos(2t))}{(\cos(2t) - \sin(2t))} v(x, t, \varepsilon) = i\varepsilon \frac{\partial^2 v(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} \\ v(x, 0, \varepsilon) = f(x) \end{cases}$$

Главный член асимптотики данной задачи Коши на промежутке $t \in [0, \frac{\pi}{8})$ имеет вид

$$u_0(x, t, \varepsilon) = \frac{e^{-i \frac{x^2 (\sin(2t) + \cos(2t))}{2\varepsilon (\cos(2t) - \sin(2t))}}}{\sqrt{\cos(2t) - \sin(2t)}} f\left(\frac{x}{\cos(2t) - \sin(2t)}\right)$$

Из структуры решения видно влияние фокальной точки. Решение в этом виде не может быть продолжено за фокальную точку. Как продолжается решение за фокальную точку описано в работах [9, 10]. Метод регуляризации позволяет написать равномерную асимптотику решения на любом отрезке времени $[0, T]$, содержащем фокальные точки.

3. Пример точного решения задачи Коши.

Рассмотрим задачу (1) с возмущенным начальным условием

$$f(x) = \exp\left(-\frac{ix^2\mu(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)$$

где $\mu(\varepsilon) = 1 - i\varepsilon^\alpha$, $\alpha \geq 2$ и натуральное. Непрерывное решение уравнения Шредингера на промежутке $[0, t]$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} w(x, t, \varepsilon) &= \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{2t}{\pi}\right] + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2\pi\varepsilon|\sin(2t)|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\xi^2\mu(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right) \exp\left[i\left(\operatorname{ctg}(2t)\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon\sin(2t)}\right)\right] d\xi = \\ &= \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{2t}{\pi}\right] + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2\pi\varepsilon|\sin(2t)|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{2\varepsilon\sin(2t)} (\cos(2t)x^2 + \xi^2(\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)) - 2x\xi)\right) d\xi = \\ &= \exp\left(-\frac{ix^2}{2\varepsilon} \frac{\sin(2t) + \mu\cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)}\right) \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{2t}{\pi}\right] + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2\pi\varepsilon|\sin(2t)|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i(\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t))}{2\varepsilon\sin(2t)} \xi^2\right) d\xi = \\ &= \exp\left(-\frac{ix^2}{2\varepsilon} \frac{\sin(2t) + \mu\cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)}\right) \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right] + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon^\alpha \sin(2t)}{\cos(2t) - \sin(2t)}\right)\right)\right)}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)|}} \end{aligned}$$

Таким образом точное решение задачи Коши имеет вид

$$\begin{aligned} w(x, t, \varepsilon) &= \\ &= \exp\left(-\frac{ix^2}{2\varepsilon} \frac{\sin(2t) + \mu\cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)}\right) \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right] + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon^\alpha \sin(2t)}{\cos(2t) - \sin(2t)}\right)\right)\right)}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)|}} \end{aligned}$$

Экспонента $\exp\left(-\frac{ix^2}{2\varepsilon} \frac{\sin(2t) + \mu\cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)}\right)$ -регуляризирующая функция.

4. Регуляризирующая функция.

Для построения регуляризованной асимптотики решения рассмотрим задачу с возмущенным начальным условием

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^2 w, \\ w(x, 0, \varepsilon) = e^{-i \frac{x^2 \mu(\varepsilon)}{2\varepsilon}} f(x), \quad t \in [0, T], \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (4)$$

где $\mu(\varepsilon) = 1 - i\varepsilon^\alpha$, $\alpha \geq 2$. Запишем задачу Коши для нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - x^2 = 0, \\ \varphi(x, 0, \varepsilon) = \frac{x^2 \mu(\varepsilon)}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнение характеристик для задачи (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} &= \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{2x} = \frac{d\varphi}{x^2 - q^2} = d\tau, \\ \text{Н.У. : } t &= 0, x = s, \varphi = \frac{s^2 \mu(\varepsilon)}{2}, q = s\mu(\varepsilon). \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя систему (6), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} t &= \tau, x = s(\cos(2\tau) - \mu(\varepsilon) \sin(2\tau)), q = s(\sin(2\tau) + \mu(\varepsilon) \cos(2\tau)), \\ \varphi &= \frac{s^2}{4}((1 - \mu^2(\varepsilon)) \sin(4\tau) + 2\mu(\varepsilon) \cos(4\tau)) \end{aligned}$$

В результате получим $\varphi = \frac{x^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}$. Якобиан $\frac{D(t, x)}{D(\tau, s)} = \cos(2\tau) - \mu(\varepsilon) \sin(2\tau) \neq 0$ не обращается в нуль в точках $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$. Исходя из вышеизложенного, введем регуляризирующую функцию задачи (4) в виде экспоненты

$$\begin{aligned} \sigma &= \\ &= \exp\left(-i\left(\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\varepsilon^\alpha \sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right)\right)\right) \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) = \\ &= \exp(-i\psi(t, \varepsilon)) \exp\left(-i\frac{\varphi(x, t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Первая экспонента вспомогательная. Она обеспечивает непрерывность регуляризованного решения при переходе через фокальные точки по времени. Вторая экспонента содержит неравномерную зависимость от параметра ε и является непосредственно регуляризирующей функцией. В первой экспоненте выражение $\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\varepsilon^\alpha \sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right) = \underline{O}(\varepsilon^\alpha)$. Несложно установить, что при $\alpha = 2$ $\psi(t, \varepsilon) = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\varepsilon^2 \sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right) = \frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right) + \underline{O}(\varepsilon^2)$. Исходя из выше изложенного при $\varepsilon \leq 0.01$ слагаемое $\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\varepsilon^2 \sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right)$ можно опустить и регуляризирующая функция запишется в виде

$$\begin{aligned} \sigma &= \exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right)\right)\right) \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) = \\ &= \exp(-i\psi(t)) \exp\left(-i\frac{\varphi(x, t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

5. Построение регуляризованного асимптотического ряда.

Согласно построенной в предыдущем разделе регуляризирующей функции

$\sigma = \exp(-i\psi(t)) \exp\left(-i\frac{\varphi(x, t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right)$ решение ищем в виде $w(x, t, \varepsilon) = \sigma y(x, t, \varepsilon)$. Для упрощения построения итерационных задач введем в регуляризирующую функцию множитель $\frac{1}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}}$. Тогда регуляризирующая функция примет вид

$$\sigma = \exp(-i\psi(t)) \exp\left(-i\frac{\varphi(x, t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}}$$

Используя формулу сложного дифференцирования, получим задачу Коши относительно функции $y(x, t, \varepsilon)$ предварительно вычислив производные

$$\begin{aligned} i\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} &= (i\varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} y + i\varepsilon \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} y) \sigma \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - x^2 w &= (\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - i\varepsilon 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} - (\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 y - x^2 y) \sigma \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая (7), получим задачу Коши для функции $y(x, t, \varepsilon)$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - 2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} \frac{\partial y}{\partial x} = i\varepsilon \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ y(x, 0, \varepsilon) = f(x) \end{cases} \quad (8)$$

Решение (8) ищем в виде $y(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x, t)$, где функции $y_k(x, t) \in C^\infty((-\infty, \infty) \times [0, T])$.

Подставив ряд в систему, получим серию итерационных задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial y_k}{\partial t} - 2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} \frac{\partial y_k}{\partial x} = i\varepsilon \frac{\partial^2 y_{k-1}}{\partial x^2} \\ y_k(x, 0, \varepsilon) = f(x) \delta_k^0 \end{cases} \quad (9)$$

Рассмотрим систему на нулевом итерационном шаге

$$k = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial y_0}{\partial t} - 2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} \frac{\partial y_0}{\partial x} = 0 \\ y_0(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (10)$$

Для решения уравнения (10) запишем уравнение характеристик

$dt = \frac{dx}{-2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}}$, первый интеграл которой имеет вид $\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} = C$. Решение задачи (10) запишется в виде $y_0(x, t) = g(C) = g(\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)})$, где g неизвестная функция. Определим ее из начального условия.

$$w_0(x, 0, \varepsilon) = \sigma(x, 0, \varepsilon)g(x) = \exp(-\frac{ix^2\mu(\varepsilon)}{2\varepsilon})g(x) = \exp(-\frac{ix^2\mu(\varepsilon)}{2\varepsilon})f(x)$$

Отсюда $g(x) = f(x)$ и $y_0(x, t) = f(\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)})$. В результате получим явный вид главного члена асимптотики, определенного в фокальных точках на отрезке времени $[0, T]$

$$\begin{aligned} w_0(x, t, \varepsilon) &= \\ &= \frac{\exp(-i(\frac{\pi}{2}([\frac{2}{\pi}(t + \frac{3\pi}{8}]))))}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}} \exp(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}) f(\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}) \end{aligned}$$

Рассмотрим систему на первом итерационном шаге

$$k = 1 \quad \begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t} - 2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} \frac{\partial y_1}{\partial x} = i \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \\ y_1(x, 0, \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Запишем систему характеристик уравнения (11).

$$dt = \frac{dx}{-2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}} = \frac{dy_1}{i(\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} / (\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))^2)}$$

Здесь $\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} / (\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))^2$, здесь $v = \frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}$. Заметим, что функции $f(v)$, $\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2}(v)$ постоянны на первом интеграле $\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} = C_1$. Проинтегрировав уравнение, получим

$$y_1(x, t, \varepsilon) = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} + g(C_1)$$

Функция $f(C_1)$ на данный момент произвольная. Подставив первый интеграл

$C_1 = \frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}$, получим

$$y_1(x, t, \varepsilon) = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} + g(\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)})$$

Подчиним начальному условию $y_1(x, 0, \varepsilon) = g(x) = 0$. Отсюда получим

$$y_1(x, t, \varepsilon) = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}$$

Производя сужение на регуляризирующую функцию, получим

$$w_1(x, t, \varepsilon) = \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right)\right)\right)}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}} \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}$$

Решение $w(x, t, \varepsilon)$ с точностью до $\underline{O}(\varepsilon^2)$ имеет вид

$$w(x, t, \varepsilon) = \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right)\right)\right)}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}} \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) \left(f(v) + \varepsilon \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right) + \underline{O}(\varepsilon^2)$$

По индукции докажем, что общий вид решения на n шаге имеет вид

$$y_n(x, t, \varepsilon) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^{2n} f}{\partial v^{2n}} \left(\frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right)^n$$

Оценим решение $w_k(x, t, \varepsilon)$ с учетом, что $f(x) \in S$ имеет вид

$$\begin{aligned} |w_k(x, t, \varepsilon)| &\leq \frac{1}{2^k k! \sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}} \left| \frac{\partial^{2k} f(v)}{\partial v^{2k}} \right| \frac{1}{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|^k} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^k k! \sqrt{|\cos^2(2t) + \varepsilon^2 \sin^2(2t)|^{2k+1}}} \frac{C_{n2k}}{1+|v|^n} = \frac{C_{n2k} |\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|^{n-(k-\frac{1}{2})}}{2^k k! |x|^n} \leq \\ &\leq \frac{(\sqrt{2} + \varepsilon^\alpha)^n C_{n2k} + C_{n0}}{2^k k! (1+|x|^n)} \leq \frac{M_{n2k}}{2^k k! (1+|x|^n)} \end{aligned}$$

Решение $w(x, t, \varepsilon)$ с точностью до $\underline{O}(\varepsilon^n)$ имеет вид

$$\begin{aligned} w(x, t, \varepsilon) &= \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right)\right)\right)}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}} \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) ((f(v) + \\ &+ \varepsilon \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}) + \dots + \varepsilon^n \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^{2n} f(v)}{\partial v^{2n}} \left(\frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right)^n) + \underline{O}(\varepsilon^{n+1}) \end{aligned}$$

Замечание. Если $f(x) \in S$ так, что оценки роста $M_{n2k} \leq 2^k$, тогда асимптотический ряд по ε будет сходиться.

6. Лемма о сходимости.

ЛЕММА 1. *Решение задачи (4) $w(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к решению $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1).*

$$\begin{aligned} |u(x, t, \varepsilon) - w(x, t, \varepsilon)| &= \left| \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{2t}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right]\right)\right)}{\sqrt{2\pi\varepsilon|\sin(2t)|}} \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-\frac{i\xi^2}{2\varepsilon}) - \exp(-\frac{i\xi^2\mu(\varepsilon)}{2\varepsilon})) f(\xi) \right. \\ &\exp\left[i\left(\operatorname{ctg}(2t) \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon \sin(2t)}\right)\right] d\xi \left. \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon|\sin(2t)|}} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - \exp(-\frac{\xi^2\varepsilon^{\alpha-1}}{2})| |f(\xi)| d\xi = \right. \\ &= \left\{ z = \frac{\xi}{\sqrt{2\varepsilon|\sin(2t)|}} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - \exp(-z^2\varepsilon^\alpha \sin(2t))| f(\sqrt{2\varepsilon|\sin(2t)|} z) |dz| = \\ &= \underline{O}(\varepsilon^\alpha) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по} \quad t \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи Коши при возмущенном начальном условии стремится к решению для исходной задачи Коши при невозмущенном начальном условии тем быстрее, чем выше степень α .

7. Оценка остаточного члена.

Пусть решены N итерационных задач. Тогда решение задачи Коши можно представить в виде

$$w(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k w_k(x, t) + \varepsilon^{N+1} R_N(x, t, \varepsilon), \quad (12)$$

где

$$w_k(x, t, \varepsilon) = y_k(x, t) \exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right)\right)\right) \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon)\cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t))}\right) \frac{1}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)|}},$$

$R_N(x, t, \varepsilon)$ — остаток. Подставив выражение (12) в (4), получим задачу для остатка $R_N(x, t, \varepsilon)$:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial R_N}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2} + x^2 R_N = \varepsilon H(x, t, \varepsilon), \\ R_N(x, 0, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$H(x, t, \varepsilon) = -\left(\frac{\partial^2 y_N(v)}{\partial v^2} \exp(-i\psi(t)) \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon)\cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t))}\right) \frac{1}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)|^5}}\right)$$

Так как $y_N(v) \in S$, то и $H(x, t, \varepsilon) \in S$.

ТЕОРЕМА 2. (Оценка остаточного члена). Пусть итерационные задачи решены до $N+1$ порядка и выполнены требования:

- 1) условия 1)–3) для задачи Коши (1);
 - 2) $\forall x \in R \quad H(x, t, \varepsilon) \in S$ с оценками равномерными по $t \in [0, T]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.
- Тогда $\exists C > 0 \quad |R_N(x, t, \varepsilon)| \leq C \quad \forall (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, T] \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя фундаментальное решение

$$K(x, t, \varepsilon) = \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{2t}{\pi}\right] + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2\pi\varepsilon|\sin(2t)|}} \exp\left[i\left(\operatorname{ctg}(2t)\frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon\sin(2t)}\right)\right],$$

запишем решение задачи (13) в виде

$$R_N(x, t, \varepsilon) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} H(\xi, \tau) K(x, \xi, t - \tau, \varepsilon) d\xi.$$

Оценим $|H(x, t, \varepsilon)|$:

$$\begin{aligned} |H(x, t, \varepsilon)| &\leq \left|\frac{\partial^2 y_N(v)}{\partial v^2}\right| \exp\left(\operatorname{Re}\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon)\cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t))}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)|^5}} = \\ &= \left|\frac{\partial^2 y_N(v)}{\partial v^2}\right| \exp\left(-\frac{x^2\varepsilon^{\alpha-1}}{2(1 - \sin(4t) + \varepsilon^{2\alpha}\sin^2(2t))}\right) \frac{1}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)|^5}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^N N!} \left|\frac{\partial^{2N+2} f(v)}{\partial v^{2N+2}}\right| \exp\left(-\frac{x^2\varepsilon^{\alpha-1}}{2(1 - \sin(4t) + \varepsilon^{2\alpha}\sin^2(2t))}\right) \frac{1}{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)|^{N+\frac{5}{2}}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^N N!} \frac{M_m(2N+2)}{1+|x|^m} |\cos(2t) - \mu(\varepsilon)\sin(2t)|^{m-(N+\frac{5}{2})} = \underline{Q}(1) \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad m \geq N + 5/2 \end{aligned}$$

Оценим остаток по модулю. Тогда получим на $[0, T] \times (0, \varepsilon_0]$

$$\begin{aligned} |R_N(x, t, \varepsilon)| &\leq \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\xi, \tau, \varepsilon)| |K(x, \xi, t - \tau, \varepsilon)| d\xi \leq \\ &\leq \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\xi, \tau, \varepsilon)| d\xi \leq C_{20} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \leq MT = C_2 \end{aligned}$$

Далее оценим разность

$$\begin{aligned} |u(x, t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^N \varepsilon^k w_k(x, t)| &\leq |u(x, t, \varepsilon) - w(x, t, \varepsilon)| + \varepsilon^{N+1} |R_N(x, t, \varepsilon)| \leq \\ &\leq C_1 \varepsilon^\alpha + C_2 \varepsilon^{N+1} \leq C \varepsilon^{N+1} \text{ при } \alpha = N + 1 \end{aligned}$$

□

В заключении приведем сравнение точного решения задачи Коши для уравнения Шредингера и главного члена регуляризованной асимптотики решения с начальной функцией $e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} \frac{1}{1+x^2}$ для точного решения и начальной функцией $e^{-i\frac{x^2(1-i\varepsilon^2)}{2\varepsilon}} \frac{1}{1+x^2}$ для возмущенного решения на отрезке времени $[0.36, 0.43]$ с параметрами $x = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$. Непрерывная линия — точное решение, точки — главный член регуляризованной асимптотики решения (Рисунки 1, 2).

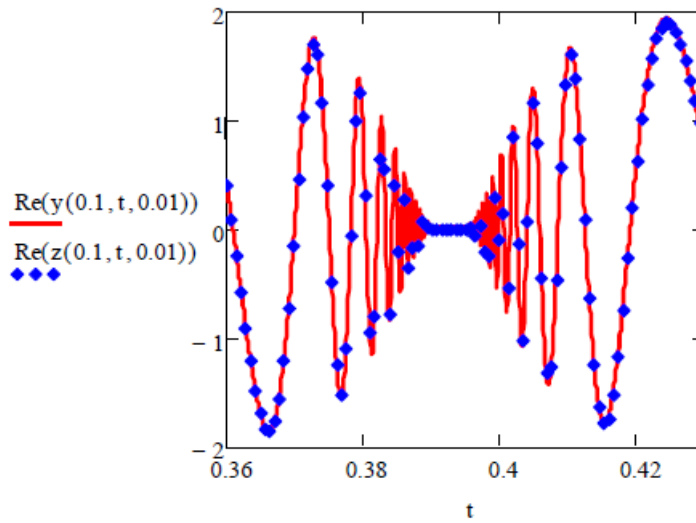


Рис. 1

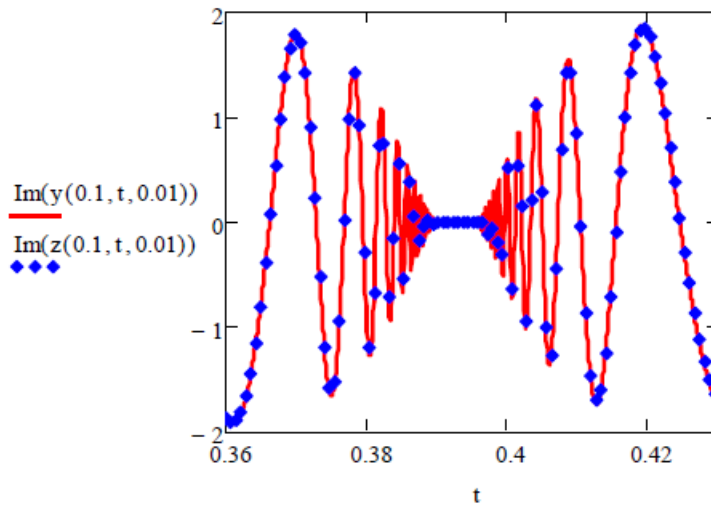


Рис. 2

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
2. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во Московского университета, 2011.
3. Yeliseev A., Ratnikova T., Shaposhnikova D. Regularized Asymptotics of the Solution of the Singularly Perturbed First Boundary Value Problem on the Semiaxis for a Parabolic Equation with a Rational «Simple» Turning Point // Mathematics. 2021. № 9, 405. doi.org/10.3390/math9040405.
4. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии "слабой" точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром // Дифференциальные уравнения, 2022, Т. 58, № 6, С. 733–746.
5. Елисеев А.Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота // Диффенц. уравнения и процессы управления. 2022. № 3. С. 46–59.
6. Елисеев А.Г., Кириченко П.В. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для уравнения типа Шредингера при наличии "сильной" точки поворота у предельного оператора//ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК Том 24. Выпуск 1. с. 50–68., DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68
7. Yeliseev A., Ratnikova T., Shaposhnikova D. Regularized Asymptotics of the Solution of a Singularly Perturbed Mixed Problem on the Semiaxis for the Schrödinger Equation with the Potential $Q = X^2$ // Mathematics 2023, 11(20), 4328; DOI: 10.3390/math11204328
8. А.Г. Елисеев., П.В. Кириченко. Построение регуляризованной асимптотики решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для неоднородного уравнения типа Шрёдингера с потенциалом $V(x)=X$. // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2024, 231, 27–43
9. В.П. Маслов. Операторные методы. Издательство "Наука Москва 1973, 1-544
10. В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, "Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход", ТМФ, 92:2 (1992), 215–254
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, Т. 3, Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

REFERENCES

1. Lomov, S.A. 1981, *Introduction to the general theory of singular perturbations* [Vvedenie v obshchuyu teoriyu singulyarnykh vozmushchenii], Nauka, Moscow.
2. Lomov, S.A. & Lomov, I.S. 2011, *Foundations of the mathematical theory of the boundary layer* [Osnovy matematicheskoi teorii pogranichnogo sloya], Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, Moscow.
3. Yeliseev, A., Ratnikova, T. & Shaposhnikova, D. 2021, "Regularized asymptotics of the solution of the singularly perturbed first boundary value problem on the semiaxis for a parabolic equation with a rational 'simple' turning point", *Mathematics*, vol. 9, no. 4, art. id. 405, doi: 10.3390/math9040405.

4. Eliseev, A.G. & Kirichenko, P.V. 2022, “Singularly perturbed Cauchy problem in the presence of a ‘weak’ first-order turning point of the limit operator with multiple spectrum” [Singulyarno vozmushchennaya zadacha Koshi pri nalichii ‘slaboi’ tochki povorota pervogo poryadka u predel’nogo operatora s kratnym spektrom], *Differential Equations*, vol. 58, no. 6, pp. 733–746.
5. Eliseev, A.G. 2022, “An example of solving a singularly perturbed Cauchy problem for a parabolic equation in the presence of a ‘strong’ turning point” [Primer resheniya singulyarno vozmushchennoi zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya pri nalichii ‘sil’noi’ tochki povorota], *Differential Equations and Control Processes*, no. 3, pp. 46–59.
6. Eliseev, A.G. & Kirichenko, P.V. 2023, “Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed mixed problem on the semiaxis for the Schrödinger-type equation in the presence of a ‘strong’ turning point of the limit operator” [Regularizovannaya asimptotika resheniya singulyarno vozmushchennoi smeshannoi zadachi na poluosi dlya uravneniya tipa Shredingera pri nalichii ‘sil’noi’ tochki povorota u predel’nogo operatora], *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 50–68, doi: 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68.
7. Yeliseev, A., Ratnikova, T. & Shaposhnikova, D. 2023, “Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed mixed problem on the semiaxis for the Schrödinger equation with the potential $Q = X^2$ ”, *Mathematics*, vol. 11, no. 20, art. id. 4328, doi: 10.3390/math11204328.
8. Eliseev, A.G. & Kirichenko, P.V. 2024, “Construction of regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed mixed problem on the semiaxis for an inhomogeneous Schrödinger-type equation with potential $V(x) = X$ ” [Postroenie regularizovannoi asimptotiki resheniya singulyarno vozmushchennoi smeshannoi zadachi na poluosi dlya neodnorodnogo uravneniya tipa Shredingera s potentsialom $V(x) = X$], *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, vol. 231, pp. 27–43.
9. Maslov, V.P. 1973, *Operator methods* [Operatornye metody], Nauka, Moscow, 544 p.
10. Belov, V.V. & Dobrokhotov, S.Yu. 1992, “Quasiclassical Maslov asymptotics with complex phases. I. General approach” [Kvaziklassicheskie asimptotiki Maslova s kompleksnymi fazami. I. Obshchii podkhod], *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 92, no. 2, pp. 215–254.
11. Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. 2008, *Course of theoretical physics, Vol. 3: Quantum mechanics (non-relativistic theory)* [Kurs teoreticheskoi fiziki, T. 3: Kvantovaya mekhanika (nerelyativistskaya teoriya)], Fizmatlit, Moscow.

Получено: 09.02.2026

Принято в печать: 19.05.2026