

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 511.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-29-47

Интерполяционные многочлены с переменными коэффициентами

А. И. Денисов, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Денисов Алексей Игоревич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alex040997@rambler.ru

Добровольский Николай Николаевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В работе рассмотрена новая постановка задачи интерполяции, когда интерполирующая функция совпадает с интерполируемой функцией на прямом произведении промежутка и конечной обобщённой параллелепипедальной сетки. Исследуется новый объект исследования — интерполяционный тригонометрический многочлен с переменными коэффициентами.

Ключевые слова: интерполяционный тригонометрический многочлен с переменными коэффициентами.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

Денисов А. И., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М. Интерполяционные многочлены с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 29–47.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 511.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-29-47

Interpolation polynomials with variable coefficients

A. I. Denisov, N. N. Dobrovolskii, N. M. Dobrovolskii

Denisov Alexey Igorevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alex040997@rambler.ru

Dobrovolskii Nikolai Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovolskii Nikolai Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

This paper considers a new formulation of the interpolation problem, where the interpolating function coincides with the interpolated function on the direct product of an interval and a finite generalized parallelepipedal grid. A new object of study is the interpolation trigonometric polynomial with variable coefficients.

Keywords: interpolation trigonometric polynomial with variable coefficients.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

Denisov, A. I., Dobrovolskii, N. N., Dobrovolskii, N. M. 2026, “Interpolation polynomials with variable coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 29–47.

*Посвящается 80-летию со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина*

1. Введение

В работе [7] рассматривался вопрос о вычислении континуальных интегралов. Как указано в этой работе именно эта проблема была одной из тех, что послужили основанием для появления работы Н. М. Коробова [14], с которой начинается развитие теоретико-числового метода в приближенном анализе. В 1960 году В. С. Рябенький в работе [23] сделал первый шаг в вопросе применения теоретико-числовых сеток для интерполирования функций многих переменных.

В работах [1] и [2] построены эффективные алгоритмы вычисления коэффициентов интерполяционных полиномов, что является решением одной из классических задач численного анализа. Применение теоретико-числовых подходов позволяет получить в этой области новые результаты [4], [11], [22].

Параллелепипедальная сетка $M(\vec{a}, N)$, введенная Н. М. Коробовым в 1959 г. [15], [16], состоит из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где $\vec{a}$ набор оптимальных коэффициентов и выполнены условия $a_1 = 1$, $(a_\nu, N) = 1$ ($\nu = 1, \dots, s$).

Определения и основные свойства параллелепипедальных сеток изложены в [20].

В работе [18] рассматривалось понятие конечных рядов Фурье на равномерной сетке. Эти ряды задают интерполяционный тригонометрический полином на равномерной сетке. В работе [11] эта конструкция была перенесена на случай произвольной обобщённой параллелепипедальной сетке, соответствующей произвольной целочисленной решётке.

Другие подходы для построения интерполяционных формул для классов полиномов Фурье изложены в работах [5, 6] С. М. Воронина.

Цель данной работы — рассмотреть новую постановку задачи интерполяции, когда интерполирующая функция совпадает с интерполируемой функцией на прямом произведении промежутка и конечной обобщённой параллелепипедальной сеткой. Появляется новый объект исследования — интерполяционный тригонометрический многочлен с переменными коэффициентами.

2. Обозначения и необходимые факты из геометрии чисел

Мы приведём этот материал согласно работе [11].

В данной работе под сеткой мы понимаем произвольное непустое конечное множество M из G_s , где $G_s = [0; 1)^s$ — полукоткрытый единичный s -мерный куб. Предварительно напомним некоторые определения и обозначения.

Пусть Λ — произвольная целочисленная решетка в $\mathbb{R}^s$, т. е. Λ — подрешетка фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$. Другими словами $\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \dots + m_s\vec{\lambda}_s \mid m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\}$ и $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — линейно независимая система целочисленных векторов. С алгебраической точки зрения все решетки как бесконечные абелевы группы с s образующими изоморфны $\mathbb{Z}^s$.

Параллелепипед $\Pi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \{\alpha_1\vec{\lambda}_1 + \dots + \alpha_s\vec{\lambda}_s \mid 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_s < 1\}$ — фундаментальный параллелепипед решетки, объем которого обозначается через $\det \Lambda$, называется детерминантом, или определителем, решетки и является ее инвариантом, не зависящим от выбора базиса решетки.

Усеченной нормой называется величина $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$, где для вещественного x обозначаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$. Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решетки Λ определяется равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} q(\vec{x}).$$

Он имеет простой геометрический смысл: гиперболический крест $K(T)$ не содержит ненулевых точек решетки Λ при $T < q(\Lambda)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T\},$$

а величина T — его параметром.

Назовем r -й компонентой гиперболического креста $K(T)$ подмножество

$$K_r(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K(T) = \left(\bigcup_{r=1}^s K_r(T) \right) \cup \{\vec{0}\}.$$

Для решетки Λ рассмотрим ее взаимную решетку Λ^* . По определению взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Отсюда следует, что для любой решетки Λ справедливы равенства $(\Lambda^*)^* = \Lambda$, $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$. Нетрудно видеть, что фундаментальная решетка $\mathbb{Z}^s$ совпадает со своей взаимной решеткой и является подрешеткой взаимной решетки любой целочисленной решетки. Кроме того, если $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^s$, то $\mathbb{Z}^s \subset \Lambda^* \subset \Lambda_1^*$. Для любого $C \neq 0$ $(C\Lambda)^* = \Lambda^*/C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Ясно, что если $\Lambda_1 \subset \Lambda$, то $M(\Lambda) \subset M(\Lambda_1)$.

Если $M \subset \Lambda$ — подрешетка решетки Λ , то величина $D = \det M / \det \Lambda$ называется индексом подрешетки M решетки Λ . Два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ решетки Λ сравнимы по подрешетке M (находятся в одном классе относительно подрешетки M), если $\vec{x} - \vec{y} \in M$. В этом случае пишем $\vec{x} \equiv \vec{y} \pmod{M}$. Индекс D подрешетки M решетки Λ равен числу классов решетки Λ относительно M . Произвольное множество векторов решетки Λ по одному из каждого класса относительно подрешетки M называется полной системой вычетов решетки Λ относительно M .

Каждая полная система вычетов решетки Λ относительно M имеет естественную структуру конечной абелевой группы, изоморфной Λ/M .

Отсюда следует, что для любой целочисленной решетки Λ обобщенная параллелепipedальная сетка $M(\Lambda)$ является полной системой вычетов взаимной решетки Λ^* относительно фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$, т. е. $M(\Lambda) = \Lambda^*/\mathbb{Z}^s$. Таким образом, на обобщенной параллелепipedальной сетке целочисленной решетки определена естественная операция сложения, относительно которой она является конечной абелевой группой.

Обычно полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ будем обозначать через $M^*(\Lambda)$, хотя она определена неоднозначно. Ниже будут сформулированы дополнительные условия для выбора $M^*(\Lambda)$.

В одномерном случае любая целочисленная решетка имеет вид $p\mathbb{Z}$ и множество чисел $\{-p_1, \dots, 0, \dots, p_2\}$ является наименьшей абсолютной полной системой вычетов одномерной фундаментальной решетки $\mathbb{Z}$ по подрешетке $p\mathbb{Z}$. Дадим многомерный аналог этому понятию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ назовем минимальной гиперболической полной системой вычетов, если минимальный гиперболический крест, содержащий эту полную систему вычетов, имеет минимальное значение своего параметра для всех полных систем вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ , состоящую из представителей классов вычетов с наименьшей усеченной нормой среди всех элементов класса вычетов, назовем абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов.

Такую полную систему вычетов будем обозначать через $M_H^*(\Lambda)$. Вообще говоря, полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ определена неоднозначно. Это видно на примере решетки $N\mathbb{Z}^s$ при четном N . Действительно, $N_2 \equiv -N_2 \pmod{N}$. Уже в одномерном случае две полные системы вычетов $\{-N_1, \dots, 0, \dots, N_2\}$ и $\{-N_2, \dots, 0, \dots, N_1\}$ удовлетворяют определению 3. В s -мерном случае таких систем будет 2^s . Для однозначности выбора $M_H^*(\Lambda)$ можно еще ввести лексикографический линейный порядок на $\mathbb{Z}^s$. Тогда из нескольких возможных элементов с одинаковым значением усеченной нормы выберем наименьший в смысле лексикографического упорядочивания. Тем самым $M_H^*(\Lambda)$ будет определено однозначно.

ЛЕММА 1. Для любой целочисленной решетки Λ и подрешетки Λ_1 справедливо вложение

$$M_H^*(\Lambda) \subset M_H^*(\Lambda_1). \quad (2)$$

Для произвольной целочисленной решетки Λ определим второй и третий гиперболические параметры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вторым гиперболическим параметром целочисленной решетки Λ называется наименьшее натуральное число $q_2(\Lambda)$, такое, что гиперболический крест $K(q_2(\Lambda))$ содержит полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Третьим гиперболическим параметром целочисленной решетки Λ называется наибольшее натуральное число $q_3(\Lambda)$, такое, что все целые точки гиперболического креста $K(q_3(\Lambda))$ содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ . Другими словами все целые точки этого креста не сравнимы по модулю Λ .

Множество всех целых точек принадлежащих гиперболическому кресту $K(T)$ обозначим через $K_Z(T)$. Так как $|K_Z(1)| = 3^s$, то для любого $N \geq 3^s$ определим функцию $T_s(N)$ из условий $|K_Z(T_s(N))| \leq N$, $|K_Z(T_s(N) + 1)| > N$. Ясно, что

$$q_3(\Lambda) \leq T_s(N) \leq q_2(\Lambda). \quad (3)$$

Из (3) следует, что при $N < 3^s$ надо полагать $q_3(\Lambda) = 0$, так как минимальный крест $K(1)$ содержит больше элементов, чем полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ , состоящая из N элементов.

В работе [8] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *При $N > e^{s \cdot e}$ справедливы неравенства:*

$$\frac{(s-1)!(N-1)}{2^s (\ln N + \frac{3s}{2})^{s-1}} \leq T_s(N) \leq \frac{(s-1)!N}{2^s (\ln N + \ln((s-1)!) - s \ln 2 - (s-1) \ln(\ln N))^{s-1}}. \quad (4)$$

Из определений 4 и 5 сразу следует, что

$$q_3(\Lambda) < q(\Lambda), \quad q_3(\Lambda) \leq q_2(\Lambda).$$

Общие нетривиальные соотношения между этими тремя гиперполическими параметрами, по-видимому, установить непросто. Априори даже неясно, всегда ли существует полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ такая, что выполнены соотношения

$$K(q_3(\Lambda)) \subset M^*(\Lambda) \subset K(q_2(\Lambda)) ? \quad (5)$$

Рассмотрим для примера случай решетки $\Lambda = N\mathbb{Z}^s$. Очевидно, что

$$M(N\mathbb{Z}^s) = \left\{ 0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N} \right\}^s, \quad |M(N\mathbb{Z}^s)| = \det(N\mathbb{Z}^s) = N^s. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что в качестве минимальной гиперболической полной системы вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки $N\mathbb{Z}^s$ можно взять

$$M^*(N\mathbb{Z}^s) = \{-N_1, \dots, N_2\}^s. \quad (7)$$

Отсюда следует, что

$$q(\Lambda) = N, \quad q_2(\Lambda) = N_2^s \leq \frac{\det N\mathbb{Z}^s}{2^s} \quad \text{и} \quad q_3(\Lambda) = N_1. \quad (8)$$

ЛЕММА 2. *Для любой целочисленной решетки Λ найдется минимальная гиперболическая полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ такая, что выполнены соотношения (5).*

ЛЕММА 3. *Абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ удовлетворяет соотношению (5).*

Введем для произвольного вектора $\vec{x}$ понятие его индекса – количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через $r(\vec{x})$. Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора: $r(\vec{0}) = 0$, а максимальное значение индекса равно s . Для целого вектора $\vec{m}$ рассмотрим его индекс по модулю 2, т.е. количество его нечетных координат, которое обозначим через $r_2(\vec{m})$.

ЛЕММА 4. Если для целочисленной решетки Λ вектор $\vec{m} \neq \vec{0}$ и имеет минимальное значение усеченной нормы ($q(\vec{m}) = q(\Lambda)$), то для третьего гиперболического параметра решетки Λ справедлива оценка сверху:

$$q_3(\Lambda) \leq \frac{q(\Lambda)}{2^{r(\vec{m})-r_2(\vec{m})}}. \quad (9)$$

Обозначим через J_s множество всех целочисленных векторов $\vec{j}_s$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел $1, 2, \dots, s$.

ЛЕММА 5. Пусть для заданного $\vec{j}_s \in J_s$ вектора $\lambda_1 = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,s}), \dots, \lambda_s = (\lambda_{s,1}, \dots, \lambda_{s,s})$ целочисленной решетки Λ определены из условий:

$$\lambda_{1,j_1} = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_1}|, \quad (10)$$

$$\lambda_{\nu,1} = \dots = \lambda_{\nu,j_{\nu-1}} = 0, \quad \lambda_{\nu,j_{\nu}} = \min_{\vec{x} \in \Lambda^{(\nu)} \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_{\nu}}| \quad (\nu = 2, \dots, s), \quad (11)$$

где $\Lambda^{(\nu)} = \{\vec{x} \in \Lambda \mid x_{j_1} = \dots = x_{j_{\nu-1}} = 0\}$, тогда они образуют базис решетки Λ .

Заметим, что из доказательства леммы следует равенство

$$\det \Lambda = N_1(\vec{j}_s) \dots N_s(\vec{j}_s).$$

ТЕОРЕМА 2. Для любой целочисленной решетки Λ второй гиперболический параметр решетки удовлетворяет соотношению:

$$q_2(\Lambda) \leq \min_{\vec{j}_s \in J_s} \left[\frac{N_1(\vec{j}_s)}{2} \right] \dots \left[\frac{N_s(\vec{j}_s)}{2} \right]. \quad (12)$$

3. Тригонометрические суммы сеток и решеток

При изучении вопросов приближенного интегрирования и интерполирования периодических функций многих переменных естественным образом возникают тригонометрические суммы. Приведем несколько необходимых определений и результатов из работ [10] и [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Тригонометрической суммой сетки M и произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется величина

$$S(\vec{m}, M) = \sum_{\vec{x} \in M} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

Рассмотрим для произвольной целочисленной решетки Λ , целого вектора $\vec{m}$ и произвольного вектора $\vec{x}$ из взаимной решетки Λ^* величины:

$$\delta_{\Lambda}(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{m} \in \Lambda, \\ 0, & \text{если } \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda, \end{cases} \quad \delta_{\Lambda}^*(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{x} \in \mathbb{Z}^s, \\ 0, & \text{если } \vec{x} \in \Lambda^* \setminus \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Символ $\delta_{\Lambda}(\vec{m})$ является многомерным обобщением известного теоретикочислового символа

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Полной линейной кратной тригонометрической суммой целочисленной решетки Λ будем называть выражение

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^* / \mathbb{Z}^s} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где $\vec{m}$ — произвольный целочисленный вектор.

Ясно, что для обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство $S(\vec{m}, M(\Lambda)) = s(\vec{m}, \Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Полной линейной кратной тригонометрической суммой взаимной решетки Λ^* целочисленной решетки Λ будем называть выражение

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s / \Lambda} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i(\vec{m}_j, \vec{x})},$$

где $\vec{x}$ — произвольный вектор взаимной решетки Λ^* и $\vec{m}_0, \dots, \vec{m}_{N-1}$ — полная система вычетов решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ .

Справедливы следующие двойственные утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Для $s(\vec{m}, \Lambda)$ справедливо равенство

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \delta_\Lambda(\vec{m}) \cdot \det \Lambda.$$

ТЕОРЕМА 4. Для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ и для произвольного $\vec{x} \in \Lambda^*$ справедливо равенство

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \delta_\Lambda^*(\vec{x}) \cdot \det \Lambda.$$

4. Конечные ряды Фурье с переменными коэффициентами

Рассмотрим новый класс функций $ER_{s+1}^\alpha(T)$ заданный следующим образом

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Функция $u(t, \vec{x})$ определенная при $0 \leq t \leq T$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$, периодическая по $\vec{x}$ с периодом 1 по каждой переменной x_ν ($\nu = 1, \dots, s$), представимая кратным рядом Фурье с переменными коэффициентами Фурье, зависящими от t и дифференцируемыми по t при $0 \leq t \leq T$:

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b'_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (13)$$

принадлежит классу $ER_{s+1}^\alpha(T)$, если для любого t из отрезка $[0; T]$ периодическая функция

$$f(\vec{x}) = f_t(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

принадлежат классу E_s^α и для всех t из отрезка $[0; T]$ норма $\|f_t(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$ равномерно ограничена.

Таким образом, если $u(t, \vec{x}) \in ER_{s+1}^\alpha(T)$, то для любого $t \in [0, T]$ справедливы неравенства

$$|b_{\vec{m}}(t)| \leq \frac{\|f_t(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}.$$

Можно определить норму $\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)}$ равенством

$$\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f_t(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |b_{\vec{m}}(t)(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha|. \quad (14)$$

Ясно, что относительно нормы $\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)}$ пространство $ER_{s+1}^\alpha(T)$ является несепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству $l_0(T)$ – всех ограниченных последовательностей комплексно значимых функций на промежутке $[0, T]$.

Очевидно, что $E_s^\alpha \subset ER_{s+1}^\alpha(T)$, так как функция $u(t, \vec{x}) = f(\vec{x})$ задаёт указанное вложение. Ясно, что $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \|f(\vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha}$.

Для произвольной функции $u(t, \vec{x})$ из $ER_{s+1}^\alpha(T)$ рассмотрим задачу интерполирования нового типа тригонометрическими многочленами с переменными коэффициентами:

$$u(t, \vec{x}) = P(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \quad 0 \leq t \leq T.$$

По аналогии с работой [11] назовём данный конечный ряд конечным рядом Фурье с переменными коэффициентами на обобщенной параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)$.

Теорема 4 позволяет доказать, что произвольную функцию $u(t, \vec{x})$ из $ER_{s+1}^\alpha(T)$ на обобщенной параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ можно разложить в конечный ряд Фурье с переменными коэффициентами.

ТЕОРЕМА 5. *Для любой функции $u(t, \vec{x})$ из $ER_{s+1}^\alpha(T)$ на $M(\Lambda)$ справедливо равенство*

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j(t) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{m}_j)}, \quad \vec{x} \in M(\Lambda),$$

где

$$c_j(t) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} u(t, \vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} u(t, \vec{x}) &= \sum_{j=0}^{N-1} c_j(t) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{m}_j)} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} u(t, \vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)} \right) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{m}_j)} = \\ &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} u(t, \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i(\vec{x} - \vec{y}, \vec{m}_j)} \right) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} u(t, \vec{y}) \delta_\Lambda^*(\vec{x} - \vec{y}) = u(t, \vec{x}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda). \end{aligned}$$

□

Из этой теоремы сразу следует, что если известны значения функции $u(t, \vec{x})$ из $ER_{s+1}^\alpha(T)$ в узлах прямого произведения промежутка $[0, T]$ на обобщенную параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ и выбрана произвольная полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ решетки $\mathbb{Z}^s$, по подрешетке Λ , то следующий тригонометрический полином с переменными коэффициентами на обобщенной параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$, $\vec{x} \in M(\Lambda)$

$$S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(t, \vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(t, \vec{m}) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} u(t, \vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \left(\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{n}}(t) e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{y})} \right) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{n}}(t) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{n} - \vec{m}, \vec{y})} \right) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{n}}(t) \delta_{\Lambda}(\vec{n} - \vec{m}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t), \end{aligned} \quad (16)$$

является интерполяционным многочленом с переменными коэффициентами для функции $u(t, \vec{x})$ на прямом произведении промежутка $[0, T]$ на обобщенную параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$.

5. Неравенства для перенормировок на пространстве многомерных рядов Фурье с переменными коэффициентами

Наряду с нормой (14) рассмотрим нормы

$$\|u(t, \vec{x})\|_C = \sup_{0 \leq t \leq T, \vec{x} \in G_s} |u(t, \vec{x})| \quad (17)$$

и

$$\|u(t, \vec{x})\|_{l_1} = \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |b_{\vec{m}}(t)|, \quad \|u(t, \vec{x})\|_{l_2} = \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |b_{\vec{m}}(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$\|u(t, \vec{x})\|_{l_2} \leq \|u(t, \vec{x})\|_C, \quad \|u(t, \vec{x})\|_C \leq \|u(t, \vec{x})\|_{l_1}, \quad \|u(t, \vec{x})\|_{l_1} \leq \|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)} (1 + 2\zeta(\alpha))^s. \quad (19)$$

Последнее неравенство (19) можно уточнить при дополнительном ограничении, что $b_{\vec{m}}(t) = 0$ при $\vec{m} \in K(t)$. Предварительно сформулируем несколько лемм из работы [8].

Для натурального $t > 1$ положим, что

$$A_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j > t} \frac{1}{(m_1 \dots m_j)^\alpha} \quad (\alpha > 1), \quad (20)$$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} 1, \quad C_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} \frac{1}{m_1 \dots m_j}, \quad (21)$$

суммирование проводится только по натуральным $m_1, \dots, m_j$.

Так как t – натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m > t} \frac{1}{m^\alpha} < \int_t^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)t^{\alpha-1}}, \quad B_1(t) = t, \quad C_1(t) \leq \ln t + 1. \quad (22)$$

ЛЕММА 6. Справедливо неравенство

$$C_j(t) \leq \sum_{k=0}^j \frac{C_j^k \ln^k t}{k!}. \quad (23)$$

ЛЕММА 7. *Справедливо неравенство*

$$B_j(t) \leq t \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C_{j-1}^k \ln^k t}{k!}. \quad (24)$$

ЛЕММА 8. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leq \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right). \quad (25)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть натуральное $q > 1$ и разложение функции $u(t, \vec{x}) \in ER_{s+1}^\alpha(T)$ в ряд Фурье с переменными коэффициентами имеет вид:

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \notin K(q)} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (26)$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|u(t, \vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)}}{q^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right. \\ &\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (26) следует, что

$$\|u(t, \vec{x})\|_{l_1} \leq \|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)} \sum_{\vec{m} \notin K(q)} \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)} \sum_{j=1}^s C_s^j 2^j A_j(q). \quad (28)$$

Применяя лемму 8, получим

$$\begin{aligned} \|u(t, \vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)}}{q^{\alpha-1}} \sum_{j=1}^s C_s^j 2^j \times \\ &\times \left(\frac{\ln^{j-1} q}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m q}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right) = \frac{\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)}}{q^{\alpha-1}} \times \\ &\times \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q}{(s-1)!(\alpha-1)} + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right), \end{aligned}$$

и теорема доказана. $\square$

Пусть $S \subset \mathbb{Z}$ — произвольное конечное множество целых чисел m . Обозначим через $\mathbb{P}(S, T)$ пространство всех тригонометрических многочленов с переменными коэффициентами, зависящими от t и дифференцируемыми по t при $0 \leq t \leq T$:

$$\mathbb{P}(S, T) = \left\{ P(t, x) = \sum_{m \in S} b_m(t) e^{2\pi i m x} \mid b_m(t) \in C^1(0, T), m \in S \right\},$$

а через $\mathbb{P}_0(S)$ — пространство всех тригонометрических многочленов с постоянными коэффициентами

$$\mathbb{P}_0(S) = \left\{ P(x) = \sum_{m \in S} b_m e^{2\pi i m x} \mid b_m \in \mathbb{C}, m \in S \right\}.$$

Очевидно, что $\mathbb{P}_0(S) \subset \mathbb{P}(S, T)$.

Рассмотрим для любого натурального q конечномерные пространства $P^{(q)}(T) = \mathbb{P}(K(q), T)$ всех тригонометрических полиномов с переменными коэффициентами вида:

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(q)} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (29)$$

и $P^{(q)} = \mathbb{P}_0(K(q))$ всех тригонометрических полиномов вида:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(q)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (30)$$

Тригонометрический полином

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(q)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (31)$$

очевидно, имеет следующие нормы:

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \sup_{\vec{m} \in |K(q)|} |c(\vec{m})| = 1, \quad \|f_0(\vec{x})\|_C = |K_Z(q)|, \\ \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &= |K_Z(q)|, \quad \|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = q^\alpha. \end{aligned} \quad (32)$$

В работе [8] доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Справедливо неравенство*

$$|K_Z(q)| \leq \frac{2^s}{(s-1)!} q \left(\ln q + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1. \quad (33)$$

ТЕОРЕМА 8. *Справедливо неравенство*

$$|K_Z(q)| \geq q \frac{2^s \ln^{s-1} q}{(s-1)!} + q(1 - (-1)^s) + (-1)^s. \quad (34)$$

Из теоремы 7 и равенств (32) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{q^\alpha}, \\ \|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{q^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \left(\ln q + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1 \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Из оценки снизу (34) и равенства (32) следует оценка снизу для норм:

$$\|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} \geq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{q^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \ln^{s-1} q + 1 + (-1)^{s-1} + \frac{(-1)^s}{t} \right). \quad (36)$$

Таким образом, оценка сверху (35) и оценка снизу (36) совпадают по порядку относительно q .

6. Свойства оператора интерполирования с переменными коэффициентами

Формула (15) задает оператор интерполирования I_Λ на пространстве $ER_{s+1}^\alpha(T)$, который каждой функции $u(t, \vec{x}) \in ER_{s+1}^\alpha(T)$ ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен (15). Таким образом,

$$I_\Lambda u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} u(t, \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})} \right). \quad (37)$$

ЛЕММА 9. Для любой функции $u(t, \vec{x}) \in ER_{s+1}^\alpha(T)$ справедливо неравенство

$$\|I_\Lambda u(t, \vec{x})\|_{l_1} \leq \|u(t, \vec{x})\|_{l_1}. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению нормы $\|\cdot\|_{l_1}$ имеем:

$$\begin{aligned} \|I_\Lambda u(t, \vec{x})\|_{l_1} &= \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} |c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(t, \vec{m})| = \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \left| \sum_{\vec{n} \in \Lambda} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t) \right| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} |b_{\vec{m} + \vec{n}}(t)| = \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} |b_{\vec{n}}(t)| = \|u(t, \vec{x})\|_{l_1}. \end{aligned} \quad (39)$$

□

ЛЕММА 10. Для любого тригонометрического полинома с переменными коэффициентами $u(t, \vec{x})$ вида

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (40)$$

справедливо равенство

$$I_\Lambda u(t, \vec{x}) = u(t, \vec{x}). \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по формуле (15)

$$I_\Lambda u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(t, \vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где

$$\begin{aligned} c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(t, \vec{m}) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} u(t, \vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \left(\sum_{\vec{n} \in M^*(\Lambda)} b_{\vec{n}}(t) e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{y})} \right) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in M^*(\Lambda)} b_{\vec{n}}(t) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{n} - \vec{m}, \vec{y})} \right) = \sum_{\vec{n} \in M^*(\Lambda)} b_{\vec{n}}(t) \delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m}) = b_{\vec{m}}(t) \end{aligned}$$

и лемма доказана. □

Множество тригонометрических полиномов вида (40) обозначим через $P_\Lambda(T)$.

ТЕОРЕМА 9. Для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda \geq 3^s$ и $q_3(\Lambda) \geq 1$ на пространстве $P^{(q_3(\Lambda))}(T)$ для абсолютно минимальной гиперболической полной система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ справедливо равенство (41).

При $q > q_3(\Lambda)$ найдется тригонометрический полином с переменными коэффициентами $u(t, \vec{x}) \in P^{(q)}(T)$ такой, что равенство (41) нарушается. В частности,

$$P^{(q)}(T) \cap \ker I_\Lambda \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, третий гиперболический параметр решетки может быть больше 0 только при $\det \Lambda \geq 3^s$. Поэтому при $q_3(\Lambda) \geq 1$ выполняется включение $K(q_3(\Lambda)) \subset M_H^*(\Lambda)$ и первое утверждение теоремы следует из леммы 10.

Из определения третьего гиперболического параметра целочисленной решетки следует, что найдется целая точка $\vec{m}$ с $q(\vec{m}) = q_3(\Lambda) + 1$, которая не принадлежит $M_H^*(\Lambda)$. При этом для $\vec{m}_1 \in M_H^*(\Lambda)$ с $\vec{m} \equiv \vec{m}_1 \pmod{\Lambda}$ имеем $q(\vec{m}_1) \leq q_3(\Lambda) + 1$. Поэтому для тригонометрического полинома с переменными коэффициентами $u(t, \vec{x}) = b(t) (e^{2\pi i(\vec{m}_1, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})})$ имеем $I_\Lambda u(t, \vec{x}) = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} I_\Lambda u(t, \vec{x}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} u(t, \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{n} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{x} - \vec{y})} \right) = b(t) \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \left(e^{2\pi i(\vec{m}_1, \vec{y})} - e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} \right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{n} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{x} - \vec{y})} \right) = b(t) \sum_{\vec{n} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{x})} \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \left(e^{2\pi i(\vec{m}_1 - \vec{n}, \vec{y})} - e^{2\pi i(\vec{m} - \vec{n}, \vec{y})} \right) \right) = \\ &= b(t) \sum_{\vec{n} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{x})} (\delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m}_1) - \delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m})) = b(t) e^{2\pi i(\vec{m}_1, \vec{x})} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом

$$u(t, \vec{x}) = b(t) \left(e^{2\pi i(\vec{m}_1, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \right) \in P^{(q_3(\Lambda)+1)}(T) \cap \ker I_\Lambda$$

и теорема полностью доказана. $\square$

Для любого $\vec{m} \in M^*(\Lambda)$ обозначим через $ER_{s+1, \vec{m}}^\alpha(T)$ банахово подпространство пространства $ER_{s+1}^\alpha(T)$, состоящее из функций вида

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}. \quad (42)$$

Ясно, что имеет место разложение $ER_{s+1}^\alpha(T)$ в прямую сумму $ER_{s+1, \vec{m}}^\alpha(T)$:

$$ER_{s+1}^\alpha(T) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \oplus ER_{s+1, \vec{m}}^\alpha(T).$$

Отсюда следует, что произвольная функция $u(t, \vec{x}) \in ER_{s+1}^\alpha(T)$ представима в виде сумм

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} u_{\vec{m}}(t, \vec{x}),$$

где

$$u_{\vec{m}}(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}.$$

В работе [13] показано, что для проектора $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$ имеется конечное представление:

$$A_{\vec{m}}(f(\vec{x})) = f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\{\vec{x} + \vec{y}\}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m})} \quad (\vec{m} \in M^*(\Lambda)).$$

Здесь для произвольного вектора $\vec{x}$ под его дробной частью подразумевается вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$.

По аналогии, определим проектор $A_{\vec{m}} : u(t, \vec{x}) \rightarrow u_{\vec{m}}(t, \vec{x})$. Справедлива следующая лемма:

ЛЕММА 11. Для проектора $A_{\vec{m}}$ на пространстве $ER_{s+1}^\alpha(T)$ справедливо конечное представление:

$$A_{\vec{m}}(u(t, \vec{x})) = u_{\vec{m}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} u(t, \{\vec{x} + \vec{y}\}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m})} \quad (\vec{m} \in M^*(\Lambda)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $\vec{m} \in M^*(\Lambda)$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} u(t, \{\vec{x} + \vec{y}\}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m})} &= \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{n}}(t) e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{x} + \vec{y})} e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m})} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{n}}(t) e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{x})} \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{n} - \vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{n}}(t) e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{x})} \delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m}) = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \Lambda} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} = u_{\vec{m}}(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 10. На пространстве $ER_{s+1}^\alpha(T)$ операторы $A_{\vec{m}}$ и I_Λ коммутируют:

$$I_\Lambda(A_{\vec{m}}(u(t, \vec{x}))) = A_{\vec{m}}(I_\Lambda(u(t, \vec{x}))) = \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t) \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определений операторов $A_{\vec{m}}$ и I_Λ следует:

$$\begin{aligned} I_\Lambda(A_{\vec{m}}(f(\vec{x}))) &= I_\Lambda \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} \right) = \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t) \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \\ &= A_{\vec{m}} \left(\sum_{\vec{k} \in M^*(\Lambda)} \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} b_{\vec{k} + \vec{n}}(t) \right) e^{2\pi i(\vec{k}, \vec{x})} \right) = A_{\vec{m}}(I_\Lambda(u(t, \vec{x}))). \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 11. На пространстве $ER_{s+1}^\alpha(T)$ ядро $\ker I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ имеет нормированный базис:

$$u_{\vec{m}, \vec{n}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(q(\vec{m} + \vec{n}))^\alpha} \left(e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} \right) \quad (\vec{m} \in M_H^*(\Lambda), \vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}). \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $M_H^*(\Lambda)$ – абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ , то для любых $\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)$, $\vec{n} \in \Lambda$ справедливо неравенство для усеченной нормы: $q(\vec{m}) \leq q(\vec{m} + \vec{n})$. Отсюда следует, что $\|u_{\vec{m}, \vec{n}}(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)} = 1$.

Так как $I_\Lambda(u_{\vec{m}, \vec{n}}(t, \vec{x})) = \left(\frac{1}{(q(\vec{m} + \vec{n}))^\alpha} - \frac{1}{(q(\vec{m} + \vec{n}))^\alpha} \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = 0$, то $u_{\vec{m}, \vec{n}}(t, \vec{x}) \in \ker I_\Lambda$.

С другой стороны, если $u(t, \vec{x}) \in \ker I_\Lambda$, то для любого $\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)$ справедливо равенство

$$\sum_{\vec{n} \in \Lambda} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t) = 0,$$

из которого следует, что

$$b_{\vec{m}}(t) = - \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t), \quad u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t) \left(e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} \right),$$

и теорема полностью доказана. □

СЛЕДСТВИЕ 1. Пространство $ER_{s+1}^\alpha(T)$ разлагается в прямую сумму ядра $\ker I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ и пространства тригонометрических полиномов $P_\Lambda(T)$:

$$ER_{s+1}^\alpha(T) = \ker I_\Lambda \oplus P_\Lambda(T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любой функции $u(t, \vec{x}) \in ER_{s+1}^\alpha(T)$ имеем:

$$I_\Lambda(u(t, \vec{x})) \in P_\Lambda, \quad u(t, \vec{x}) - I_\Lambda(u(t, \vec{x})) \in \ker I_\Lambda.$$

Последнее соотношение справедливо в силу идемпотентности оператора интерполирования. $\square$

7. Оценки погрешности интерполирования

Простейшую оценку снизу погрешности интерполирования мы получим с помощью третьего гиперболического параметра решетки.

ТЕОРЕМА 12. Для любой целочисленной решетки Λ найдется функция $u(t, \vec{x}) \in ER_{s+1}^\alpha(T)$ такая, что справедлива оценка снизу погрешности интерполирования:

$$\|u(t, \vec{x}) - I_\Lambda(u(t, \vec{x}))\|_C \geq \frac{2\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)}}{(q_3(\Lambda) + 1)^\alpha}. \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению третьего гиперболического параметра целочисленной решетки Λ гиперболический крест $K(q_3(\Lambda) + 1)$ не содержится ни в какой полной системе вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ . Поэтому для любой полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ найдется $\vec{m} \notin M^*(\Lambda)$, у которого $q(\vec{m}) \leq q_3(\Lambda) + 1$. Пусть $\vec{m}' \equiv \vec{m} \pmod{\Lambda}$ и $\vec{m}' \in M^*(\Lambda)$. Тогда $\vec{0} \neq \vec{m} - \vec{m}' \in \Lambda$. Рассмотрим функцию $u(t, \vec{x}) = e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$. Для нее имеем:

$$\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)} = (q(\vec{m}))^\alpha, \quad I_\Lambda(u(t, \vec{x})) = e^{2\pi i(\vec{m}', \vec{x})}, \quad |u(t, \vec{x}) - I_\Lambda(u(t, \vec{x}))| = |e^{2\pi i(\vec{m} - \vec{m}', \vec{x})} - 1|.$$

Возьмем произвольную точку $\vec{x}_0 \in G_s$ такую, что $(\vec{m} - \vec{m}', \vec{x}_0) = \pm \frac{1}{2}$. Очевидно, что такая точка существует, тогда

$$|e^{2\pi i(\vec{m} - \vec{m}', \vec{x}_0)} - 1| = 2, \quad \|u(t, \vec{x}) - I_\Lambda(u(t, \vec{x}))\|_C = \frac{2\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)}}{(q(\vec{m}))^\alpha} \geq \frac{2\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)}}{(q_3(\Lambda) + 1)^\alpha},$$

и теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 13. Для любой целочисленной решетки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ для любой функции $u(t, \vec{x}) \in ER_{s+1}^\alpha(T)$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:

$$\|u(t, \vec{x}) - I_\Lambda(u(t, \vec{x}))\|_C \leq \frac{2\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любой полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ имеем:

$$u(t, \vec{x}) - I_\Lambda(u(t, \vec{x})) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} b_{\vec{m} + \vec{n}}(t) \left(e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \right). \quad (47)$$

Отсюда следует, что

$$\|u(t, \vec{x}) - I_\Lambda(u(t, \vec{x}))\|_C \leq 2\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{1}{(\overline{m_1 + n_1} \dots \overline{m_s + n_s})^\alpha}. \quad (48)$$

Теперь воспользуемся включением $K(q_3(\Lambda)) \subset M_H^*(\Lambda)$. Правая часть (48) только увеличится, если суммирование провести по всем целым точкам, не попавшим в гиперболический крест $K(q_3(\Lambda))$. Получим

$$\|u(t, \vec{x}) - I_\Lambda(u(t, \vec{x}))\|_C \leq 2\|u(t, \vec{x})\|_{ER_{s+1}^\alpha(T)} \sum_{\vec{m} \notin K(q_3(\Lambda))} \frac{1}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}. \quad (49)$$

Применяя к правой части (49) соотношения (19) и (27) при $q = q_3(\Lambda)$, получим утверждение теоремы. $\square$

8. Заключение

Важной проблемой, на которую будут направлены наши дальнейшие исследования, является вопрос о том, как использовать интерполяционный тригонометрический многочлен с переменными коэффициентами для численного решения начально-краевой задачи для уравнений в частных производных параболического типа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. А. Басалов, Н. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков. Многомерная Фурье-интерполяция и быстрые преобразования Фурье // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 517 (2024) С. 41–43.
2. Басалов, Ю.А., Быковский, В.А., Добровольский, Н.Н., Чубариков, В.Н., Добровольский, Н.М. Многомерная Фурье-интерполяция и трудоемкость быстрого преобразования Фурье // Чебышевский сборник, 2024, Т. 25, вып. 4, С. 42–52.
3. Бочарова Л. П., Ванькова В. С., Добровольский Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // Матем. заметки, 1991, Т. 49, №2, с. 23–28.
4. Быковский В. А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Мат. сб. 136(178). 4(8). 1988. С. 451–467.
5. С. М. Воронин, “Об интерполяционных формулах для классов полиномов Фурье”, Изв. РАН. Сер. матем., 61:4 (1997), 19–36.
6. С. М. Воронин, “Об интерполяционных формулах”, Труды МИАН, 218 (1997), 77–98.
7. И. М. Гельфанд, А. С. Фролов, Н. Н. Ченцов, Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло, Изв. вузов. Матем., 1958, номер 5, 32–45.
8. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5. Вып. 1(9). С. 82–113.
9. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решеток // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 2(4). С. 43 – 59.

10. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решеток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
11. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004, Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122–143.
12. Добровольский Н. М., Клепикова Н. Л. Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов // Препринты ИПФ АН СССР, 1990, №63, 29 с.
13. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4. Вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.
14. Коробов Н. М. Приближённое вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел. ДАН, 115, № 6, стр. 1062–1065, 1957.
15. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.
16. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
17. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.
18. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.
19. Коробов Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // Докл. АН СССР, 1982, Т. 267, №2, с. 289–292.
20. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
21. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – М.: Радиоисвязь, 1985.
22. Родионов А. В., Добровольский М. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М. Интерполяция для системы концентрических сеток // Чебышевский сборник, 2023, 24(3) С. 95–121.
23. Рябенкий В. С. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // Докл. АН СССР, 131:5 (1960), 1025–1027.
24. Hlawka E. Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatshefte für Mathematik, 66 (1962), 140–151.
25. Rader C. Discrete Fourier Transforms when the Number of Data Points is Prime // Proc. IEEE 56, 1968, pp. 1107–1108.
26. Temlyakov V. Multivariate approximation // Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., 32, Cambridge University Press, Cambridge, 2018, 550 pp.

REFERENCES

1. Basalova, Yu.A., Dobrovolskaya, N.N. & Chubarikov, V.N. 2024, “Multidimensional Fourier interpolation and fast Fourier transforms”, *Doklady Mathematics*, vol. 109, no. 1, pp. 1–5.
2. Basalov, Yu.A., Bykovskii, V.A., Dobrovolskii, N.N., Chubarikov, V.N. & Dobrovolskii, N.M. 2024, “Multidimensional Fourier interpolation and complexity of the fast Fourier transform”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 42–52.
3. Bocharova, L.P., Vankova, V.S. & Dobrovolskii, N.M. 1991, “On the calculation of optimal coefficients”, *Matematicheskie Zametki*, vol. 49, no. 2, pp. 23–28.
4. Bykovskii, V.A. 1988, “Discrete Fourier transform and cyclic convolution on integer lattices”, *Matematicheskii Sbornik*, vol. 136, no. 4, pp. 451–467.
5. Voronin, S.M. 1997, “On interpolation formulae for classes of Fourier polynomials”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 61, no. 4, pp. 699–715.
6. Voronin, S.M. 1997, “On interpolation formulas”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 218, pp. 72–93.
7. Gelfand, I.M., Frolov, A.S. & Chentsov, N.N. 1958, “Calculation of functional integrals by the Monte Carlo method”, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, no. 5, pp. 32–45.
8. Dobrovolskii, M.N. 2004, “The optimum coefficients of the combined meshes”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 5, no. 1, pp. 95–121.
9. Dobrovolskii, M.N., Dobrovolskii, N.M. & Kiseleva, O.V. 2002, “On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 3, no. 2, pp. 43–59.
10. Dobrovolskii, N.M. 1984, “The hyperbolic zeta function of lattices”, deposited at VINITI, no. 6090–84.
11. Dobrovolsky, N.M., Yesayan, A.R., Andreeva, O.V. & Zaitseva, N.V. 2004, “Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 5, no. 1, pp. 122–143.
12. Dobrovolskii, N.M. & Klepikova, N.L. 1990, “Table of optimal coefficients for approximate calculation of multiple integrals”, Institut Obshchei Fiziki AN SSSR, Moscow.
13. Dobrovolskii, N.M. & Manokhin, E.V. 1998, “Banach spaces of periodic functions”, *Izvestiya Tul'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.
14. Korobov, N.M. 1957, “Approximate evaluation of multiple integrals by using methods of the theory of numbers”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 115, no. 6, pp. 1062–1065.
15. Korobov, N.M. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.
16. Korobov, N.M. 1959, “The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients”, *Vestnik Moskovskogo Universiteta*, no. 4, pp. 19–25.
17. Korobov, N.M. 1960, “Properties and calculation of optimal coefficients”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

18. Korobov, N.M. 1963, *O teoretiko-chislovykh metodakh v priblizhennom analize* [On number-theoretic methods in approximate analysis], Mashgiz, Moscow.
19. Korobov, N.M. 1982, “On the calculation of optimal coefficients”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 267, no. 2, pp. 289–292.
20. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd edn, MTSNMO, Moscow.
21. Nussbaumer, H. 1985, *Fast Fourier transform and convolution algorithms*, Radio i Svyaz, Moscow.
22. Rodionov, A.V., Dobrovolskii, M.N., Dobrovolskii, N.N. & Dobrovolskii, N.M. 2023, “Interpolation for a system of concentric grids”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 95–121.
23. Ryabenkij, V.S. 1960, “On tables and interpolation of functions from a certain class”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 131, no. 5, pp. 1025–1027.
24. Hlawka, E. 1962, “Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale”, *Monatshefte für Mathematik*, vol. 66, pp. 140–151.
25. Rader, C.M. 1968, “Discrete Fourier transforms when the number of data points is prime”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 56, pp. 1107–1108.
26. Temlyakov, V. 2018, *Multivariate approximation*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, vol. 32, Cambridge University Press, Cambridge, 550 p.

Получено: 16.01.2026

Принято в печать: 19.05.2026