

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 517.968

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-16-28

**Глобальные теоремы существования и единственности решения
для нелинейных уравнений с интегралами дробного порядка
Римана – Лиувилля¹**

С. Н. Асхабов, М. Х. Куликова

Асхабов Султан Нажмудинович — доктор физико-математических наук, Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова (г. Грозный).

e-mail: askhabov@yandex.ru

Куликова Малика Хусаиновна — ассистент, Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова (г. Грозный).

e-mail: lika.kulikova.92@mail.ru

Аннотация

Методом монотонных (по Браудеру – Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решения для различных классов неоднородных нелинейных интегральных уравнений, в которые операторы дробного (по Риману – Лиувиллю) интегрирования входят линейно или нелинейно, либо эти операторы содержат нелинейность под знаком интеграла (уравнения типа Гаммерштейна). В последнем случае существование и единственность решения установлены без условия коэрцитивности на нелинейность. Во всех случаях важную роль играют найденные в работе условия, при которых операторы дробного интегрирования действуют непрерывно из вещественных пространства Лебега $L_p(a, b)$ в сопряженные с ними пространства и являются строго положительными. Доказанные теоремы в рамках пространства $L_2(a, b)$ охватывают соответствующие линейные уравнения с интегралами дробного порядка. Из полученных оценок, в частности, непосредственно вытекает, что при условиях доказанных теорем соответствующие однородные линейные и нелинейные интегральные уравнения имеют лишь тривиальное (нулевое) решение.

Ключевые слова: интегральные уравнения дробного порядка, монотонная нелинейность, оценки решений.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Асхабов С. Н., Куликова М. Х. Глобальные теоремы существования и единственности решения для нелинейных уравнений с интегралами дробного порядка Римана – Лиувилля // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 16–28.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 25-21-00830)

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 517.968

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-16-28

Global existence and uniqueness theorems for nonlinear equations with Riemann-Liouville integrals of fractional order

S. N. Askhabov, M. Kh. Kulikova

Askhabov Sultan Nazhmudinovich — doctor of physical and mathematical sciences, Kadyrov Chechen State University (Grozny).*e-mail: askhabov@yandex.ru***Kulikova Malika Khusainovna** — professor assistant, Kadyrov Chechen State University (Grozny).*e-mail: lika.kulikova.92@mail.ru***Abstract**

Using the method of monotone (in the sense of Browder-Minty) operators, global theorems on the existence, uniqueness, and estimates of the solution for various classes of inhomogeneous nonlinear integral equations are proved, in which the operators of fractional (in the sense of Riemann-Liouville) integration enter linearly or nonlinearly, or these operators contain nonlinearity under the sign of the integral (Gummerstein-type equations). In the latter case, the existence and uniqueness of the solution are established without the coercivity condition on the nonlinearity. In all cases, the conditions found in the work play an important role, under which the fractional integration operators act continuously from the real Lebesgue space $L_p(a, b)$ to the spaces conjugate to them and are strictly positive. The theorems proved within the framework of the space $L_2(a, b)$ cover the corresponding linear equations with integrals of fractional order. From the obtained estimates, in particular, it directly follows that under the conditions of the proved theorems, the corresponding homogeneous linear and nonlinear integral equations have only a trivial (zero) solution.

Keywords: fractional-order integral equations, monotone nonlinearity, solution estimates.*Bibliography:* 15 titles.**For citation:**

Askhabov, S. N., Kulikova, M. Kh. 2026, "Global existence and uniqueness theorems for nonlinear equations with Riemann-Liouville integrals of fractional order", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 16–28.

1. Введение. Основные определения и обозначения

В данной работе изучаются нелинейные уравнения, содержащие оператор M_β^α , являющийся линейной комбинацией операторов левостороннего и правостороннего дробного интегрирования различных порядков α и β в смысле Римана-Лиувилля на отрезке $[a, b]$ с постоянными неотрицательными коэффициентами u и v :

$$(M_\beta^\alpha \varphi)(x) = u \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\beta}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad a < x < b.$$

При $\alpha = \beta$ оператор M_β^α называют обобщенным оператором Абеля и обозначают через M^α (см. [1], [2], где дано полное исследование обобщенного уравнения Абеля $M^\alpha \varphi = f$ в некотором специальном классе H^* гильбертовских в интервале (a, b) функций, имеющих интегрируемые особенности на концах этого интервала, и получена формула, дающая все его решения). Следует отметить, что впервые обобщенное уравнение Абеля $M^\alpha \varphi = f$ на конечном отрезке было изучено в работе [3], а затем в работах [4], [5], [6] и других (история вопроса приведена в монографии [2]).

Приведем необходимые определения и обозначения. Пусть X банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и X^* сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. В частности, если X есть гильбертово пространство H , то $\langle y, x \rangle = (y, x)$, где (y, x) обозначает обычное скалярное произведение в H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор A , действующий из X в X^* , называется положительным, если для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\langle Ax, x \rangle \geq 0$. Если при этом $\langle Ax, x \rangle > 0$ при $x \neq 0$, то оператор A называется строго положительным.

В частности, если X есть вещественное пространство Лебега $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, с нормой $\|\cdot\|_p$, то $X^* = L_{p'}(a, b)$, $p' = p/(p-1)$, и для любых $\varphi \in L_p(a, b)$, $\psi \in L_{p'}(a, b)$ имеем

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx.$$

Обозначим через $\Gamma(\alpha)$ гамма-функцию Эйлера, а через $C_0^\infty[a, b]$ множество всех бесконечно дифференцируемых и финитных на отрезке $[a, b]$ функций, то есть равных нулю в окрестности концов этого отрезка. Норму линейного оператора A , действующего непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$, обозначим через $\|A\|_{p \rightarrow p'}$.

В данной работе найдены условия на заданные параметры p , α , β и коэффициенты u , v , при которых оператор M_β^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a, b)$ и является положительным (строго положительным). При этих условиях доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решения для различных классов нелинейных уравнений, содержащих оператор M_β^α . Вопрос о положительности оператора M_β^α ранее не рассматривался и нелинейные уравнения с таким оператором не изучались. В частных случаях, когда $p = 2$ и либо $u = v = 1$, либо $u = 0$ или $v = 0$, операторы дробного интегрирования и типа потенциала, получающиеся из M_β^α , подробно изучены в [7], где отмечена важная роль таких операторов в дробном исчислении и в теории дифференциальных уравнений смешанного типа.

Заметим, что линейное обобщенное уравнение Абеля на конечном отрезке $M^\alpha \varphi = f$ имеет большой круг приложений, например, в теории краевых задач для дифференциальных уравнений вырождающегося типа, в теории игр, в задачах магнитогидродинамики и задачах теории ползучести и пластичности (подробнее см. в [2]).

2. Условия положительности оператора M_β^α

Рассмотрим в вещественном пространстве Лебега $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, так называемые левосторонний и правосторонний интегралы дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$

$$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a, \quad (I_{b-}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x < b,$$

которые называют также операторами дробного интегрирования Римана-Лиувилля.

Известно, что операторы I_{a+}^α и I_{b-}^α для любого $p \geq 1$ действуют непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_p(a, b)$, причем [2]

$$\|I_{a+}^\alpha \varphi\|_p \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \|\varphi\|_p, \quad \|I_{b-}^\alpha \varphi\|_p \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \|\varphi\|_p, \quad (1)$$

для любого $\varphi \in L_p(a, b)$, и являются строго положительными в $L_2(a, b)$, т.е. для любого $\varphi \in L_2(a, b)$ выполняются соотношения [7, с. 45]:

$$(I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi) = (I_{b-}^\alpha \varphi, \varphi) \geq 0 \quad \text{и} \quad (I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi) = (I_{b-}^\alpha \varphi, \varphi) > 0 \quad \text{при} \quad \varphi \neq 0. \quad (2)$$

Наша цель – найти условия на параметр p и коэффициенты u и v при которых обобщенный оператор Абеля M^α действует непрерывно из пространства $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a, b)$, $p' = p/(p-1)$, непрерывен и является положительным (строго положительным).

ЛЕММА 1. Если $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ и $p \geq 2$, то оператор M_β^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a, b)$ и является положительным (строго положительными, если $u > 0$ или $v > 0$), при этом для любого $\varphi \in L_p(a, b)$ выполняются неравенства:

$$\|M_\beta^\alpha \varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{(p-2)/p} \left[\frac{u \cdot (b-a)^\alpha}{\alpha} + \frac{v \cdot (b-a)^\beta}{\beta} \right] \cdot \|\varphi\|_p, \quad (3)$$

$$\langle M_\beta^\alpha \varphi, \varphi \rangle \geq 0 \quad \text{и} \quad \langle M_\beta^\alpha \varphi, \varphi \rangle > 0 \quad \text{при} \quad \varphi \neq 0, \quad \text{если} \quad u > 0 \quad \text{или} \quad v > 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in L_p(a, b)$ и $p \geq 2$. Заметим, что

$$M_\beta^\alpha \varphi = \Gamma(\alpha) \cdot u \cdot I_{a+}^\alpha \varphi + \Gamma(\beta) \cdot v \cdot I_{b-}^\beta \varphi. \quad (5)$$

Покажем сначала, что оператор дробного интегрирования I_{a+}^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ и является строго положительными. Так как, в силу интегрального неравенства Гельдера,

$$\|\varphi\|_2 \leq (b-a)^{(p-2)/(2p)} \|\varphi\|_p, \quad \|\varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{(p-2)/(2p)} \|\varphi\|_2, \quad (6)$$

то имеют место непрерывные вложения

$$L_p(a, b) \subset L_2(a, b) \subset L_{p'}(a, b). \quad (7)$$

Поскольку $\varphi \in L_p(a, b)$, то в силу первого вложения из (7) и первой оценки из (1) имеем, что $\varphi \in L_2(a, b)$ и $I_{a+}^\alpha \varphi \in L_2(a, b)$. Но тогда, в силу второго вложения из (7), тем более $I_{a+}^\alpha \varphi \in L_{p'}(a, b)$. Поэтому, используя первую оценку из (1) и неравенства (6), непосредственно получаем

$$\|I_{a+}^\alpha \varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{(p-2)/(2p)} \|I_{a+}^\alpha \varphi\|_2 \leq (b-a)^{(p-2)/(2p)} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \|\varphi\|_2 \leq \frac{(b-a)^{\alpha+(p-2)/p}}{\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \|\varphi\|_p, \quad (8)$$

то есть оператор I_{a+}^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$.

Далее, так как для любого $\varphi \in L_p(a, b)$, как показано выше, в силу вложений (7), имеем, что $\varphi \in L_2(a, b)$ и $I_{a+}^\alpha \varphi \in L_2(a, b)$, то, используя неравенства (2), получаем

$$\langle I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \rangle = (I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi) \geq 0 \quad \text{и} \quad \langle I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \rangle > 0 \quad \text{при} \quad \varphi \neq 0, \quad (9)$$

то есть оператор I_{a+}^α является строго положительным.

Рассмотрим теперь оператор I_{b-}^β . Используя вторую оценку из (1) при $\alpha = \beta$ и неравенство (6), имеем

$$\|I_{b-}^\beta \varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{(p-2)/(2p)} \|I_{b-}^\beta \varphi\|_2 \leq (b-a)^{(p-2)/(2p)} \frac{(b-a)^\beta}{\beta \cdot \Gamma(\beta)} \|\varphi\|_2 \leq \frac{(b-a)^{\beta+(p-2)/p}}{\beta \cdot \Gamma(\beta)} \|\varphi\|_p. \quad (10)$$

Кроме того, используя как и выше неравенства (2), для любого $\varphi \in L_p(a, b)$ получаем:

$$\langle I_{b-}^\beta \varphi, \varphi \rangle \geq 0 \quad \text{и} \quad \langle I_{b-}^\beta \varphi, \varphi \rangle > 0 \quad \text{при} \quad \varphi \neq 0, \quad (11)$$

то есть оператор I_{b-}^β является строго положительным.

Рассмотрим, наконец, оператор M_β^α . Используя равенство (5), оценки (8) и (10), в силу интегрального неравенства Минковского, для любого $\varphi \in L_p(a, b)$ имеем

$$\begin{aligned} \|M_\beta^\alpha \varphi\|_{p'} &\leq \Gamma(\alpha) \cdot u \cdot \|I_{a+}^\alpha \varphi\|_{p'} + \Gamma(\beta) \cdot v \cdot \|I_{b-}^\beta \varphi\|_{p'} \leq \\ &\leq (b-a)^{(p-2)/p} \left[\frac{u \cdot (b-a)^\alpha}{\alpha} + \frac{v \cdot (b-a)^\beta}{\beta} \right] \cdot \|\varphi\|_p, \end{aligned}$$

то есть оператор M_β^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ и выполняется неравенство (3). Осталось доказать положительность оператора M_β^α . В силу равенства (5) и неравенств (9) и (11), для любого $\varphi \in L_p(a, b)$ имеем

$$\langle M_\beta^\alpha \varphi, \varphi \rangle = \Gamma(\alpha) u \langle I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \rangle + \Gamma(\beta) v \langle I_{b-}^\beta \varphi, \varphi \rangle \geq 0,$$

причем $\langle M_\beta^\alpha \varphi, \varphi \rangle > 0$ при $\varphi \neq 0$, если $u > 0$, либо $v > 0$, то есть выполняются неравенства (4). Таким образом, утверждения леммы о положительности и строгой положительности оператора M_β^α доказаны. $\square$

В лемме 1 предполагается, что $p \geq 2$. Возникает вопрос: можно ли доказать аналогичную лемму в случае $p < 2$? Чтобы ответить на этот вопрос воспользуемся леммой, подробно доказанной в [8, лемма 1].

ЛЕММА 2. Если $0 < \alpha < 1$, то операторы I_{a+}^α и I_{b-}^α действуют непрерывно из $L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$ и являются строго положительными, причем $\forall \varphi \in L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$ выполняются неравенства:

$$\|I_{a+}^\alpha \varphi\|_{2/(1-\alpha)} \leq n(\alpha) \cdot \|\varphi\|_{2/(1+\alpha)}, \quad \|I_{b-}^\alpha \varphi\|_{2/(1-\alpha)} \leq n(\alpha) \cdot \|\varphi\|_{2/(1+\alpha)}, \quad (12)$$

где $n(\alpha) = \|I_{a+}^\alpha\|_{p \rightarrow p'} = \|I_{b-}^\alpha\|_{p \rightarrow p'}$ при $p = 2/(1+\alpha)$.

Обратим внимание, что в следующей лемме, в отличие от леммы 1, предполагается, что $p < 2$.

ЛЕММА 3. Пусть $0 < \alpha \leq \beta < 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ и $2/(1+\alpha) \leq p < 2$. Тогда оператор M_β^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a, b)$ и положителен (строго положителен, если $u > 0$ или $v > 0$). При этом для любого $\varphi \in L_p(a, b)$ выполняется неравенство:

$$\|M_\beta^\alpha \varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot \left[u \cdot \Gamma(\alpha) \cdot n(\alpha) + v \cdot \Gamma(\beta) \cdot n(\beta) \cdot (b-a)^{\beta-\alpha} \right] \cdot \|\varphi\|_p. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отдельно два случая: $p = 2/(1+\alpha)$ и $2/(1+\alpha) < p < 2$.

1). Пусть $p = 2/(1+\alpha)$ и $\varphi \in L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$. Так как $\alpha \leq \beta$, то выполняются неравенства

$$\frac{2}{1+\beta} \leq \frac{2}{1+\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{2}{1-\alpha} \leq \frac{2}{1-\beta}. \quad (14)$$

Применяя неравенство Гельдера с использованием первого неравенства из (14), имеем

$$\|\varphi\|_{2/(1+\beta)} \leq (b-a)^{(\beta-\alpha)/2} \|\varphi\|_{2/(1+\alpha)}, \quad (15)$$

то есть $\varphi \in L_{2/(1+\beta)}(a, b)$.

Из леммы 2 следует, что $I_{a+}^\alpha \varphi \in L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$ и

$$\|I_{a+}^\alpha \varphi\|_{2/(1-\alpha)} \leq n(\alpha) \cdot \|\varphi\|_{2/(1+\alpha)}. \quad (16)$$

Покажем, что $I_{b-}^\beta \varphi \in L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$ для любого $\varphi \in L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$. Так как, в силу неравенства (15), $\varphi \in L_{2/(1+\beta)}(a, b)$, то по лемме 2 имеем, что $I_{b-}^\beta \varphi \in L_{2/(1-\beta)}(a, b)$. В силу второго неравенства из (14), имеет место непрерывное вложение $L_{2/(1-\beta)}(a, b) \subset L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$, поскольку для любого $\psi \in L_{2/(1-\beta)}(a, b)$ выполняется неравенство:

$$\|\psi\|_{2/(1-\alpha)} \leq (b-a)^{(\beta-\alpha)/2} \|\psi\|_{2/(1-\beta)}. \quad (17)$$

Значит, тем более, $I_{b-}^\beta \varphi \in L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$, причем, в силу второго неравенства из (12) (с заменой α на β) и оценки (15), из неравенства (17) получаем:

$$\|I_{b-}^\beta \varphi\|_{2/(1-\alpha)} \leq (b-a)^{(\beta-\alpha)/2} n(\beta) \cdot \|\varphi\|_{2/(1+\beta)} \leq (b-a)^{\beta-\alpha} n(\beta) \cdot \|\varphi\|_{2/(1+\alpha)}, \quad (18)$$

то есть оператор I_{b-}^β действует непрерывно из $L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$.

Рассмотрим теперь оператор M_β^α . Используя равенство (5), неравенства (16) и (18), для любого $\varphi \in L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$, имеем

$$\begin{aligned} \|M_\beta^\alpha \varphi\|_{2/(1-\alpha)} &\leq \Gamma(\alpha) \cdot u \cdot \|I_{a+}^\alpha \varphi\|_{2/(1-\alpha)} + \Gamma(\beta) \cdot v \cdot \|I_{b-}^\beta \varphi\|_{2/(1-\alpha)} \leq \\ &\leq \left[u \cdot \Gamma(\alpha) \cdot n(\alpha) + v \cdot \Gamma(\beta) \cdot n(\beta) \cdot (b-a)^{\beta-\alpha} \right] \cdot \|\varphi\|_{2/(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Значит, оператор M_β^α действует непрерывно из $L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$ и выполняется неравенство (13) при $p = 2/(1+\alpha)$.

Осталось доказать положительность оператора M_β^α . Так как, в силу равенства (5),

$$\langle M_\beta^\alpha \varphi, \varphi \rangle = u \cdot \Gamma(\alpha) \langle I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \rangle + v \cdot \Gamma(\beta) \langle I_{b-}^\beta \varphi, \varphi \rangle, \quad (19)$$

то, применяя лемму 2, получаем, что оператор M_β^α является положительным (строго положительным, если $u > 0$ или $v > 0$).

2). Пусть $2/(1+\alpha) < p < 2$ и $\varphi \in L_p(a, b)$. Так как $p > 2/(1+\alpha)$, то для $p' = p/(p-1)$ выполняется равносильное неравенство $p' < 2/(1-\alpha)$. Поэтому имеют место непрерывные вложения:

$$L_p(a, b) \subset L_{2/(1+\alpha)}(a, b) \quad \text{и} \quad L_{2/(1-\alpha)}(a, b) \subset L_{p'}(a, b), \quad (20)$$

поскольку выполняются неравенства:

$$\|\varphi\|_{2/(1+\alpha)} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|\varphi\|_p \quad \forall \varphi \in L_p(a, b), \quad (21)$$

$$\|\varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|\varphi\|_{2/(1-\alpha)} \quad \forall \varphi \in L_{2/(1-\alpha)}(a, b). \quad (22)$$

В силу первого вложения из (20), имеем, что $\varphi \in L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$. Но тогда, по лемме 2, $I_{a+}^\alpha \varphi \in L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$ и более того, в силу второго вложения из (20), $I_{a+}^\alpha \varphi \in L_{p'}(a, b)$. Поэтому, используя неравенства (12) и (21), из (22) получаем

$$\|I_{a+}^\alpha \varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|I_{a+}^\alpha \varphi\|_{2/(1-\alpha)} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} n(\alpha) \|\varphi\|_{2/(1+\alpha)} \leq$$

$$\leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} n(\alpha) \|\varphi\|_p,$$

то есть выполняется неравенство

$$\|I_{a+}^\alpha \varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|\varphi\|_p \quad \forall \varphi \in L_p(a, b), \quad (23)$$

где число $n(\alpha)$ определено в лемме 2.

Покажем, что $I_{b-}^\beta \varphi \in L_{p'}(a, b)$ для любого $\varphi \in L_p(a, b)$. Из неравенства (21) следует, что $\varphi \in L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$. Но тогда, в силу неравенства (15), $\varphi \in L_{2/(1+\beta)}(a, b)$ и значит, в силу второго неравенства из (12) (с заменой α на β), $I_{b-}^\beta \varphi \in L_{2/(1-\beta)}(a, b)$. Поскольку, в силу второго неравенства из (14) и второго вложения из (19), $L_{2/(1-\beta)}(a, b) \subset L_{2/(1-\alpha)}(a, b) \subset L_{p'}(a, b)$, то тем более $I_{b-}^\beta \varphi \in L_{p'}(a, b)$ для любого $\varphi \in L_p(a, b)$.

Используя последовательно неравенства (22), (17), (12) с заменой α на β , (15) и (21), получаем

$$\begin{aligned} \|I_{b-}^\beta \varphi\|_{p'} &\leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|I_{b-}^\beta \varphi\|_{2/(1-\alpha)} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} (b-a)^{(\beta-\alpha)/2} \|I_{b-}^\beta \varphi\|_{2/(1-\beta)} \leq \\ &\leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} (b-a)^{(\beta-\alpha)/2} n(\beta) \|\varphi\|_{2/(1+\beta)} \leq \\ &\leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} (b-a)^{\beta-\alpha} n(\beta) \|\varphi\|_{2/(1+\alpha)} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} (b-a)^{\beta-\alpha} n(\beta) \|\varphi\|_p, \end{aligned}$$

то есть

$$\|I_{b-}^\beta \varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} (b-a)^{\beta-\alpha} n(\beta) \|\varphi\|_p. \quad (24)$$

Значит, оператор I_{b-}^β действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$.

Используя равенство (5), оценки (23) и (24), имеем

$$\begin{aligned} \|M_\beta^\alpha \varphi\|_{p'} &\leq \Gamma(\alpha) \cdot u \cdot \|I_{a+}^\alpha \varphi\|_{p'} + \Gamma(\beta) \cdot v \cdot \|I_{b-}^\beta \varphi\|_{p'} \leq \\ &\leq \left[u \cdot \Gamma(\alpha) \cdot n(\alpha) \cdot (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} + v \cdot \Gamma(\beta) \cdot n(\beta) \cdot (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} (b-a)^{\beta-\alpha} \right] \cdot \|\varphi\|_p. \end{aligned}$$

Значит, оператор M_β^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ и выполняется неравенство (13).

Покажем, что операторы I_{a+}^α и I_{b-}^β являются строго положительными. Пусть $\varphi \in C_0^\infty[a, b]$ есть произвольная функция. Рассмотрим равенство

$$\langle I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \rangle = \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right) \varphi(x) dx. \quad (25)$$

Используя формулу дробного интегрирования по частям (2.20) из [2], имеем

$$\langle I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \rangle = \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \right) \varphi(x) dx = \langle I_{b-}^\alpha \varphi, \varphi \rangle. \quad (26)$$

Сложив равенства (25) и (26), получим

$$2\langle I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \rangle = \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{1-\alpha}} \right) \varphi(x) dx = \langle I^\alpha \varphi, \varphi \rangle, \quad (27)$$

где I^α есть оператор типа потенциала:

$$(I^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{1-\alpha}}.$$

Известно (см., например, [2, с. 235], теорема Трикоми, или [7, с. 35]), что оператор типа потенциала I^α является строго положительным в $L_2(a, b)$. Поэтому из равенства (27) следует, что

$$\langle I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a, b] \quad \text{и} \quad \langle I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \rangle > 0 \quad \text{при} \quad \varphi \neq 0. \quad (28)$$

Так как множество $C_0^\infty[a, b]$ всюду плотно в $L_p(a, b)$ и $\langle I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \rangle$, в силу неравенства Гельдера и неравенства (23), есть непрерывный в $L_p(a, b)$ функционал, то по теореме Банаха неравенства (28) справедливы и для любого $\varphi \in L_p(a, b)$. Следовательно, I_{a+}^α есть строго положительный оператор в $L_p(a, b)$. Но тогда из равенства (26) следует, что I_{b-}^α также является строго положительным оператором.

Аналогично, заменив α в (24), (25) и (26) на β , получаем, что I_{a+}^β и I_{b-}^β являются строго положительными операторами.

Следовательно, в силу равенства (19), оператор M_β^α является положительным (строго положительным, если $u > 0$ или $v > 0$).

Лемма 3 полностью доказана. $\square$

Объединив леммы 1 и 3, получаем следующую основную теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \alpha \leq \beta < 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ и $2/(1 + \alpha) \leq p < \infty$. Тогда оператор M_β^α действует непрерывно из пространства $L_p(a, b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a, b)$ и является положительным (строго положительным, если $u > 0$ или $v > 0$), при этом для любого $\varphi \in L_p(a, b)$ выполняется неравенство:

$$\|M_\beta^\alpha \varphi\|_{p'} \leq C_1 \cdot \|\varphi\|_p,$$

где

$$C_1 = \begin{cases} (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot [u \Gamma(\alpha) n(\alpha) + v \Gamma(\beta) n(\beta) (b-a)^{\beta-\alpha}], & \text{если } 2/(1+\alpha) \leq p < 2, \\ (b-a)^{(p-2)/p} \cdot [u (b-a)^\alpha \alpha^{-1} + v (b-a)^\beta \beta^{-1}], & \text{если } p \geq 2. \end{cases}$$

В теореме 1 предполагается, что $\alpha \leq \beta$. В случае $\alpha \geq \beta$ аналогично доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \beta \leq \alpha < 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ и $2/(1 + \beta) \leq p < \infty$. Тогда оператор M_β^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ и является положительным (строго положительным, если $u > 0$ или $v > 0$), при этом для любого $\varphi \in L_p(a, b)$ выполняется неравенство:

$$\|M_\beta^\alpha \varphi\|_{p'} \leq C_2 \cdot \|\varphi\|_p,$$

где

$$C_2 = \begin{cases} (b-a)^{[p(1+\beta)-2]/p} \cdot [u \Gamma(\alpha) n(\alpha) (b-a)^{\alpha-\beta} + v \Gamma(\beta) n(\beta)], & \text{если } 2/(1+\beta) \leq p < 2, \\ (b-a)^{(p-2)/p} \cdot [u (b-a)^\alpha \alpha^{-1} + v (b-a)^\beta \beta^{-1}], & \text{если } p \geq 2. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2 в случае $p \geq 2$ использует лемму 1, а в случае $2/(1 + \beta) \leq p < 2$ использует непрерывные вложения

$$L_{2/(1-\alpha)}(a, b) \subset L_{2/(1-\beta)}(a, b) \subset L_{p'}(a, b), \quad L_p(a, b) \subset L_{2/(1+\beta)}(a, b) \subset L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$$

и оценки

$$\|I_{a+}^\alpha \varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\beta)-2]/p} (b-a)^{\alpha-\beta} n(\alpha) \|\varphi\|_p, \quad \|I_{b-}^\beta \varphi\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\beta)-2]/p} n(\beta) \|\varphi\|_p.$$

Напомним, что в теоремах 1 и 2, в соответствии с леммой 2, $n(\alpha) = \|I_{a+}^\alpha\|_{p \rightarrow p'} = \|I_{b-}^\alpha\|_{p \rightarrow p'}$ при $p = 2/(1 + \alpha)$ и $n(\beta) = \|I_{a+}^\beta\|_{p \rightarrow p'} = \|I_{b-}^\beta\|_{p \rightarrow p'}$ при $p = 2/(1 + \beta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как неравенство $2/(1 + \alpha) \leq p'$ равносильно неравенству $p \leq 2/(1 - \alpha)$, то из теоремы 1 следует, что при $1 < p \leq 2/(1 - \alpha)$ оператор M_β^α действует непрерывно из сопряженного пространства $L_{p'}(a, b)$ в исходное пространство $L_p(a, b)$ и положителен (строго положителен, если $u > 0$ или $v > 0$).

3. Глобальные теоремы существования и единственности

При исследовании нелинейных сингулярных (со слабой или сильной особенностью в ядре) интегральных уравнений часто предполагается (см., например, [9]), что нелинейность удовлетворяет условию Липшица, а параметр λ перед ней является достаточно малым по модулю. Кроме того, иногда на область существования решений также накладываются дополнительные ограничения. В результате при этих условиях получают локальные теоремы существования и единственности решения, основанные на применении принципов Банаха, Шаудера или теоремы о неявной функции, а также методов Ньютона-Канторовича, осреднения функциональных поправок (метод Ю.Д. Соколова) и некоторых их модификаций.

В данном пункте, без ограничений на параметр $\lambda > 0$ и область существования решений, при достаточно легко обозримых условиях на нелинейность методом монотонных (см., например, [10]) по Браудеру-Минти операторов доказываются глобальные теоремы об однозначной разрешимости для различных классов нелинейных уравнений, содержащих оператор M_β^α . При этом не требуется, чтобы нелинейность удовлетворяла весьма ограничительному условию Липшица. Всюду ниже предполагается, что функция $F(x, t)$, определяющая нелинейность рассматриваемых уравнений, определена при $x \in [a, b]$, $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x почти при каждом фиксированном t и почти при всех x непрерывна по t . Обозначим через F оператор суперпозиции (оператор Немыцкого) $Fu = F[x, u(x)]$, порожденный этой функцией $F(x, t)$, а через $L_p^+(a, b)$ – множество всех неотрицательных функций из $L_p(a, b)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < \alpha \leq \beta < 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ и $2/(1 + \alpha) \leq p < \infty$. Если для почти всех $x \in [a, b]$ и всех $t \in \mathbb{R}$ нелинейность $F(x, t)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $|F(x, t)| \leq c(x) + d_1 |t|^{p-1}$, где $c \in L_{p'}^+(a, b)$, $d_1 > 0$;
- 2) $F(x, t)$ не убывает по t почти при каждом фиксированном x ;
- 3) $F(x, t) \cdot t \geq d_2 |t|^p - D(x)$, где $D \in L_1^+(a, b)$, $d_2 > 0$;

то при любых $\lambda > 0$ и $f \in L_{p'}(a, b)$ уравнение $\lambda \cdot F\varphi + M_\beta^\alpha \varphi = f$ имеет решение $\varphi^* \in L_p(a, b)$. Это решение φ^* единственно, если функция $F(x, t)$ строго возрастает по t или если $u \geq 0$, либо $v \geq 0$. Кроме того, если условие 3) выполнено при $D(x) = 0$, то справедлива оценка:

$$\|\varphi^*\|_p \leq (\lambda^{-1} d_2^{-1} \|f\|_{p'})^{1/(p-1)}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем данное уравнение в операторном виде: $A\varphi = f$, где $A = \lambda \cdot F + M_\beta^\alpha$. Из условий 1)–3) вытекает, что оператор суперпозиции F действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ монотонен и коэрцитивен. В силу теоремы 1 оператор M_β^α также действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ и положителен. Поэтому оператор A действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$, монотонен и коэрцитивен. Значит, по теореме 2.1 (Браудера-Минти) [10], уравнение $A\varphi = f$, а с ним и данное уравнение, имеет решение $\varphi^* \in L_p(a, b)$. Это решение φ^* единственно, если в условии 2) функция $F(x, t)$ строго возрастает по t или если $u \geq 0$ либо $v \geq 0$, так как в этих случаях оператор A является строго монотонным.

Осталось доказать оценку (29). Так как $A\varphi^* = f$, то используя последовательно условие 3) при $D(x) = 0$, положительность оператора M_β^α и неравенство Гельдера, имеем

$$\lambda d_2 \cdot \|\varphi^*\|_p^p \leq \lambda \langle F\varphi^*, \varphi^* \rangle \leq \lambda \langle F\varphi^*, \varphi^* \rangle + \langle M_\beta^\alpha \varphi^*, \varphi^* \rangle = \langle A\varphi^*, \varphi^* \rangle = \langle f, \varphi^* \rangle \leq \|f\|_{p'} \cdot \|\varphi^*\|_p,$$

откуда легко получаем оценку (29). $\square$

Рассмотрим теперь другой класс нелинейных интегральных уравнений, соответствующий случаю когда нелинейность находится под знаком интеграла (так называемое уравнение типа Гаммерштейна). В данном случае применить непосредственно теорему Браудера-Минти нельзя, поскольку произведение монотонных операторов не является, вообще говоря, монотонным

оператором и поэтому требуется другой подход к исследованию таких классов уравнений. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < \alpha \leq \beta < 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ и $1 < p \leq 2/(1 - \alpha)$. Если $F(x, t)$ удовлетворяет условиям 1), 3) теоремы 3 и строго возрастает по t , то уравнение $\varphi + \lambda \cdot M_\beta^\alpha F\varphi = f$ имеет единственное решение $u^* \in L_p(a, b)$ при любых $\lambda > 0$ и $f \in L_p(a, b)$. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка:

$$\|\varphi^*\|_p \leq d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_p. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы следует, что оператор F отображает $L_p(a, b)$ на $L_{p'}(a, b)$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Поэтому, в силу леммы 2.1 [11], существует обратный оператор F^{-1} , отображающий $L_{p'}(a, b)$ на $L_p(a, b)$, хеминепрерывный, строго монотонный и такой, что

$$\lim_{\|v\|_{p'} \rightarrow \infty} \frac{\langle F^{-1}v, v \rangle}{\|v\|_{p'}} = \infty.$$

Поэтому, с учетом замечания 1 имеем, что оператор $A = F^{-1} + \lambda M_\beta^\alpha$ удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера-Минти. Значит, уравнение $F^{-1}v + \lambda M_\beta^\alpha v = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_{p'}(a, b)$. Но тогда $\varphi^* = F^{-1}v^* \in L_p(a, b)$ является решением уравнения $\varphi + \lambda M_\beta^\alpha F\varphi = f$, т.е. данного уравнения. В самом деле, так как $F^{-1}v^* + \lambda M_\beta^\alpha v^* = f$, то, в силу доказанного в лемме 2.1 [11, с. 21] равенства $F F^{-1}\psi = \psi \quad \forall \psi \in L_{p'}(a, b)$, имеем

$$\varphi^* + \lambda M_\beta^\alpha F\varphi^* = F^{-1}v^* + \lambda M_\beta^\alpha F F^{-1}v^* = F^{-1}v^* + \lambda M_\beta^\alpha v^* = f. \quad (31)$$

Докажем единственность решения φ^* . В самом деле, если допустить противное, что данное уравнение имеет два различных решения φ_1 и φ_2 , т.е. $\varphi_1 + \lambda M_\beta^\alpha F\varphi_1 = f$ и $\varphi_2 + W_{a+}^\alpha F\varphi_2 = f$, то придем к противоречию:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi_1 + \lambda M_\beta^\alpha F\varphi_1 - \varphi_2 - \lambda M_\beta^\alpha F\varphi_2, F\varphi_1 - F\varphi_2 \rangle = \\ &= \langle \varphi_1 - \varphi_2, F\varphi_1 - F\varphi_2 \rangle + \langle \lambda M_\beta^\alpha (F\varphi_1 - F\varphi_2), F\varphi_1 - F\varphi_2 \rangle > 0 \end{aligned}$$

так как в силу строгого возрастания функции $F(x, t)$ по t и замечания 1, первое слагаемое в правой части строго положительно, а второе неотрицательно.

Осталось доказать оценку нормы решения. Используя условия 1) и 3) (с учетом, что $c(x) = D(x) = 0$), положительность оператора M_β^α , равенство (31) и неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} d_2 \|\varphi^*\|_p^p &\leq \langle \varphi^*, F\varphi^* \rangle \leq \langle \varphi^*, F\varphi^* \rangle + \langle \lambda M_\beta^\alpha F\varphi^*, F\varphi^* \rangle = \\ &= \langle f, F\varphi^* \rangle \leq \|f\|_p \|F\varphi^*\|_{p'} \leq d_1 \|f\|_p \|\varphi^*\|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

откуда легко получаем доказываемую оценку. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя результаты работы Х. Брезиса и Ф. Браудера [12] (см. также теорему 3.2 [13] и комментарии после неё), существование и единственность решения в теореме 4 (без оценки нормы решения) можно доказать при условиях 1) и 2), не предполагая выполнения условия коэрцитивности 3).

Рассмотрим, наконец, класс нелинейных интегральных уравнений, соответствующий случаю когда оператор дробного интегрирования входит в уравнение нелинейно. Обратим внимание на то, что в этом случае ограничения на нелинейность подбираются таким образом, чтобы соответствующий оператор суперпозиции (оператор Немыцкого) действовал непрерывно из сопряженного пространства $L_{p'}(a, b)$ в исходное пространство $L_p(a, b)$, в котором разыскиваются решения, и был строго монотонным и коэрцитивным.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < \alpha \leq \beta < 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ и $2/(1+\alpha) \leq p < \infty$. Если для почти всех $x \in [a, b]$ и всех $t \in \mathbb{R}$ нелинейность $F(x, t)$ удовлетворяет условиям:

4) $|F(x, t)| \leq g(x) + d_3 \cdot |t|^{1/(p-1)}$, где $g \in L_p^+(a, b)$, $d_3 > 0$;

5) $F(x, t)$ строго возрастает по t почти при каждом фиксированном x ;

6) $F(x, t) \cdot t \geq d_4 \cdot |t|^{p/(p-1)} - D(x)$, где $D \in L_1^+(a, b)$, $d_4 > 0$;

то уравнение $\varphi + \lambda \cdot F M_\beta^\alpha \varphi = f$ имеет единственное решение $\varphi^* \in L_p(a, b)$ при любых $\lambda > 0$ и $f \in L_p(a, b)$. Кроме того, если в условиях 4) и 6) $g(x) = 0$ и $D(x) = 0$, то:

$$\|\varphi^* - f\|_p \leq \lambda \cdot \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot C_1 \cdot \|f\|_p \right]^{1/(p-1)}, \quad (32)$$

где число $C_1 > 0$ определено в теореме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 и условий 4)–6) вытекает, соответственно, что оператор M_β^α действует из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ непрерывен и строго положителен, а оператор F действует обратно из $L_{p'}(a, b)$ в $L_p(a, b)$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по лемме 2.1 [11], существует хеминепрерывный, строго монотонный обратный оператор F^{-1} , действующий из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$, и выполняется условие коэрцитивности (2.1a) [11, с. 20]. Положив в данном уравнении $\varphi = f - \lambda \cdot v$ приходим к уравнению $F M_\beta^\alpha (f - \lambda \cdot v) = v$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1} , получаем уравнение:

$$\Phi v = 0, \quad \text{где } \Phi v \equiv F^{-1}v + \lambda M_\beta^\alpha v - M_\beta^\alpha f. \quad (27)$$

Очевидно, что оператор Φ действует из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен, поскольку

$$\lim_{\|v\|_p \rightarrow \infty} \frac{\langle \Phi v, v \rangle}{\|v\|_p} = \infty.$$

Значит, оператор Φ удовлетворяет всем требованиям теоремы Браудера-Минти. Поэтому уравнение (33) имеет единственное решение $v^* \in L_p(a, b)$. Но тогда данное уравнение имеет решение $\varphi^* = f - \lambda v^* \in L_p(a, b)$. Покажем, что это решение единственно. Допустим противное, что данное уравнение имеет два разных решения φ_1 и φ_2 , т.е. $\varphi_1 + \lambda F M_\beta^\alpha \varphi_1 = f$ и $\varphi_2 + \lambda F M_\beta^\alpha \varphi_2 = f$. Тогда приходим к противоречию:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi_1 + \lambda F M_\beta^\alpha \varphi_1 - \varphi_2 - \lambda F M_\beta^\alpha \varphi_2, M_\beta^\alpha \varphi_1 - M_\beta^\alpha \varphi_2 \rangle = \\ &= \langle \varphi_1 - \varphi_2, M_\beta^\alpha (\varphi_1 - \varphi_2) \rangle + \langle \lambda F M_\beta^\alpha \varphi_1 - F M_\beta^\alpha \varphi_2, M_\beta^\alpha \varphi_1 - M_\beta^\alpha \varphi_2 \rangle > 0 \end{aligned}$$

так как в силу положительности оператора M_β^α и строгого возрастания функции $F(x, t)$ по t , первое слагаемое в правой части неотрицательно, а второе строго положительно.

Осталось доказать оценку (30). Воспользуемся равенством $\varphi^* + F M_\beta^\alpha \varphi^* = f$ и равенством (33), из которого следует, что $F^{-1}v^* + \lambda M_\beta^\alpha v^* = M_\beta^\alpha f$, где $\varphi^* = f - \lambda v^*$. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Используя условия 4) и 6) (с учетом, что $g(x) = D(x) = 0$), положительность оператора M_β^α , теорему 1 и неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} d_4 \cdot \|\psi\|_{p'}^{p'} &\leq \langle F\psi, \psi \rangle = \langle v^*, F^{-1}v^* \rangle \leq \langle v^*, F^{-1}v^* \rangle + \langle v^*, \lambda M_\beta^\alpha v^* \rangle = \langle v^*, M_\beta^\alpha f \rangle \leq \\ &\leq \|v^*\|_p \cdot \|M_\beta^\alpha f\|_{p'} \leq \|v^*\|_p \cdot C_1 \cdot \|f\|_p = C_1 \cdot \|f\|_p \cdot \|F\psi\|_p \leq C_1 \cdot \|f\|_p \cdot d_3 \cdot \|\psi\|_{p'}^{p'-1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|\psi\|_{p'} \leq d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot C_1 \cdot \|f\|_p. \quad (34)$$

Так как

$$\|f - \varphi^*\|_p = \lambda \|v^*\|_p = \lambda \|F\psi\|_p \leq \lambda d_3 \cdot \|\psi\|_{p'}^{p'-1},$$

то, используя оценку (34) с учетом, что $p' - 1 = 1/(p - 1)$, получаем

$$\|\varphi^* - f\|_p \leq \lambda d_3 \cdot \left[d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot C_1 \cdot \|f\|_p \right]^{1/(p-1)}$$

- что и требовалось доказать. $\square$

Легко видеть, что при условиях теорем 3–5 из оценок (29), (30) и (32) непосредственно вытекает, что соответствующие однородные уравнения имеют лишь тривиальное (нулевое) решение $\varphi^*(x) = 0$.

Используя теорему 2, вместо теоремы 1, аналоги теорем 3–5 можно доказать и в случае $\beta \leq \alpha$.

В заключение отметим, что в рамках пространства $L_2(a, b)$ теоремы 3–5 охватывают и соответствующие линейные уравнения. Кроме того, следуя работам [14], [15], комбинированием метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений, можно доказать, что решения уравнений, приведенных в теоремах 3–5, можно найти в пространстве $L_2(a, b)$ методом последовательных приближений пикаровского типа и получить оценки скорости их сходимости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи (М.: Наука, 1977).
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications (Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 1993).
3. Zeilon N. Sur quelques points de la theorie de l'equation integree d'Abel // Arkiv. för Mat., Astr. och Fysik. 1924. Vol. 18, №5. P. 1-19.
4. Сакалюк К. Д. Обобщенное интегральное уравнение Абеля // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, №4. С. 748-751.
5. Wolfersdorf L. v. Zur Losung der Verallgemeinerten Abelschen Integralgleichung mit Konstanten Koeffizienten // Z. angew. Math. und Mech. 1969. Vol. 49, №12. P. 759-761.
6. Самко С. Г. Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176, №5. С. 1019-1022.
7. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение (М.: Физматлит, 2003).
8. Асхабов С. Н. Интегральные уравнения дробного порядка с переменным внешним коэффициентом и монотонной нелинейностью // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, №3. С. 44–57.
9. Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений (М.: Наука, 1980).
10. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentiale (Berlin: Akademie-Verlag, 1974).
11. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки (М.: Физматлит, 2009).
12. Brezis H., Browder F. E. Some new results about Hammerstein equations // Bull. Am. Math. Soc. 1974. Vol. 80. P. 567-572.

13. Askhabov S. N. Nonlinear itegral equations with potential-type kernels on a segment // *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. Vol. 235, №4. P. 375-391.
14. Асхабов С. Н. Приближенное решение нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала // *Уфимский математический журнал*. 2011. Т. 3, №4. С. 8-13.
15. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега // *Математические заметки*. 2015. Т. 97, №5. С. 643-654.

REFERENCES

1. Gakhov F. D. Boundary Value Problems [Kraevyye zadachi] (Moscow: Nauka, 1977).
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications (Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 1993).
3. Zeilon N., 1924, "Sur quelques points de la theorie de l'equation integre d'Abel", *Arkiv. för Mat., Astr. och Fysik*, vol. 18, no. 5, pp. 1-19.
4. K. D. Sakalyuk K. D., 1960, "Abel's generalized integral equation", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 131, no. 4, pp. 748-751.
5. Wolfersdorf L. v., 1969. "Zur Losung der Verallgemeinerten Abelschen Integralgleichung mit Konstanten Koeffizienten", vol. 49, no. 12, pp. 759-761.
6. Samko S. G., 1967, "A generalized Abel equation and an equation with Cauchy kernel", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 176, no. 5, pp. 1019-1022.
7. Nakhushiev A. M. Fractional calculus and its applications [Drobnoe ischislenie i ego prilozheniye] (Moscow: Fizmatlit, 2003).
8. Askhabov S. N., 2025, "Integral equations of fractional order with a variable external coefficient and monotonic nonlinearity", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 44-57.
9. Guseinov A. I., Mukhtarov Kh. Sh. Introduction to the Theory of Nonlinear Singular Integral Equations [Vvedenie v teoriyu nelineynykh singulyarnykh integral'nykh uravneniy] (Moscow: Nauka, 1980).
10. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferenti-
algleichungen (Berlin: Akademie-Verlag, 1974).
11. Askhabov S. N. Nonlinear equations of convolution type [Nelineynyye uravneniya tipa svertki] (Moscow: Fizmatlit, 2009).
12. Brezis H., Browder F. E., 1974, "Some new results about Hammerstein equations", *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 80. pp. 567-572.
13. Askhabov S. N., 2018, "Nonlinear itegral equations with potential-type kernels on a segment", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 235, no. 4, pp. 375-391.
14. Askhabov S. N., 2011, "Approximate solution of nonlinear equations with weighted potential type operators", *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 3, no. 4, pp. 8-13.
15. Askhabov S. N., 2015, "Nonlinear Convolution Type Equations in Lebesgue Spaces", *Matematicheskie Zametki*, vol. 97, no. 5, pp. 643-654.

Получено: 12.03.2026

Принято в печать: 19.05.2026