

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 517.956.25

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-6-15

Нелинейные стационарные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова

С. Ж. Акилова

Акилова Сабина Жахоновна — студент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).
e-mail: akilszj@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается нелинейное стационарное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова с параметром. Найдены условия на его коэффициенты, при которых гарантируется существование селекции (сопоставления каждому значению параметра одного из решений уравнения для этого значения параметра) с суслинской и с борелевской зависимостью от параметра.

Ключевые слова: уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова, измеримая селекция, измеримость по параметру

Библиография: 3 названия.

Для цитирования:

Акилова С. Ж. Нелинейные стационарные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 6–15.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 517.956.25

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-6-15

Nonlinear stationary Fokker-Planck-Kolmogorov equations

S. J. Akilova

Akilova Sabina Jakhonovna — student, National Research University “Higher School of Economics” (Moscow).
e-mail: akilszj@gmail.com

Abstract

We consider a nonlinear stationary Fokker-Planck-Kolmogorov equation with a parameter. We obtained sufficient conditions for existence of a selection (a map that assigns to every parameter value one of solutions of the equation with this parameter value) with either Souslin or Borel dependence with respect to the parameter.

Keywords: Fokker-Planck-Kolmogorov equation, measurable selection, measurability in parameter

Bibliography: 3 titles.

For citation:

Akilova, S. J. 2026, “Nonlinear stationary Fokker-Planck-Kolmogorov equations”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 6–15.

1. Введение

Эллиптическое уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова — это уравнение на борелевскую меру μ на $\mathbb{R}^d$, задаваемое следующим образом. Пусть даны матричнозначная функция $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$, называемая *матрицей диффузии* и векторнозначная функция $b(x) = (b_i(x))_{i=1,\dots,d}$, называемая *вектором сноса*. Будем предполагать, что $A(x)$ и $b(x)$ — борелевские функции, причем для любого x матрица $A(x)$ неотрицательно определена: для любого $v \in \mathbb{R}^d$ верно, что $\langle A(x)v, v \rangle \geq 0$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L\varphi = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (1)$$

Тогда уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова на борелевскую вероятностную меру μ — это

$$L^* \mu = 0,$$

понимаемое в следующем смысле. Скажем, что мера $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ является его решением, если, во-первых, $a_{ij}, b_i \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$ и, во-вторых, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ верно, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} L\varphi d\mu = 0.$$

Здесь $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ — множество борелевских вероятностных мер, а $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$ — множество функций, которые принадлежат пространству L^1 относительно меры μ на любом шаре.

В этой работе будут рассматриваться более общие уравнения — уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова с параметром. Пусть U — суслинское пространство (определение будет дано в разделе 2; например, всякое полное сепарабельное метрическое пространство будет суслинским).

Пусть коэффициенты уравнения зависят от параметра $u \in U$. А именно, рассмотрим борелевские отображения $A: \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \text{Mat}_{d \times d}(\mathbb{R})$ и $b: \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$; $A: (x, u) \mapsto A_u(x)$, $b: (x, u) \mapsto b_u(x)$. Как и раньше, мы предполагаем, что матрицы $A_u(x)$ неотрицательно определены: для любых $(x, u) \in \mathbb{R}^d \times U$ и любого $v \in \mathbb{R}^d$ верно, что $\langle A_u(x)v, v \rangle \geq 0$. Дифференциальный оператор (1) теперь зависит от параметра u :

$$L_u \varphi = \sum_{i,j=1}^d (A_u)_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d (b_u)_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова с параметром тогда имеет вид

$$(L_u)^* \mu = 0,$$

то есть $(A_u)_{ij}, (b_u)_i \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$ и для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполняется

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_u \varphi d\mu = 0.$$

В работе [2] В. И. Богачевым и С. В. Шапошниковым была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для каждого $u \in U$ множество решений уравнения $(L_u)^* \mu = 0$ непусто:

$$\Pi_u := \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : (L_u)^* \mu = 0\} \neq \emptyset.$$

Тогда можно выбрать для каждого u решение $\mu(u) \in \Pi_u$ так, что полученное отображение $u \mapsto \mu(u)$ будет измеримо относительно σ -алгебр $\sigma(\mathcal{S}_U)$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$.

Здесь $\sigma(\mathcal{S}_U)$ — σ -алгебра, порожденная суслинскими множествами (см. раздел 2).

Цель работы — обобщить этот результат на случай нелинейных уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова. Нелинейность понимается как зависимость коэффициентов линейного оператора L от решения, то есть, от меры μ . Например, $a_{ij}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{ij}(x, y) \mu(dy)$. Дадим общее определение.

Пусть даны борелевские отображения

$$\begin{aligned} A: \mathbb{R}^d \times U \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \text{Mat}_{d \times d}(\mathbb{R}), \quad (x, u, \mu) \mapsto A_{u, \mu}(x), \\ b: \mathbb{R}^d \times U \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (x, u, \mu) \mapsto b_{u, \mu}(x). \end{aligned}$$

Как и раньше, мы предполагаем, что матрицы $A_{u, \mu}(x)$ неотрицательно определены. Дифференциальный оператор (1) приобретает вид

$$L_{u, \mu} \varphi = \sum_{i, j=1}^d (A_{u, \mu})_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d (b_{u, \mu})_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Мера μ является решением нелинейного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова при некотором $u \in U$, если

$$L_{u, \mu}^* \mu = 0, \quad (2)$$

иными словами, когда функции $(A_{u, \mu})_{ij}$, $(b_{u, \mu})_i$ принадлежат классу $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$ и для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ верно, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_{u, \mu} \varphi d\mu = 0.$$

Заметим, что в отличие от линейного случая множество

$$\Pi_u := \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : (L_{u, \mu})^* \mu = 0\} \neq \emptyset.$$

решений уравнения (2) не является векторным пространством.

Первый основной результат работы — обобщение теоремы 1 на случай нелинейного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для каждого u множество Π_u решений уравнения $(L_{u, \mu})^* \mu = 0$ непусто. Тогда можно выбрать для каждого u решение $\mu(u) \in \Pi_u$ так, что полученное отображение $u \mapsto \mu(u)$ будет измеримо относительно σ -алгебр $\sigma(\mathcal{S}_U)$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$.

Доказательству этой теоремы посвящен раздел 3.

Второй основной результат работы — теорема о существовании селекции, измеримой относительно борелевской σ -алгебры в пространстве параметров (теорема 6 в разделе 4). Эта теорема также аналогична теореме, доказанной В. И. Богачевым и С. В. Шапошниковым в [2].

2. Суслинские множества и теоремы об измеримом выборе

В этом разделе мы приведем необходимые сведения о суслинских множествах, а также сформулируем используемые нами варианты теорем об измеримом выборе. Изложение в основном следует главе 6 в книге [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство (то есть для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, существуют открытые множества U_1, U_2 , для которых $x_j \in U_j$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$). Множество $A \subset X$ называется суслинским, если существует непрерывное отображение $f: Y \rightarrow X$, где Y — полное сепарабельное метрическое пространство, для которого $A = f(Y)$.

Топологическое пространство X называется суслинским, если оно является суслинским множеством в себе самом.

Обозначим множество всех суслинских подмножеств пространства X за $\mathcal{S}_X$.

ЛЕММА 1. *Всякое борелевское множество в суслинском пространстве является суслинским.*

Отметим, однако, что суслинские множества не образуют σ -алгебру: хотя $\mathcal{S}_X$ замкнуто относительно счетных пересечений и объединений, дополнение суслинского множества, например, на отрезке, не обязательно является суслинским. Сигма-алгебру, порожденную суслинскими множествами, будем обозначать $\sigma(\mathcal{S}_X)$. Борелевскую σ -алгебру на X будем обозначать $\mathcal{B}(X)$.

Доказательства теорем 1 и 2 опираются на следующую форму теоремы об измеримом выборе:

ТЕОРЕМА 3 ([1, теорема 6.9.2]). *Пусть Ω и X — суслинские пространства. Пусть график отображения $\Psi: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$, то есть множество*

$$\Gamma_\Psi = \{(\omega, x) \in \Omega \times X : x \in \Psi(\omega)\},$$

является суслинским (например, борелевским) множеством. Тогда существует отображение $f: \Omega \rightarrow X$ (называемое селекцией), для которого $f(\omega) \in \Psi(\omega)$, причем f измеримо относительно σ -алгебр $\sigma(\mathcal{S}_\Omega)$ и $\mathcal{B}(X)$.

Следующая теорема дает условия для существования борелевской, а не суслинской, селекции. Она будет использована в разделе 4.

ТЕОРЕМА 4 ([1, теорема 6.9.7]). *Пусть Ω — суслинское пространство, а X — польское пространство. Пусть график отображения $\Psi: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$, то есть множество*

$$\Gamma_\Psi = \{(\omega, x) \in \Omega \times X : x \in \Psi(\omega)\},$$

является борелевским множеством, а каждое множество $\Psi(\omega)$ σ -компактно. Тогда существует селекция $f: \Omega \rightarrow X$, $f(\omega) \in \Psi(\omega)$, измеримая относительно борелевских σ -алгебр $\mathcal{B}(\Omega)$ и $\mathcal{B}(X)$.

3. Доказательство теоремы 2

Доказательство состоит в применении теоремы 3 к отображению $\Psi: u \mapsto \Pi_u$ (соответственно, $\Omega = U$ и $X = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$). Остается проверить, что множество

$$\Gamma_\Psi = \Pi = \{(u, \mu) : L_{u,\mu}^* \mu = 0\}$$

борелевское. Воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 2 ([2, лемма 1]). *Пусть f — борелевская функция на $\mathbb{R}^d \times V$, где V — суслинское пространство. Положим*

$$F(\mu, v) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v) d\mu(x).$$

Тогда множество S тех пар (μ, v) , для которых интеграл существует, является борелевским и отображение $F: S \rightarrow \mathbb{R}$ является борелевским.

Пусть $V = U \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Тогда для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ функция $f_\varphi(x, u, \nu) = (L_{u,\nu}\varphi)(x)$ будет борелевской. Следовательно, функция

$$F_\varphi(\mu, u, \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} (L_{u,\nu}\varphi)(x) d\mu(x)$$

борелевская по лемме 2. Отображение $D: \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times U \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times U$, $(\mu, u) \mapsto (\mu, u, \mu)$ борелевское (и даже непрерывное), поэтому борелевской будет и композиция

$$G_\varphi(\mu, u) = (F_\varphi \circ D)(\mu, u) = \int_{\mathbb{R}^d} (L_{u,\mu}\varphi)(x) d\mu(x).$$

Тогда множество

$$M_\varphi = \left\{ (\mu, u) : \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu}\varphi(x) d\mu(x) = 0 \right\} = G_\varphi^{-1}(\{0\}).$$

также борелевское.

Выберем такое счетное семейство функций (φ_n) из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, что для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ с носителем $\text{supp } \varphi \subset \bar{B}_N(0)$ существует последовательность φ_{n_k} такая, что $\text{supp } \varphi_{n_k} \subset \bar{B}_N(0)$ и $\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi$ в пространстве $C^2(\bar{B}_N(0))$. Тогда

$$G_{\varphi_{n_k}}(u, \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu}\varphi_{n_k}(x) d\mu(x) \rightarrow G_\varphi(u, \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu}\varphi(x) d\mu(x).$$

Следовательно,

$$\Pi = \left\{ (\mu, u) : \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu}\varphi(x) d\mu(x) = 0 \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\varphi_n}$$

также борелевское. Тогда к $\Pi = \Gamma_\Psi$ можно применить теорему 3, что и дает утверждение теоремы 2.

4. Существование борелевской селекции

В [2] В. И. Богачевым и С. В. Шапошниковым была доказана теорема о существовании борелевской селекции. Дадим необходимые определения.

Будем называть неотрицательную функцию $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ *компактной*, если компактны все множества вида $\{V \leq c\}$. Пространством $L_{\text{loc}}^{p+}(\mathbb{R}^d)$, где $p \geq 1$, будем называть множество таких функций f , что для любого шара $B_R(0)$ существует такое $r = r(R) > p$, что $f \in L^r(B_R(0))$.

ТЕОРЕМА 5 ([2, теорема 2]). *Пусть для каждого $u \in U$ множество Π_u решений уравнения $(L_u)^*\mu = 0$ непусто. Предположим, что для коэффициентов уравнения выполнено одно из двух условий:*

1. A_u и b_u непрерывны по x при любом $u \in U$;
2. для любого $u \in U$ верно следующее: A_u и b_u ограничены на любом шаре $B_R(0)$, функция $\det A_u(x)$ положительна почти всюду и $\det^{-1} A_u(x) \in L_{\text{loc}}^{1+}(\mathbb{R}^d)$.

Предположим также, что для каждого $u \in U$ существуют компактная функция $V_u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ и число $C_u > 0$, для которых верно неравенство

$$L_u V_u \leq C_u - V_u. \quad (3)$$

Тогда для каждого u можно выбрать решение $\mu(u) \in \Pi_u$ так, что полученное отображение $u \mapsto \mu(u)$ будет борелевским. Более того, во втором случае любая мера, удовлетворяющая уравнению, обладает плотностью, и тогда плотность $\rho_u(x)$ меры $\mu(u)$ можно выбрать так, что функция $\rho: \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(x, u) = \rho_u(x)$ также будет борелевской.

Доказательство основано на применении теоремы 4 к отображению $u \mapsto \Pi_u$. Таким образом, нужно проверить, что множество Π_u σ -компактно в слабой топологии. Как показано в [2], Π_u даже компактно: из любой последовательности мер $\mu_n \in \Pi_u$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность, причем ее предел лежит в Π_u . Для доказательства существования сходящейся подпоследовательности нужно установить равномерную плотность семейства Π_u . Как доказано в [3, теорема 2.3.2], из (3) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} V_u d\mu_u \leq C_u.$$

Тогда для компакта $K = \{V_u \leq a\}$ по неравенству Чебышева получим, что

$$\mu_u(\mathbb{R}^d \setminus K) \leq C_u/a.$$

Чтобы доказать, что предел подпоследовательности лежит в Π_u , в первом случае мы используем, что $L_u \varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, а тогда

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} L_u \varphi d\mu_{n_k} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} L_u \varphi d\mu, \quad k \rightarrow \infty.$$

Во втором случае существование плотности вытекает из замечания 1.5.5 и теоремы 1.5.2 в [3], после чего используются оценки типа неравенства Гельдера. Наконец, возможность выбрать борелевскую плотность следует из того, что для почти всех x плотность меры $\mu(u)$ в точке x является пределом отношения меры $\mu(u)$ и меры Лебега шаров $B_{1/n}(x)$. Такой предел дает борелевский вариант функции $\rho(x, u)$.

Перейдем к нелинейному уравнению. Если предположить, что функция $V_{u,\mu}$ в условии (3) зависит только от u , но не от μ , то первый шаг рассуждения, существование сходящейся подпоследовательности, переносится на нелинейный случай практически без изменений. Далее, однако, требуется дополнительное условие на зависимость коэффициентов уравнения от μ , чтобы можно было сделать предельный переход

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu_{n_k}} \varphi d\mu_{n_k} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu} \varphi d\mu, \quad (4)$$

из которого будет вытекать замкнутость множества решений.

Отметим, что если не налагать дополнительных условий, множество решений уравнения $L_\mu^* \mu = 0$ может быть незамкнутым. Рассмотрим, например, следующее уравнение на прямой. Пусть $a(x, \mu) = a(x)$, где $a(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $b(x, \mu) = v(x)\mu(\{0\})$, где $v(x)$ — некоторое векторное поле, $v(0) \neq 0$. Тогда $\mu_n = \delta_{1/n}$ будут решениями уравнения $L_\mu^* \mu = 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_{\mu_n} \varphi d\mu_n = (a(x)\varphi''(x) + 0\varphi'(x))|_{x=1/n} = 0,$$

в то время как их слабый предел $\mu = \delta_0$ решением не будет:

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_\mu \varphi d\mu = (a(x)\varphi''(x) + v(x)\varphi'(x))|_{x=0} = v(0)\varphi'(0).$$

Мы поэтому потребуем непрерывной зависимости коэффициентов $a_{ij}(x, u, \mu)$, $b_i(x, u, \mu)$ от μ при фиксированном u , причем эта непрерывность должна быть равномерной на компактах по x . На пространстве мер здесь рассматривается слабая топология, сходимость в которой мы будем обозначать знаком $\rightharpoonup$. Итак, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Пусть для каждого $u \in U$ множество Π_u решений уравнения

$$(L_{u,\mu})^* \mu = 0$$

непусто. Предположим, что для коэффициентов уравнения выполнено одно из двух условий:

1. $A_{u,\mu}$ и $b_{u,\mu}$ непрерывны по x при любых $u \in U$, $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$;
2. для любых $u \in U$, $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ верно следующее: $A_{u,\mu}$ и $b_{u,\mu}$ ограничены на любом шаре $B_R(0)$, функция $\det A_{u,\mu}(x)$ положительна почти всюду и $\det^{-1} A_{u,\mu}(x) \in L_{\text{loc}}^{1+}(\mathbb{R}^d)$.

Предположим, что для каждого $u \in U$ существует такая компактная функция $V_u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, что для любой меры $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ существует число $C_{u,\nu} > 0$, для которого верно неравенство

$$L_{u,\nu} V_u \leq C_{u,\nu} - V_u. \quad (5)$$

Пусть также для любой последовательности мер $\mu_n \rightharpoonup \mu$ и любого $u \in U$ верно, что $A_{u,\mu_n}(x) \rightarrow A_{u,\mu}(x)$ и $b_{u,\mu_n}(x) \rightarrow b_{u,\mu}(x)$, причем для любого $R > 0$ эта сходимость равномерна по $x \in \bar{B}_R(0)$: при всех $i, j = 1, \dots, d$

$$\sup_{x \in \bar{B}_R(0)} |a_{ij}(x, u, \mu_n) - a_{ij}(x, u, \mu)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \sup_{x \in \bar{B}_R(0)} |b_i(x, u, \mu_n) - b_i(x, u, \mu)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6)$$

Тогда для каждого u можно выбрать решение $\mu(u) \in \Pi_u$ так, что полученное отображение $u \mapsto \mu(u)$ будет борелевским. Более того, во втором случае любая мера, удовлетворяющая уравнению, обладает плотностью, и тогда плотность $\rho_u(x)$ меры $\mu(u)$ можно выбрать так, что функция $\rho: \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(x, u) = \rho_u(x)$ также будет борелевской.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для применения теоремы 4 достаточно проверить, что Π_u σ -компактно. Обозначим

$$\Pi_{u,C} = \{\mu \in \Pi_u : L_{u,\mu} V_u \leq C - V_u\},$$

тогда $\Pi_u = \bigcup_{N=1}^{\infty} \Pi_{u,N}$, поэтому осталось доказать, что $\Pi_{u,C}$ — компакт.

Как и выше, заметим, что $\Pi_{u,C}$ равномерно плотно: по теореме 2.3.2 из [3] для всех мер $\nu \in \Pi_{u,C}$ из (5) получаем оценку

$$\int_{\mathbb{R}^d} V_u d\nu \leq C,$$

тогда для компакта $K = \{V_u \leq a\}$ верно, что $\nu(\mathbb{R}^d \setminus K) \leq C/a$.

Проверим теперь, что $\Pi_{u,C}$ замкнуто. Пусть $\mu_n \rightharpoonup \mu$ и $\mu_n \in \Pi_{u,C}$. Убедимся сначала, что $\mu \in \Pi_u$. Возьмем $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } \varphi \subset \bar{B}_R(0)$. Тогда $\int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu_n} \varphi d\mu_n = 0$ при всех n . Докажем, что это верно и для интеграла по предельной мере μ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu} \varphi d\mu \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu} \varphi d\mu - \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu_n} \varphi d\mu_n \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |L_{u,\mu} \varphi - L_{u,\mu_n} \varphi| d\mu_n + \left| \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu} \varphi d\mu - \int_{\mathbb{R}^d} L_{u,\mu} \varphi d\mu_n \right|. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части стремится к нулю: в первом случае из формулировки теоремы это напрямую следует из слабой сходимости (функция $L_{u,\mu} \varphi$ является непрерывной и финитной), во втором случае работают рассуждения из доказательства теоремы 5 (см. [2, теорема 2]).¹ Первое слагаемое также стремится к нулю: мера μ_n вероятностная,

¹Наблюдение о том, что рассуждения в доказательстве теоремы 2 из [2], относящиеся ко второму случаю, дословно переносятся на нелинейные уравнения, принадлежит А. В. Клименко.

поэтому интеграл оценивается равномерной нормой подынтегральной функции, которая не превосходит

$$\|\varphi\|_{C^2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^d \sup_{x \in \bar{B}_R(0)} |a_{ij}(x, u, \mu_n) - a_{ij}(x, u, \mu)| + \sum_{i=1}^d \sup_{x \in \bar{B}_R(0)} |b_i(x, u, \mu_n) - b_i(x, u, \mu)| \right).$$

Здесь каждое слагаемое в скобках стремится к нулю в силу (6).

Проверим теперь, что для предельной меры μ справедливо неравенство $L_{u,\mu} V_u \leq C - V_u$. В силу непрерывной зависимости коэффициентов a_{ij} и b_i от μ получаем, что для любого x верно, что $L_{u,\mu_n} V_u(x) \rightarrow L_{u,\mu} V_u(x)$. Остается перейти к пределу в неравенстве $L_{u,\mu_n} V_u \leq C - V_u$.

Итак, $\Pi_{u,C}$ компактно, и мы можем применить теорему 4 и получить борелевскую селекцию $u \mapsto \mu(u)$. Существование борелевской версии функции плотности $\rho_u(x)$ во втором случае устанавливается так же, как в доказательстве теоремы 5. $\square$

Часто встречаются ситуации, когда зависимость коэффициентов a_{ij}, b_i от меры имеет следующий вид:

$$c(x, u, \mu) = F\left(x, u, \int_{\mathbb{R}^d} K_1(u, x, y) d\mu(y), \dots, \int_{\mathbb{R}^d} K_m(u, x, y) d\mu(y)\right). \quad (7)$$

Укажем условия на F и K_j , при которых будет справедливо условие (6) в теореме 6.

ЛЕММА 3. Пусть функция $c: \mathbb{R}^d \times U \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид (7), где функция $F(x, u, z)$ непрерывна при фиксированном $u \in U$ по $(x, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$, а ядра $K_j(u, x, y)$ при фиксированном $u \in U$ ограничены и непрерывны по $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Тогда для любой слабо сходящейся последовательности мер $\mu_n \rightharpoonup \mu$, любого $u \in U$ и любого $R > 0$ верно, что

$$\sup_{x \in \bar{B}_R(0)} |c(x, u, \mu_n) - c(x, u, \mu)| \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. И в условиях, и в заключении леммы параметр $u \in U$ фиксируется. Поэтому мы можем его зафиксировать и далее исключить из обозначений для F и K_j . Получается следующее утверждение, которое мы и будем доказывать далее.

Пусть функция $c: \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$c(x, \mu) = F\left(x, \int_{\mathbb{R}^d} K_1(x, y) d\mu(y), \dots, \int_{\mathbb{R}^d} K_m(x, y) d\mu(y)\right), \quad (8)$$

где функция $F: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, а ядра $K_j: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ограничены и непрерывны. Тогда для любой слабо сходящейся последовательности мер $\mu_n \rightharpoonup \mu$ и любого $R > 0$ верно, что

$$\sup_{x \in \bar{B}_R(0)} |c(x, \mu_n) - c(x, \mu)| \rightarrow 0. \quad (9)$$

1. Докажем сначала, что (9) справедливо для функций

$$c_j(x, \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} K_j(x, y) d\mu(y), \quad j = 1, \dots, m.$$

Обозначим

$$z_n^{(j)}(x) = c_j(x, \mu_n) = \int_{\mathbb{R}^d} K_j(x, y) d\mu_n(y), \quad z^{(j)}(x) = c_j(x, \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} K_j(x, y) d\mu(y)$$

и докажем, что $z_n^{(j)}(x) \rightrightarrows z^{(j)}(x)$ на $\bar{B}_R(0)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Семейство мер $\mathcal{M} = \{\mu, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots\}$ равномерно плотно, поэтому существует компакт $M_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ такой, что $\mu(\mathbb{R}^d \setminus M_\varepsilon) \leq \varepsilon$, $\mu_n(\mathbb{R}^d \setminus M_\varepsilon) \leq \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим разбиение единицы $1 = \psi_1 + \psi_2$ на $\mathbb{R}^d$, где $\text{supp } \psi_1 \subset \mathbb{R}^d \setminus M_\varepsilon$, $\text{supp } \psi_2 = M'_\varepsilon$ — компакт. Тогда

$$\begin{aligned} |z_n^{(j)}(x) - z^{(j)}(x)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus M_\varepsilon} K_j(x, y) \psi_1(y) d\mu_n(y) \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus M_\varepsilon} K_j(x, y) \psi_1(y) d\mu(y) \right| + \\ &+ \left| \int_{M'_\varepsilon} K_j(x, y) \psi_2(y) d\mu_n(y) - \int_{M'_\varepsilon} K_j(x, y) \psi_2(y) d\mu(y) \right|. \quad (10) \end{aligned}$$

В силу оценок на меры множества M_ε , каждое из первых двух слагаемых не превосходит $\|K\|\varepsilon$. Оценим третье слагаемое. Обозначим для краткости

$$k(x, y) = K_j(x, y) \psi_2(y).$$

В третье слагаемое входят значения этой функции только при $(x, y) \in \bar{B}_R(0) \times M'_\varepsilon$. Это компакт, поэтому на нем функция k равномерно непрерывна — в частности, существует такое $\delta > 0$, что для любых $x, x' \in \bar{B}_R(0)$, $|x - x'| < \delta$, и любого $y \in M'_\varepsilon$ выполнено $|k(x, y) - k(x', y)| < \varepsilon$.

Выберем конечную δ -сеть $X = \{x_1, \dots, x_s\}$ в $\bar{B}_R(0)$. Для каждого $i = 1, \dots, s$ функция $k(x_i, \cdot)$ непрерывна и ограничена. Так как $\mu_n \rightarrow \mu$, существует такое n_i , что при всех $n > n_i$ верно

$$\left| \int_{M'_\varepsilon} k(x_i, y) d\mu_n(y) - \int_{M'_\varepsilon} k(x_i, y) d\mu(y) \right| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Положим $N = \max(n_1, \dots, n_s)$, выберем произвольный $x \in \bar{B}_R(0)$ и оценим третье слагаемое в (10). Существует x_i , для которого $|x - x_i| < \delta$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{M'_\varepsilon} k(x, y) d\mu_n(y) - \int_{M'_\varepsilon} k(x, y) d\mu(y) \right| &\leq \int_{M'_\varepsilon} |k(x, y) - k(x_i, y)| d\mu_n(y) + \\ &+ \left| \int_{M'_\varepsilon} k(x_i, y) d\mu_n(y) - \int_{M'_\varepsilon} k(x_i, y) d\mu(y) \right| + \int_{M'_\varepsilon} |k(x_i, y) - k(x, y)| d\mu(y). \end{aligned}$$

Поскольку $|k(x, y) - k(x_i, y)| < \varepsilon$, первое и третье слагаемое в правой части не превосходят ε . Для второго слагаемого при $n > N$ справедлива оценка (11). Объединяя оценки всех слагаемых в (10), получим, что для любого $x \in \bar{B}_R(0)$ и любого $n > N$

$$|z_n^{(j)}(x) - z^{(j)}(x)| \leq 2\|K_j\|\varepsilon + 3\varepsilon.$$

Равномерная сходимость для c_j доказана.

2. Перейдем к общему случаю. Заметим, что

$$c(x, \mu_n) = F(x, z_n^{(1)}(x), \dots, z_n^{(m)}(x)), \quad c(x, \mu) = F(x, z^{(1)}(x), \dots, z^{(m)}(x)). \quad (12)$$

Поскольку меры μ_n, μ вероятностные, $|z_n^{(j)}(x)|, |z^{(j)}(x)| \in I_j = [-\|K_j\|, \|K_j\|]$. Следовательно, в (12) функция F используется только с аргументами, принадлежащими компакт $\bar{B}_R(0) \times I_1 \times \dots \times I_m$. На этом компакте функция F равномерно непрерывна — в частности, при $x \in \bar{B}_R(0)$, $z_j, z'_j \in I_j$, $|z_j - z'_j| < \delta$, $j = 1, \dots, m$, верно, что

$$|F(x, z_1, \dots, z_m) - F(x, z'_1, \dots, z'_m)| < \varepsilon. \quad (13)$$

По первому пункту доказательства существует такое N , что при всех $n > N$, всех $x \in \bar{B}_R(0)$ и всех $i = 1, \dots, m$ выполнено $|z_n^{(i)}(x) - z^{(i)}(x)| < \delta$. Тогда из (13) получаем, что $|c(x, \mu_n) - c(x, \mu)| < \varepsilon$ при $n > N$ и $x \in \bar{B}_R(0)$. Равномерная сходимость доказана. $\square$

Автор благодарит своего научного руководителя чл.-корр. РАН В. И. Богачева, а также к. ф.-м. н. А. В. Клименко и д. ф.-м. н. С. В. Шапошникову за помощь в работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богачев В. И. Основы теории меры. — 3-е изд., испр. и доп. — М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2021. — Т. 2. — 688 с.
2. Богачев В. И., Шапошников С. В. Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова с параметром // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 513. — С. 21–26.
3. Богачев В. И., Крылов Н. В., Рекнер М., Шапошников С. В. Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. - М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2013. — 592 с.

REFERENCES

1. Bogachev, V.I. 2021, *Fundamentals of measure theory, Vol. 2*, 3rd edn, NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, Moscow – Izhevsk, 688 p.
2. Bogachev, V.I. & Shaposhnikov, S.V. 2023, “Fokker-Planck-Kolmogorov equations with a parameter”, *Doklady Rossiiskoi Akademii Nauk. Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya*, vol. 513, pp. 21–26.
3. Bogachev, V.I., Krylov, N.V., Röckner, M. & Shaposhnikov, S.V. 2013, *Fokker-Planck-Kolmogorov equations*, NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, Moscow-Izhevsk, 592 p.

Получено: 14.01.2026

Принято в печать: 19.05.2026