

УДК 512.55

КОЛЬЦА ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ И ОБОБЩЕНИЕ АЛГЕБРЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ

Д. Т. Тапкин (г. Казань)

Аннотация

В работе приведена конструкция обобщающая алгебры инцидентности на случай колец формальных матриц. Вводятся аналоги частичного порядка и предпорядка — частичный η -порядок и η -предпорядок.

Рассмотрен вопрос обратимости элементов обобщенной алгебры инцидентности. Приведен алгоритм нахождения обратного элемента алгебры и явная формула, верная, в частности, и для алгебр инцидентности.

Подробно рассмотрен случай обобщенной алгебры инцидентности над полем. В этом случае η -предпорядок допускает введение отношения эквивалентности на нем, которое индуцирует блочную структуру обобщенной алгебры инцидентности. Как и в случае алгебры инцидентности, существует тесная связь между алгебрами над частичными η -порядками и над η -предпорядками. Так, если известны размеры классов эквивалентности, то алгебра над η -предпорядком с точностью до изоморфизма восстанавливается по соответствующей алгебре над частичным η -порядком.

Показано, что обобщенную алгебру инцидентности можно вложить как подалгебру в соответствующее кольцо формальных матриц над тем же множеством. Изучена проблема изоморфизма и показано, что она сводится к проблеме изоморфизма для обобщенных алгебр инцидентности над частичным η -порядком. Было найдено частичное решение этой проблемы.

Введена функция Мебиуса обобщенной алгебры инцидентности. Приведен аналог формулы обращения Мебиуса и показано, что основные свойства остаются верными и для обобщенной алгебры инцидентности.

Особый интерес представляют обобщенные алгебры инцидентности с $\{0, 1\}$ -мультипликативной системой. Есть основания полагать, что над полем они исчерпывают все обобщенные алгебры инцидентности.

Ключевые слова: алгебры инцидентности, кольца формальных матриц, функция Мебиуса.

Библиография: 16 названий.

GENERALIZED MATRIX RINGS AND GENERALIZATION OF INCIDENCE ALGEBRAS

D. T. Tapkin (Kazan)

Abstract

The paper presents generalization of incidence algebras, which includes the case of generalized matrix rings. Constructions similar to partial ordering and quasi-ordering were introduced - η -poset and η -qoset respectively.

The question of invertibility of elements of generalized incidence algebras was studied. The algorithm of finding inverse element and clear formula were found. This formula holds for incidence algebras, in particular.

The case of generalized incidence algebra over a field was examined explicitly. In this case we can introduce equivalence relation on the underlying set, under which generalized incidence algebra would have block structure. As with incidence algebras, there is close connection between algebras over η -posets and η -qosets. For example, if we know sizes of equivalence classes, then we can reconstruct algebra over η -qoset by corresponding algebra over η -poset.

It was shown that generalized incidence algebras can be viewed as subalgebras of some formal matrix rings of the same size as the underlying set. The problem of isomorphism was studied and it was shown that it can be reduced to the problem of isomorphism of generalized incidence algebras over η -posets. Partial solution to this problem was found.

The paper introduces Mobius function of generalized incidence algebra. Analogue of Mobius inversion formula was found and it was shown that basic properties of classical Mobius function are remain to be true.

Generalized incidence algebras with so-called $\{0, 1\}$ -multiplicative system are of peculiar interest. There is good reason to believe that all generalized incidence algebras over a field are isomorphic to algebras with $\{0, 1\}$ -multiplicative system.

Keywords: incidence algebras, generalized matrix rings, formal matrix rings, Mobius function.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Алгебры инцидентности были введены в середине 60-ых годов как естественная среда для изучения комбинаторных проблем. Вскоре стало ясно что этот объект интересен и сам по себе. В частности он включает в себя произведение n копий кольца R и кольцо верхнетреугольных матриц над R . Существует тесная связь между алгебрами инцидентности и подалгебрами кольца матриц над полем.

В работе [1] были рассмотрены кольца формальных матриц второго порядка со значением в кольце R . Было показано что умножение в этих матрицах зависит от параметра лежащего в центре кольца R . Также рассмотрена проблема изоморфизма этих колец формальных матриц. Позднее этот результат был перенесен на частные случаи колец формальных матриц больших размерностей в статьях [2], [3], [4]. В статье [5], помимо всего прочего, для формальных матриц

было введено понятие определителя, и было показано что для него сохраняются основные свойства.

При изучении строения колец формальных матриц естественным образом возникает конструкция обобщающая алгебры инцидентности, названная здесь обобщенной алгеброй инцидентности. Для случая обобщенной алгебры инцидентности со значением в поле также была рассмотрена проблема изоморфизма. Предложение 9 сводит эту проблему к проблеме изоморфизма алгебр над частично η -упорядоченными множествами, а теорема 4 дает частичный ответ на последний вопрос. Есть основания полагать ($\{0, 1\}$ -гипотеза, приведенная в последнем параграфе) что формулировка последней теоремы может быть заметно упрощена.

2. Определение и основные свойства

Все кольца будем считать ассоциативными и с единицей, а модули и бимодули — унитарными. Радикал Джекобсона, центр, множество делителей нуля и группу обратимых элементов кольца R будем обозначать $J(R)$, $C(R)$, $Z(R)$ и $U(R)$ соответственно.

Пусть $R_1, R_2, \dots, R_n$ — кольца, а M_{ij} — (R_i, R_j) -бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, для всех $1 \leq i, j \leq n$. Пусть также $\varphi_{ijk} : M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}$ будут (R_i, R_k) -бимодульными гомоморфизмами, с оговоркой, что φ_{iij} и φ_{ijj} — канонические изоморфизмы для всех $1 \leq i, j \leq n$. Введем обозначение $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b)$ для $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$. За K обозначим множество всех $n \times n$ -матриц (m_{ij}) , с элементами $m_{ij} \in M_{ij}$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Простая проверка показывает, что относительно обычных операций сложения и умножения K будет кольцом, если и только если $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kl}$, $c \in M_{lj}$, $1 \leq i, k, l, j \leq n$. Полученное кольцо K называется *кольцом формальных матриц* порядка n и обозначается $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ijk}\})$.

Кольцо формальных матриц $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ijk}\})$ порядка n , в котором $M_{ij} = R$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, называется *кольцом формальных матриц над R* порядка n и обозначается $K_n(R)$ или $K_n(R : \{\varphi_{ijk}\})$.

Пусть $K_n(R : \{\varphi_{ijk}\})$ будет кольцом формальных матриц над R порядка n . Положим $\eta_{ijk} = \varphi(1 \otimes 1)$ для всех $1 \leq i, j, k \leq n$. Тогда $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a, b \in R$. Для любого $a \in R$ имеем $a\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(a \times 1) = \varphi_{ijk}(1 \otimes a) = \eta_{ijk}a$. Таким образом, $\eta_{ijk} \in C(R)$, и выполняются условия:

- 1) $\eta_{iij} = \eta_{ijj} = 1$, $1 \leq i, j \leq n$,
- 2) $\eta_{ijk}\eta_{ikl} = \eta_{ijl}\eta_{jkl}$, $1 \leq i, j, k, l \leq n$.

Первое условие выполняется в силу того, что φ_{iij} и φ_{ijj} — канонические изоморфизмы. А в силу ассоциативности операции $\circ$ имеем $\eta_{ijk}\eta_{ikl}abc = \eta_{ijl}\eta_{jkl}abc$ для всех $a, b, c \in R$. Положив $a = b = c = 1$ получаем второе условие.

В то же время, для любого набора $\{\eta_{ijk} \mid 1 \leq i, j, k \leq n\}$ центральных элементов R , удовлетворяющих первому и второму условию, можно положить $\varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a, b \in R$. Непосредственная проверка показывает, что $K_n(R : \{\varphi_{ijk}\})$ будет кольцом формальных матриц над R порядка n . Таким образом, кольцо формальных матриц $K_n(R : \{\varphi_{ijk}\})$ однозначно определяется набором центральных элементов $\{\eta_{ijk} \mid 1 \leq i, j, k \leq n\}$. В этом случае кольцо формальных матриц $K_n(R : \{\varphi_{ijk}\})$ мы будем обозначать через $K_n(R : \{\eta_{ijk}\})$.

Определим объект, обобщающий эту конструкцию для случая коммутативного кольца. Пусть дано коммутативное кольцо R и множество X с отношением $\leq$. Пусть также дан набор $\eta \supseteq \{\eta_{abc} \in R \mid a \leq b \leq c, a, b, c \in X\}$ элементов кольца R , такой что выполняются следующие свойства:

- а) $a \leq a, \forall a \in X$ (рефлексивность);
- б) $a \leq b, b \leq c, \eta_{abc} \neq 0$ влечет $a \leq c$ (η -транзитивность);
- с) множество $\{z \mid x \leq z \leq y \text{ и } \eta_{xzy} \neq 0\}$ конечно $\forall x, y \in X$ (обобщенная локальная конечность).

Также потребуем чтобы

- 1) $\forall a, b \in X, \eta_{abb}, \eta_{aab} \in \eta$ и $\eta_{abb} = \eta_{aab} = 1$;
- 2) $\forall a \leq b \leq c \leq d \in X, \eta_{abc}, \eta_{acd}, \eta_{abd}, \eta_{bcd} \in \eta$ и $\eta_{abc}\eta_{acd} = \eta_{abd}\eta_{bcd}$.

Такое множество η будем называть мультипликативной системой, а коэффициенты $\eta_{abc} \in \eta$ — мультипликативными коэффициентами. Отношение ' $\leq$ ' будем называть η -предпорядок. Рассмотрим множество $I(X, R; \{\eta_{abc}\}) = \{f : X \times X \rightarrow R \mid f(x, y) = 0 \text{ если } x \not\leq y\}$. Введем на нем поэлементную операцию сложения и умножения на скаляр. А операцию умножения определим по правилу:

$$(f \cdot g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y)\eta_{xzy}.$$

Непосредственная проверка показывает, что относительно введенных операций множество $I(X, R; \{\eta_{abc}\})$ становится ассоциативной R -алгеброй, которую будем называть *обобщенной алгеброй инцидентности*. В самом деле, пусть $a \leq d \in X$ и $f, g, h \in I(X, R; \{\eta_{abc}\})$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} ((f \cdot g) \cdot h)(a, d) &= \sum_{a \leq c \leq d} (f \cdot g)(a, c) h(c, d)\eta_{acd} = \\ &= \sum_{a \leq c \leq d} \sum_{a \leq b \leq c} f(a, b) g(b, c) h(c, d)\eta_{acd}\eta_{abc} = \\ &= \sum_{a \leq b \leq c \leq d} f(a, b) g(b, c) h(c, d)\eta_{acd}\eta_{abc} = \sum_{a \leq b \leq c \leq d} f(a, b) g(b, c) h(c, d)\eta_{abd}\eta_{bcd} = \\ &= \sum_{a \leq b \leq d} \sum_{b \leq c \leq d} f(a, b) g(b, c) h(c, d)\eta_{abd}\eta_{bcd} = \sum_{a \leq b \leq d} f(a, b) (g \cdot h)(b, d)\eta_{abd} = \\ &= (f \cdot (g \cdot h))(a, d). \end{aligned}$$

В отсутствии транзитивности подобное манипулирование суммами, вообще говоря, некорректно. Однако, если $a \leq b \leq c \leq d$, но не $a \leq c \leq d$, то $\eta_{abc} = 0$ и потому $f(a, b)g(b, c)h(c, d)\eta_{abc}\eta_{acd} = 0$. И наоборот, если $a \leq b \leq c \leq d$, но не $a \leq b \leq d$, то $\eta_{bcd} = 0$ и потому $f(a, b)g(b, c)h(c, d)\eta_{abd}\eta_{bcd} = 0$.

Если же дополнительно выполняется свойство

d) $a \leq b, b \leq a, \eta_{aba} \neq 0$ влечет $a = b$ (η -антисимметричность),
то будем говорить что на X задан *частичный η -порядок*.

Для удобства определим дополнительное отношение ' $<$ ': $x < y$ если и только если $x \leq y$, но $x \neq y$.

Дополнительно стоит указать следующие свойства коэффициентов η_{abc} , непосредственно вытекающие из свойств указанных выше.

3) $\eta_{aba} = \eta_{bab}, \forall a \leq b \leq a \in X$;

4) $\eta_{aba} = \eta_{abc}\eta_{bac} = \eta_{cab}\eta_{cba}, \forall a \leq b \leq a \leq c \in X$.

Приведенное выше определение выглядит искусственным. Однако оно возникает естественным образом, если при рассмотрении подалгебр колец формальных матриц отказаться от существования мультипликативных коэффициентов, никоим образом не влияющих на произведение элементов подалгебры.

ПРИМЕР 1. Если все коэффициенты η_{abc} равны единице, то получаем классическую алгебру инцидентности.

Единицей алгебры $I(X, R; \{\eta_{abc}\})$ является функция:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \in X, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При рассмотрении обобщенных алгебр инцидентности ключевую роль играет сегмент $[x, y]_\eta = \{z \mid x \leq z \leq y \text{ и } \eta_{xzy} \neq 0\}$. Его длину будем обозначать $|[x, y]|_\eta$.

Дзета-функцией ζ называется функция

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если дзета-функция обратима, то обратная функция называется *функцией Мёбиуса*.

Также введем такие обозначения как

$$e_u(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = u, y = u, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \delta_{uv}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = u, y = v, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Прежде чем переходить к критерию обратимости над частично η -упорядоченными множествами нам потребуется еще несколько определений.

Элементы x и y частично η -упорядоченного множества X называются *сравнимыми*, если либо $x \leq y$, либо $y \leq x$. Частично η -упорядоченное множество X называется *цепью*, если любые его два элемента сравнимы. Непустое подмножество $C \subseteq X$ называется *цепью* в X , если $(C, \leq_X|_{C \times C})$ является цепью.

Цепь C частично η -упорядоченного множества X называется *положительной*, если $\forall x \leq y \leq z \in C \ \eta_{xyz} \neq 0$. Цепь C частично η -упорядоченного множества X называется *неуплотняемой* если для всех $x \leq y$ в C и $z \in [x, y]_\eta \setminus C$, множество $C \cup \{z\}$ уже не является цепью.

PROPOSITION 1. Пусть множество X частично η -упорядочено и $C \subseteq X$ — конечная цепь в X . Тогда

- 1) цепь C представима в виде $x_1 < x_2 < \dots < x_{|C|}$;
- 2) если элементы множества η лежат в поле F , то положительные цепи это в точности цепи вида $x_1 < x_2 < \dots < x_{|C|}$ с условием $\eta_{x_1 x_i x_{i+1}} \neq 0$, для всех $1 \leq i \leq |C| - 1$;
- 2) если элементы множества η лежат в поле F , то положительные цепи это в точности цепи вида $x_1 < x_2 < \dots < x_{|C|}$ с условием $\eta_{x_i x_{i+1} x_{|C|}} \neq 0$, для всех $1 \leq i \leq |C| - 1$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1 доказывается индукцией по длине цепи C . Пункты 2 и 3 выводятся из свойства ассоциативности произведения в обобщенной алгебре инцидентности $I(X, F; \eta)$. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Если множество X частично η -упорядочено, то для $f \in I(X, R; \eta)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) f имеет правый обратный.
- 2) f имеет левый обратный.
- 3) f обратим.
- 4) $f(x, x)$ обратим в R для каждого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1 \Rightarrow 4)$ Предположим что f имеет правый обратный g . Тогда для каждого $x \in X$ имеем

$$1 = \delta(x, x) = (f \cdot g)(x, x) = f(x, x)g(x, x).$$

$(4 \Rightarrow 1)$ Предположим что $f(x, x)$ обратим в R для каждого $x \in X$. Будем строить правый обратный элемент g для функции f поэтапно. Если $||[x, y]||_\eta = 0$, то $x \not\leq y$ и потому положим $g(x, y) = 0$. Если $||[x, y]||_\eta = 1$, то $x = y$ и положим $g(x, x) = (f(x, x))^{-1}$. Если $||[x, y]||_\eta = 2$, то хотим чтобы выполнялось

$$0 = (f \cdot g)(x, y) = f(x, x)g(x, y) + f(x, y)g(y, y).$$

Отсюда $g(x, y) = -f(x, y)(f(x, x)f(y, y))^{-1}$. Пусть теперь $||[x, y]||_\eta = n + 2$, $n \geq 1$. Положим $A = [x, y]_\eta \setminus \{x, y\}$. Пронумеруем элементы множества A . $A = \{z_1, \dots, z_n\}$. Мы хотим чтобы выполнялось

$$0 = (f \cdot g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y)\eta_{xzy} = f(x, x)g(x, y) + \sum_{x < z \leq y} f(x, z)g(z, y)\eta_{xzy}.$$

Отсюда выражаем

$$g(x, y) = \left(- \sum_{z \in A} f(x, z)g(z, y)\eta_{xzy} \right) f(x, x)^{-1} - f(x, y)f(x, x)^{-1}f(y, y)^{-1}.$$

Иными словами равенство принимает вид

$$g(x, y) = R_0 + \sum_{z \in A} b_z g(z, y)\eta_{xzy},$$

где $R_0 \in R$ и $b_z \in R$ для всех $z \in A$. Для z_1 аналогично выполняется

$$g(z_1, y) = R_{z_1} + \sum_{z_1 < w < y, w \neq x} c_w g(w, y)\eta_{z_1wy} + c_x g(x, y)\eta_{z_1xy}.$$

Здесь если $x \notin [z_1, y]_\eta$, то просто положим $c_x = 0$. Теперь подставим $g(z_1, y)$ в $g(x, y)$.

$$\begin{aligned} g(x, y) &= R_0 + \sum_{z \in A \setminus \{z_1\}} b_z g(z, y)\eta_{xzy} + b_{z_1} g(z_1, y)\eta_{xz_1y} = \\ &= R_0 + \sum_{z \in A \setminus \{z_1\}} b_z g(z, y)\eta_{xzy} + \\ &+ b_{z_1} \left(R_{z_1} + \sum_{z_1 < w < y, w \neq x} c_w g(w, y)\eta_{z_1wy} + c_x g(x, y)\eta_{z_1xy} \right) \eta_{xz_1y}. \end{aligned}$$

Из определения мультипликативной системы $\eta_{z_1xy}\eta_{xz_1y} = \eta_{xz_1x} = 0$, в силу частичной η -упорядоченности. Для $w \neq x$ имеем $\eta_{z_1wy}\eta_{xz_1y} = \eta_{xz_1w}\eta_{xwy}$. Заметим, что если $0 \neq \eta_{z_1wy}\eta_{xz_1y}$, то и $\eta_{xz_1w} \neq 0$. Имеем $x \leq z_1$, $z_1 \leq w$, $\eta_{xz_1w} \neq 0$. Отсюда $x \leq w$. А т.к. $w \leq y$ и $\eta_{xwy} \neq 0$, то $w \in A$. Таким образом, положив $c_w = 0$ по необходимости, получаем

$$g(x, y) = (R_0 + R_{z_1}\eta_{xz_1y}) + \sum_{z \in A \setminus \{z_1\}} b_z g(z, y)\eta_{xzy} + b_{z_1} \left(\sum_{w \in A \setminus \{z_1\}} c_w g(w, y)\eta_{xz_1y}\eta_{z_1wy} \right).$$

По мере подстановки значений $g(z_2, y)$, ..., $g(z_n, y)$ в среднее слагаемое, равенство примет вид:

$$g(x, y) = R_1 + \sum_{z \in A} \left[\left(\sum_{w \in I_z} b_{w,z} \eta_{xwy} \eta_{wzy} \right) g(z, y) \right].$$

После второй итерации подстановки $g(z_1, y)$, ..., $g(z_n, y)$ в $g(x, y)$ формула примет вид:

$$g(x, y) = R_2 + \sum_{z \in A} \left[\left(\sum_{(w_1, w_2) \in I_{z,2}} b_{w_1, w_2, z} \eta_{xw_1y} \eta_{w_1w_2y} \eta_{w_2zy} \right) g(z, y) \right].$$

Рассмотрим итерацию номер n .

Фиксируем коэффициент $\eta_{xw_1y}(\eta_{w_1w_2y} \cdot \dots \cdot \eta_{w_nzy})$ и покажем что он равен нулю. Т.к. $|A| = n$, то $z = w_p$ для некоторого $1 \leq p < n$. Имеем

$$\eta_{w_pw_{p+1}y} \eta_{w_{p+1},w_{p+2}y} \eta_{w_{p+2}w_{p+3}y} \cdot \dots \cdot \eta_{w_nw_py} = \eta_{w_pw_{p+1}w_{p+2}} \eta_{w_pw_{p+2}y} \eta_{w_{p+2}w_{p+3}y} \cdot \dots \cdot \eta_{w_nw_py}.$$

Если множитель $\eta_{w_pw_{p+1}w_{p+2}} = 0$, то на этом доказательство завершено. В противном случае, имеем $w_p \leq w_{p+1} \leq w_{p+2}$ и $\eta_{w_pw_{p+1}w_{p+2}} \neq 0$ и по свойству η -транзитивности получаем что $w_p \leq w_{p+2}$. Это позволяет нам дальше преобразовывать коэффициент. Если ни на каком шаге не встретился нулевой коэффициент, то получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} & \eta_{w_pw_{p+1}y} \eta_{w_{p+1},w_{p+2}y} \eta_{w_{p+2}w_{p+3}y} \cdot \dots \cdot \eta_{w_nw_py} = \\ & = \eta_{w_pw_{p+1}w_{p+2}} \eta_{w_pw_{p+2}y} \eta_{w_{p+2}w_{p+3}y} \cdot \dots \cdot \eta_{w_nw_py} = \\ & = \dots = \eta_{w_pw_{p+1}w_{p+2}} \eta_{w_pw_{p+2}w_{p+3}} \cdot \dots \cdot \eta_{w_pw_ny} \eta_{w_nw_py} = \\ & = \eta_{w_pw_{p+1}w_{p+2}} \eta_{w_pw_{p+2}w_{p+3}} \cdot \dots \cdot \eta_{w_pw_nw_p}. \end{aligned}$$

Однако в силу частичной η -упорядоченности $\eta_{w_pw_nw_p} = 0$. Таким образом $g(x, y) = R_p$. Нам удалось определить элемент g .

Покажем теперь что этот элемент и в самом деле является правым обратным для f . Из алгоритма построения элемента g непосредственно вытекает что элемент g имеет вид:

$$g(x, y) = \sum_{\substack{x=x_1 < x_2 < \dots < x_n=y \\ \text{цепь положительна}}} h(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

для некоторой функции h , действующей на цепях. После некоторого уточнения получаем формулу:

$$g(x, y) = f(y, y)^{-1} \sum_{\substack{x=x_1 < x_2 < \dots < x_n=y \\ \text{цепь положительна}}} (-1)^{n-1} \left(\prod_{i=2}^n f(x_{i-1}, x_{i-1})^{-1} f(x_{i-1}, x_i) \eta_{xx_i, y} \right),$$

если $x \neq y$.

Необходимо проверить соблюдение равенства:

$$g(x, y) = \left(- \sum_{z \in A} f(x, z) g(z, y) \eta_{xzy} \right) f(x, x)^{-1} - f(x, y) f(x, x)^{-1} f(y, y)^{-1}.$$

В самом деле, пусть $x = x_1 < x_2 < \dots < x_n = y$ — положительная цепь. Тогда либо $n = 2$, и этому случаю отвечает последнее слагаемое, либо цепь $x_2 < \dots < x_n = y$ также будет положительна и будет учитываться при вычислении $g(x_2, y)$.

Но тогда

$$\begin{aligned} -f(x, x_2)(-1)^{n-2} \left(\prod_{i=3}^n f(x_{i-1}, x_{i-1})^{-1} f(x_{i-1}, x_i) \eta_{xx_i, y} \right) \eta_{xx_2 y} f(x, x)^{-1} = \\ = (-1)^{n-1} \left(\prod_{i=2}^n f(x_{i-1}, x_{i-1})^{-1} f(x_{i-1}, x_i) \eta_{xx_i, y} \right). \end{aligned}$$

Если же $z \in \{x, y\}_\eta$ и цепь $z = x_2 < \dots < x_n = y$ положительна, а цепь

$$x = x_1 < x_2 < \dots < x_n = y$$

таковой не является, то

$$\left(\prod_{i=2}^n f(x_{i-1}, x_{i-1})^{-1} f(x_{i-1}, x_i) \eta_{xx_i, y} \right) = 0.$$

Таким образом искомое равенство соблюдено и g в самом деле является правым обратным для f .

По аналогии доказываются импликации $(2 \Rightarrow 4)$ и $(4 \Rightarrow 2)$. Импликация $(4 \Rightarrow 3)$ верна в силу импликаций $(4 \Rightarrow 1)$ и $(4 \Rightarrow 2)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если множество X частично η -упорядочено, $f \in I(X, R; \eta)$ и $f(x, x)$ обратим в R для каждого $x \in X$, то обратный к f элемент g имеет вид:

$$g(x, y) = f(y, y)^{-1} \sum_{\substack{x=x_1 < x_2 < \dots < x_n=y \\ \text{цепь положительна}}} (-1)^{n-1} \left(\prod_{i=2}^n f(x_{i-1}, x_{i-1})^{-1} f(x_{i-1}, x_i) \eta_{xx_i, y} \right),$$

если $x \neq y$.

В случае классической алгебры инцидентности мы имеем импликацию $z \in [x, y] \Rightarrow [z, y] \subseteq [x, y]$ позволяющую использовать индукционный спуск при доказательстве теоремы выше. Отсутствие включения и, более того, невозможность какого-либо индукционного спуска показывают следующие примеры.

ПРИМЕР 2. Положим $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5$. Пусть также дано коммутативное кольцо R с нетривиальным идемпотентом e . Определим набор коэффициентов $\{\eta_{xyz}\}$ по правилу:

$$\eta_{ijj} = \eta_{ijj} = 1, \text{ для всех } 1 \leq i, j \leq 5,$$

$$\eta_{125} = e, \eta_{235} = \eta_{245} = 1 - e.$$

Остальные η_{xyz} положим равными нулю.

Непосредственная проверка показывает что $\eta = \{\eta_{xyz} \mid 1 \leq x, y, z \leq 5\}$ образует мультипликативную систему. Получаем частично η -упорядоченную обобщенную алгебру инцидентности $I(X, R; \eta)$.

В этой алгебре $[1, 5]_\eta = \{1, 2, 5\}$, но $[2, 5]_\eta = \{2, 3, 4, 5\}$.

ПРИМЕР 3. Пусть теперь $X = \mathbb{N}$ и $i \leq j$ для любых $i, j \in X$. Пусть также дано коммутативное кольцо R с нетривиальным идемпотентом e . Определим набор коэффициентов $\{\eta_{xyz}\}$ по правилу:

$$\eta_{ijj} = 1, \text{ для всех } 1 \leq i, j \leq 5,$$

$$\eta_{i,i+1,1} = \begin{cases} e & \text{если } i \text{ четно,} \\ 1 - e & \text{если } i \geq 3 \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Остальные η_{xyz} положим равными нулю.

Непосредственная проверка показывает что $\eta = \{\eta_{xyz} \mid x, y, z \in \mathbb{N}\}$ образует мультипликативную систему. Получаем частично η -упорядоченную обобщенную алгебру инцидентности $I(X, R; \eta)$.

Будем искать правый обратный g для дзета-функции ζ . Непосредственно получаем $g(x, x) = 1$ для всех $x \in \mathbb{N}$ и $g(x, y) = -1$ если $x \neq y$ и $y \neq 1$. Необходимо чтобы выполнялось $(\zeta \circ g)(2, 1) = 0$. Т.к. $[2, 1]_\eta = \{2, 3, 1\}$, то предварительно надо определить $g(3, 1)$. $[3, 1]_\eta = \{3, 4, 1\}$ и потому надо предварительно определить $g(4, 1)$ и т.д. В то же время, метод из доказательства леммы через 1 итерацию дает

$$g(i, 1) = \begin{cases} e - 1 & \text{если } i \text{ четно,} \\ -e & \text{если } i \geq 3 \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В случае же когда R — поле, ситуацию уже лучше. Пусть снова множество X частично η -упорядочено, F — поле и $x, y \in I(X, F; \eta)$. Пусть также $z \in [x, y]_\eta$. Тогда если C — положительная цепь в $[z, y]_\eta$, то легко видеть что $C \cup \{x\}$ есть положительная цепь в $[x, y]_\eta$. Обратное, очевидно, также выполняется. Заметим также что положительная цепь наибольшей длины есть неуплотняемая цепь. Это позволяет переписать предыдущее следствие в случае когда R — поле в следующем виде.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть F — поле, множество X частично η -упорядочено, $f \in I(X, F; \eta)$ и $f(x, x) \neq 0$ для каждого $x \in X$. Определим элемент $g \in I(X, F; \eta)$ индуктивно по длине наибольшей неуплотняемой цепи в $[x, y]_\eta$:

$$1) \forall x \in X \quad g(x, x) = f(x, x)^{-1};$$

$$2) g(x, y) = \left(- \sum_{z \in [x, y]_\eta \setminus \{x\}} f(x, z) g(z, y) \eta_{xzy} \right) f(x, x)^{-1}.$$

Тогда g будет обратным к f . Подставив $f = \zeta$, получаем индуктивное определение функции Мёбиуса.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если множество X частично η -упорядочено, то дзета-функция ζ обратима в $I(X, R; \eta)$.

ЛЕММА 1. Пусть множество X частично η -упорядочено и $K = I(X, R; \eta)$. Тогда радикал Джекобсона $J(K)$ совпадает со множеством функций $f \in K$, таких что $f(x, x) \in J(R)$ для всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in K$. По одному из эквивалентных определений радикала Джекобсона, $f \in J(K)$ если и только если $\delta - fg$ обратим для всех

$g \in K$. В силу теоремы 1 это равносильно тому что $1 - f(x, x)g(x, x)$ обратим в R , или, иными словами, тому что $f(x, x) \in J(R)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Для частично η -упорядоченного множества X и $K = I(X, R; \eta)$, $K/J(K) \cong \prod_{x \in X} R/J(R)$.

Элемент $f \in I(X, R; \eta)$ назовем диагональным, если $f(x, y) = 0$ для всех $x \neq y \in X$.

ЛЕММА 2. Пусть множество X частично η -упорядочено и F - поле. Тогда каждый идемпотент $\alpha \in K = I(X, F; \eta)$ сопряжен диагональному идемпотенту ε , такому что $\varepsilon(x, x) = \alpha(x, x)$, $\forall x \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 $\rho = \alpha - \varepsilon \in J(K)$. Т.к. $\alpha^2 = \alpha$ имеем:

$$0 = \alpha^2 - \alpha = (\rho^2 + \rho\varepsilon + \varepsilon\rho + \varepsilon) - (\rho + \varepsilon) = (\rho^2 - \rho) + (\varepsilon\rho + \rho\varepsilon).$$

Также имеем: $0 = \varepsilon(\alpha^2 - \alpha) = \varepsilon\rho^2 + \varepsilon\rho\varepsilon$.

Положим $\beta = \delta + (2\varepsilon - \delta)\rho$. Т.к. $\rho \in J(K)$, то $\beta \in U(K)$ по теореме 1. Имеем:

$$\begin{aligned} \beta\alpha &= (\delta + 2\varepsilon\rho - \rho)(\varepsilon + \rho) = (\varepsilon + 2\varepsilon\rho\varepsilon - \rho\varepsilon) + (\rho + 2\varepsilon\rho^2 - \rho^2) = \\ &= 2(\varepsilon\rho^2 + \varepsilon\rho\varepsilon) + (\varepsilon + \varepsilon\rho) - ((\rho^2 - \rho) + (\varepsilon\rho + \rho\varepsilon)) = \varepsilon + \varepsilon\rho. \\ \varepsilon\beta &= \varepsilon(\delta + (2\varepsilon - \delta)\rho) = \varepsilon + 2\varepsilon\rho - \varepsilon\rho = \varepsilon + \varepsilon\rho. \end{aligned}$$

Таким образом, $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha$. $\square$

PROPOSITION 2. Пусть множество $X = \{x_i\}_1^n$ частично η -упорядочено и F — поле. Пусть также дан набор взаимно ортогональных идемпотентов $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K = I(X, F; \eta)$. Тогда идемпотенты одновременно диагонализированы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения прошлой леммы. В силу взаимной ортогональности α_i , взаимно ортогональны и ε_i . Отсюда набор элементов ε_i с точностью до перестановки совпадает с идемпотентами:

$$e_j(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_j, y = y_j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Не нарушая общности можно считать что $\varepsilon_n = e_n$. Положим

$$\beta_n = \delta + (2\varepsilon_n - \delta)\rho_n = \delta + (2\varepsilon_n - \delta)(\alpha_n - \varepsilon_n) = \delta + 2\varepsilon_n\alpha_n - (\alpha_n + \varepsilon_n).$$

Перейдем от набора α_i к набору $\beta_n\alpha_i\beta_n^{-1}$, сохранив старые обозначения. Получаем набор взаимно ортогональных идемпотентов $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, e_n$. Снова все ε_i взаимно ортогональны, но теперь $\varepsilon_n = e_n$.

Можно считать что $\varepsilon_{n-1} = e_{n-1}$. Положим

$$\beta_{n-1} = \delta + 2\varepsilon_{n-1}\alpha_{n-1} - (\alpha_{n-1} + \varepsilon_{n-1}).$$

Имеем

$$\beta_{n-1}e_n = (\delta + 2\varepsilon_{n-1}\alpha_{n-1} - (\alpha_{n-1} + \varepsilon_{n-1}))e_n = e_n,$$

$$e_n \beta_{n-1} = e_n (\delta + 2\varepsilon_{n-1} \alpha_{n-1} - (\alpha_{n-1} + \varepsilon_{n-1})) = e_n.$$

Отсюда

$$\beta_{n-1} e_n \beta_{n-1}^{-1} = e_n \beta_{n-1} \beta_{n-1}^{-1} = e_n.$$

Таким образом после сопряжения и переобозначения получаем набор

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, e_{n-1}, e_n.$$

Повторяя эту процедуру получаем требуемый результат. $\square$

ТЕОРЕМА 2. Пусть F — поле и S — подалгебра кольца формальных матриц $M_n(F; \eta)$. Тогда найдется частично η -упорядоченное множество X порядка n такое что $I(X, F; \eta) \cong S$ если и только если

- 1) S содержит n взаимно ортогональных идемпотентов;
- 2) $\frac{S}{J(S)}$ коммутативно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть такое множество $X = \{x_i\}_1^n$ существует. Тогда идемпотенты e_i из предложения 2 удовлетворяют пункту 1. А пункт 2 выполняется в силу леммы 1. Вложение $I(X, F; \eta) \subset M_n(F; \eta)$ осуществляется по формуле: $f \mapsto (f(x_i, x_j))$

Пусть теперь подалгебра S удовлетворяет условиям 1 и 2. В силу предложения 2 идемпотенты из пункта 1 одновременно диагонализированы. Без нарушения общности можно считать что S содержит их диагонализированные варианты — матричные единицы $E_{11}, \dots, E_{nn}$.

Положим $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и определим отношение ' $\leq$ ' по правилу: $x_i \leq x_j$ если и только если $E_{ii} S E_{jj} \neq 0$. В этом случае $x_p \leq x_q$ в том и только в том случае если найдется $(a_{ij}) \in S$, что $a_{pq} \neq 0$. Непосредственно получаем что выполняются свойства рефлексивности, η -транзитивности и обобщенной локальной конечности. Пусть теперь $x_i \leq x_j$, $x_j \leq x_i$ и $\eta_{ji} \neq 0$. Тогда $E_{ii}, E_{jj} \in S$. В силу коммутативности $\frac{S}{J(S)}$ имеем $E_{ij} E_{ji} - E_{ji} E_{ij} = \eta_{ji} (E_{ii} - E_{jj}) \in J(S)$. Тогда $E - \eta_{ji}^{-1} (\eta_{ji} (E_{ii} - E_{jj}))$ обратим, что в силу теоремы 1 возможно только если $i = j$. $\square$

Возникает и естественный обратный вопрос: в каком случае обобщенную алгебру инцидентности можно рассматривать как подалгебру некоторого кольца формальных матриц со значением в поле F ?

ТЕОРЕМА 3. Пусть множество $X = \{x_i\}_1^n$ частично η -упорядочено и F — поле. Тогда обобщенная алгебра инцидентности $I(X, F; \eta)$ изоморфна подалгебре некоторого кольца формальных матриц порядка n со значением в поле F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим искомого кольцо формальных матриц $M_n(F; \mu)$. Положим $\mu_{aab} = \mu_{abb} = 1$ для всех $1 \leq a, b \leq n$. Далее, если $x_a \leq x_b \leq x_c$, то $\mu_{abc} = \eta_{x_a x_b x_c}$. Оставшиеся коэффициенты μ_{abc} возьмем равными нулю.

Для того, чтобы убедиться что мы получили кольцо формальных матриц, надо проверить выполнение равенства

$$\mu_{abc}\mu_{acd} = \mu_{abd}\mu_{bcd}, \quad 1 \leq a, b, c, d \leq n.$$

Равенство может нарушаться только если в одной из частей равенства оба множителя не равны нулю.

Случай 1. Пусть $a \neq b, a \neq c, b \neq c, b \neq d, c \neq d$.

Пусть $\mu_{abc}\mu_{acd} \neq 0$. Тогда по построению получаем $x_a \leq x_b \leq x_c, x_a \leq x_c \leq x_d$. Но тогда для четверки $x_a \leq x_b \leq x_c \leq x_d$ выполнялось аналогичное равенство в η -системе. Аналогично разбирается и случай $\mu_{abd}\mu_{bcd} \neq 0$.

Случай 2. Выполняется хотя бы одно из равенств $a = b, b = c, c = d$.

В этом случае получаем тривиальное равенство.

Случай 3. Выполняется хотя бы одно из равенств $a = c$ или $b = d$.

Пусть, к примеру, $a = c$. Тогда равенство преобразовывается в

$$\mu_{aba} = \mu_{abd}\mu_{bad}.$$

Если $a = b$ или $a = d$ или $b = d$, то все тривиально. В противном случае, по построению получаем $\mu_{aba} = 0$. В самом деле, если $x_a \leq x_b \leq x_a$ то в силу η -антисимметричности $\eta_{x_a x_b x_a} = 0$. Если же $\mu_{abd}\mu_{bad} \neq 0$, то для четверки $x_b \leq x_a \leq x_b \leq x_d$ должно выполняться соответствующее равенство в η -системе. Но тогда $\eta_{x_a x_b x_a} \neq 0, x_a \leq x_b \leq x_a$ и $a \neq b$. Получаем противоречие.

Зададим отображение $\varphi : I(X, F; \eta) \rightarrow M_n(F; \mu)$ по правилу $f \mapsto (f(x_a, x_b))$. Несложно проверить что это отображение является изоморфизмом. $\square$

На самом деле, утверждение теоремы верно и для множества X снабженного η -предпорядком. Но чтобы показать это нам понадобятся некоторые предварительные рассуждения, которые будут проведены в следующих главах.

Несложно проверить, что выполняется следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть множество X частично η -упорядочено и F — поле. Тогда идемпотент $\alpha \in K = I(X, F; \eta)$ примитивен если и только если он сопряжен элементу e_x для некоторого $x \in X$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть F — поле, X — частично η -упорядоченное множество, а Y — частично μ -упорядоченное множеств. Тогда если $I(X, F; \eta) \cong I(Y, F; \mu)$, то найдутся изоморфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ и функция $g : Y \times Y \rightarrow F^*$, такая что

$$\eta_{xyz} g(\varphi(x)\varphi(z)) = \mu_{\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)} g(\varphi(x)\varphi(y)) g(\varphi(y)\varphi(z)),$$

для любых $x \leq y \leq z \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi : I(X, F; \eta) \rightarrow I(Y, F; \mu)$ — указанный изоморфизм. Тогда для каждого $x \in X$, $\Phi(e_x)$ примитивен и, следовательно, сопряжен некоторому диагональному примитивному идемпотенту f_y . Т.к. идемпотенты e_x

и $e_{x'}$ очевидно не сопряжены если $x \neq x'$, то определено биективное отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ по правилу: $\Phi(e_x)$ сопряжен $f_{\varphi(x)}$. Покажем, что отображение φ сохраняет порядок.

Пусть $x_1 \leq x_2$ в X . Это равносильно тому что $e_{x_1}I(X, F; \eta)e_{x_2} \neq 0$. Положим $\Phi(e_{x_1}) = \alpha f_{\varphi(x_1)}\alpha^{-1}$ и $\Phi(e_{x_2}) = \beta f_{\varphi(x_2)}\beta^{-1}$. В силу биективности Φ

$$\begin{aligned} 0 \neq \Phi(e_{x_1}I(X, F; \eta)e_{x_2}) &= \Phi(e_{x_1})\Phi(I(X, F; \eta))\Phi(e_{x_2}) = \\ &= \alpha f_{\varphi(x_1)}\alpha^{-1}I(Y, F; \eta)\beta f_{\varphi(x_2)}\beta^{-1} = \\ &= \alpha f_{\varphi(x_1)}I(Y, F; \eta)f_{\varphi(x_2)}\beta^{-1}. \end{aligned}$$

А значит $0 \neq f_{\varphi(x_1)}I(Y, F; \eta)f_{\varphi(x_2)}$ и $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Phi(\delta_{x_1x_2}) &= \Phi(e_{x_1}\delta_{x_1x_2}e_{x_2}) = \Phi(e_{x_1})\Phi(\delta_{x_1x_2})\Phi(e_{x_2}) = \\ &= \alpha f_{\varphi(x_1)}\alpha^{-1}\Phi(\delta_{x_1x_2})\beta f_{\varphi(x_2)}\beta^{-1} = \\ &= g(\varphi(x_1)\varphi(x_2))\alpha\delta_{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}\beta^{-1}, \end{aligned}$$

где $g(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) \in F^*$.

Тогда для $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ в X получаем

$$\eta_{x_1x_2x_3}g(\varphi(x_1)\varphi(x_3)) = \mu_{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)}g(\varphi(x_1)\varphi(x_2))g(\varphi(x_2)\varphi(x_3)).$$

□

3. Функция Мёбиуса

Обозначим функцию Мёбиуса обобщенной алгебры инцидентности за μ . Рота получил формулу обращения Мёбиуса обобщив следующую конструкцию. Для коммутативного кольца R рассмотрим алгебру инцидентности $I(\mathbb{N}, R)$, где множество $\mathbb{N}$ частично упорядочено относительно делимости: $x \leq y \Leftrightarrow x|y$. Для функции $f : \mathbb{N} \rightarrow R$ можно определить элемент $\bar{f} \in I(\mathbb{N}, R)$ по правилу:

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(\frac{y}{x}), & \text{если } x|y, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Тогда равенство $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ влечет $\bar{g} = \bar{f}\zeta$ и мы можем выразить f через g ,

пользуясь тем что $\bar{f}(1, n) = f(n)$. Перед построением похожей конструкции для обобщенных алгебр инцидентности, рассмотрим пример.

ПРИМЕР 4. Пусть кольцо R коммутативно. Фиксируем $k \in \mathbb{N}$. Введем на множестве натуральных чисел отношение $\leq$ по правилу: будем говорить что $x \leq y$ если выполнен ряд следующих условий:

- 1) $x|y$,

2) если $y/x = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ — разложение на простые множители, то $\sum_{i=1}^s \alpha_i \leq k$ в естественном смысле.

Определим мультипликативную систему η следующим образом: $\eta_{abc} = 1$ если $a \leq b$, $b \leq c$ и $a \leq c$; в противном случае $\eta_{abc} = 0$. Получаем обобщенную алгебру инцидентности $I(\mathbb{N}, R; \eta)$. Для того чтобы проверить это, необходимо удостовериться в выполнении равенства $\eta_{abc}\eta_{acd} = \eta_{abd}\eta_{bcd}$ для каждой четверки $a \leq b \leq c \leq d$. В самом деле, если $\eta_{abc}\eta_{acd} \neq 0$, то $a \leq d$, а тогда и подавно $b \leq d$ и $\eta_{abd}\eta_{bcd} \neq 0$.

Вернемся теперь к формуле обращения Мёбиуса. Пусть $I(\mathbb{N}, R; \eta)$ — обобщенных алгебра инцидентности определенных в примере выше. Для функции $f: \mathbb{N} \rightarrow R$ можно определить элемент $\bar{f} \in I(\mathbb{N}, R; \eta)$ по правилу:

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(\frac{y}{x}), & \text{если } x \leq y, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

В этом случае мы получаем что $\bar{f}(1, n) = f(n)$ только в случае $1 \leq n$ и в противном случае $\bar{f}(1, n) = 0$. Положим $g(n) = \sum_{d \leq n} \eta_{1dn} f(d)$. Тогда снова $\bar{g} = \bar{f}\zeta$.

Так, к примеру, $\bar{g}(1, n) = \sum_{1 \leq d \leq n} \bar{f}(1, d)\zeta(d, n)\eta_{1dn}$. Но восстановить f мы можем, очевидно, только для таких n , что $1 \leq n$. Это приводит нас к следующей формулировке теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть кольцо R коммутативно и множество X снабжено частичным η -порядком. Пусть также $f, g: X \rightarrow R$. Тогда если для некоторого $x_0 \in X$ выполняется $g(x) = \sum_{z \in [x_0, x]_\eta} f(z)\eta_{x_0zx}$ для всех $x_0 \leq x$, то для $x_0 \leq x$:

$$f(x) = \sum_{y \in [x_0, x]_\eta} g(y)\mu(y, x)\eta_{x_0yx}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $x_0 \leq x$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{x_0 \leq y \leq x} g(y)\mu(y, x)\eta_{x_0yx} &= \sum_{x_0 \leq y \leq x} \left(\sum_{x_0 \leq z \leq y} f(z)\mu(y, x)\eta_{x_0zy}\eta_{x_0yx} \right) = \\ &= \sum_{x_0 \leq y \leq x} \left(\sum_{x_0 \leq z \leq y} f(z)\zeta(z, y)\mu(y, x)\eta_{x_0zx}\eta_{zyx} \right) = \\ &= \sum_{x_0 \leq z \leq y \leq x} (f(z)\zeta(z, y)\mu(y, x)\eta_{x_0zx}\eta_{zyx}) = \\ &= \sum_{x_0 \leq z \leq x} f(z)\eta_{x_0zx} \left(\sum_{z \leq y \leq x} \zeta(z, y)\mu(y, x)\eta_{zyx} \right) = \sum_{x_0 \leq z \leq x} f(z)\eta_{x_0zx}\delta(z, x) = \\ &= f(x)\eta_{x_0xx} = f(x). \end{aligned}$$

В отсутствии транзитивности подобное манипулирование суммами, вообще говоря, некорректно. Однако, если $x_0 \leq z \leq y \leq x$, но не $x_0 \leq y \leq x$, то $\eta_{x_0zy} = 0$ и потому $f(z)\zeta(z, y)\mu(y, x)\eta_{x_0zx}\eta_{zyx} = f(z)\zeta(z, y)\mu(y, x)\eta_{x_0zy}\eta_{x_0yx} = 0$. И наоборот, если $x_0 \leq z \leq y \leq x$, но не $x_0 \leq z \leq x$, то $\eta_{zyx} = 0$ и потому $f(z)\zeta(z, y)\mu(y, x)\eta_{x_0zx}\eta_{zyx} = 0$. $\square$

Аналогично доказывается и следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Пусть кольцо R коммутативно и множество X снабжено частичным η -порядком. Пусть также $f, g : X \rightarrow R$. Тогда если для некоторого $x_0 \in X$ выполняется $g(x) = \sum_{z \in [x, x_0]_\eta} f(z)\eta_{xzx_0}$ для всех $x \leq x_0$, то для $x \leq x_0$:

$$f(x) = \sum_{y \in [x, x_0]_\eta} \mu(x, y)g(y)\eta_{yx_0}.$$

Для функции Мёбиуса обобщенной алгебры инцидентности сохраняются следующие свойства, приведенные для классически алгебр инцидентности в книге [6].

PROPOSITION 3. Пусть кольцо R коммутативно и множество X снабжено частичным η -порядком. Тогда функция Мёбиуса μ удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $\mu(x, x) = 1$ для всех $x \in X$;
- 2) для $x \neq y$ выполняются равенства

$$\sum_{z \in [x, y]_\eta} \mu(x, z)\eta_{xzy} = \sum_{z \in [x, y]_\eta} \mu(z, y)\eta_{xzy} = 0;$$

- 3) $\mu_X(x, y) = \mu_{[x, y]}(x, y)$, $\forall x, y \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1 и 2 непосредственно следуют из равенства

$$\delta(x, y) = (\mu\zeta)(x, y) = (\zeta\mu)(x, y).$$

Пункт 3 вытекает из предложения 1. $\square$

Особый класс обобщенных алгебр инцидентности представляют алгебры, у которых мультипликативные коэффициенты принимают значения либо 0, либо 1. Будем называть такие системы — $\{0, 1\}$ -мультипликативными системами.

PROPOSITION 4. Пусть кольцо R коммутативно и множество X снабжено частичным η -порядком, причем η является $\{0, 1\}$ -мультипликативной системой. Тогда

- 1) для любых $x, y \in X$ значение $\mu(x, y)$ является целым числом;
- 2) если $C_n(x, y)$ - множество положительных цепей длины n идущих от x до y в X , то $\mu(x, y) = |C_1(x, y)| - |C_2(x, y)| + |C_3(x, y)| - \dots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1 следует из предложения 1, если под целыми числами понимать подкольцо R порожденное единицей. Также $\zeta = \delta + \chi$, и $\mu = (\delta + \chi)^{-1} = \delta - \chi + \chi^2 - \chi^3 + \dots$, причем $\chi^n(x, y)$ равно числу положительных цепей из x в y , длины $n + 1$. Это доказывает пункт 2. $\square$

Пункт 3 предложения 3 сводит вычисление функции Мёбиуса над множеством X к вычислению функции Мёбиуса над множеством с 0 и 1. И хотя для произвольных мультипликативных систем значение $\mu(x, y)$ теряет свой смысл, верно следующее утверждение.

PROPOSITION 5. Пусть кольцо R коммутативно и множество X снабжено частичным $\{0, 1\}$ η -порядком и содержит 0 и 1. Тогда для $x_0 \in X \setminus \{0, 1\}$ выполняется равенство $\mu_X(0, 1) = \mu_{X \setminus \{x_0\}}(0, 1) + \mu_X(0, x_0)\mu_X(x_0, 1)\eta_{0x_01}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из следующих фактов:

$$\begin{aligned} 1) \mu(0, 1) &= \sum_{\substack{0=x_1 < x_2 < \dots < x_n=1 \\ \text{цепь положительна}}} (-1)^{n-1} \left(\prod_{i=2}^n \eta_{0x_i1} \right) \text{ (предложение 1),} \\ 2) \text{ для положительной цепи } 0 &= x_1 < \dots < x_k = x_0 = x_k < \dots < x_n = 1 \\ (-1)^{n-1} \prod_{i=2}^n \eta_{0x_i1} &= (-1)^{n-1} = (-1)^{k-1} (-1)^{n-k} = \\ &= (-1)^{k-1} \left(\prod_{i=2}^k \eta_{0x_ix_0} \right) \cdot (-1)^{n-k} \left(\prod_{i=k+1}^n \eta_{x_0x_i1} \right) \cdot \eta_{0x_01}. \quad \square \end{aligned}$$

Пусть R — коммутативное кольцо, множество X частично η -упорядочено, а множество Y частично μ -упорядочено. На декартовом произведении множеств $X \times Y$ введем отношение $\leq$ по следующему правилу: $(x_1, y_1) \leq (x, y)$ если и только если $x_1 \leq x$ в X и $y_1 \leq y$ в Y . Также определим мультипликативную систему $\eta\mu$: $\eta\mu_{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)} = \eta_{x_1x_2x_3}\mu_{y_1y_2y_3}$. Нетрудно заметить что множество $X \times Y$ является частично $\eta\mu$ -упорядоченным. Будем его называть *декартовым произведением* частично η -упорядоченного множества X и частично μ -упорядоченного множества Y .

PROPOSITION 6. Пусть R — коммутативное кольцо, множество X частично η -упорядочено, а множество Y частично μ -упорядочено. И пусть $Z = X \times Y$ — их декартово произведение. Тогда для $x_1, x_2 \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$

$$\mu_Z((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \mu_X(x_1, x_2)\mu_Y(y_1, y_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элемент $f \in I(X \times Y; R; \eta\mu)$ определенный по правилу: $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \mu_X(x_1, x_2)\mu_Y(y_1, y_2)$. Покажем что $\zeta_Z f = \delta_Z$. В самом деле,

$$\begin{aligned} &\zeta_Z f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \\ &= \sum_{(x_1, y_1) \leq (x, y) \leq (x_2, y_2)} \zeta_Z((x_1, y_1), (x, y)) f((x, y), (x_2, y_2)) \eta\mu_{(x_1, y_1), (x, y), (x_2, y_2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(x_1, y_1) \leq (x, y) \leq (x_2, y_2)} \zeta_X(x_1, x) \zeta_Y(y_1, y) \mu_X(x, x_2) \mu_Y(y, y_2) \eta_{x_1 x x_2} \eta_{y_1 y y_2} = \\
&= \sum_{x_1 \leq x \leq x_2} \left((\zeta_X(x_1, x) \mu_X(x, x_2) \eta_{x_1 x x_2}) \sum_{y_1 \leq y \leq y_2} \zeta_Y(y_1, y) \mu_Y(y, y_2) \eta_{y_1 y y_2} \right) = \\
&= \delta_X(x_1, x_2) \delta_Y(y_1, y_2) = \\
&= \delta_Z((x_1, y_1), (x_2, y_2)).
\end{aligned}$$

□

4. Общие соображения

Пусть R — коммутативное и множество X снабжено η -предпорядком. Найдем его радикал Джекобсона.

ЛЕММА 4 ([7]). Пусть $K = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ — контекст Мориты. Тогда

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(A) & M_0 \\ N_0 & J(B) \end{pmatrix},$$

где $M_0 = \{x \in M \mid xN \subseteq J(A)\}$ и $N_0 = \{y \in N \mid yM \subseteq J(B)\}$.

Используя индукционный шаг как при доказательстве [5, теорема 4.3] можно доказать утверждение

PROPOSITION 7. Пусть R — коммутативное кольцо и множество $X = \{x_i\}_1^n$ снабжено η -предпорядком. Тогда

$$J(I(X, R; \eta)) = \{f \in I(X, R; \eta) \mid \eta_{xyx} f(x, y) \in J(R) \text{ если } x \leq y, y \leq x\}.$$

Пусть теперь F — поле и множество X снабжено η -предпорядком. Введем отношение ' $\sim$ ' на X : $x \sim y$ если и только если $x \leq y$, $y \leq x$ и $\eta_{xyx} \neq 0$. Непосредственная проверка показывает что ' $\sim$ ' является отношением эквивалентности. В самом деле, если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $0 \neq \eta_{xyx} = \eta_{xyz} \eta_{yxz}$. Тогда $x \leq y$, $y \leq z$ и $\eta_{xyz} \neq 0$. По η -транзитивности имеем $x \leq z$. Аналогично $z \leq x$. Теперь

$$0 \neq \eta_{xyx} \eta_{zyx} = (\eta_{xyz} \eta_{yxz}) (\eta_{yzx} \eta_{zyx}) = (\eta_{yxz} \eta_{yzx}) (\eta_{xyz} \eta_{zyx}) = \eta_{xzx} (\eta_{xyz} \eta_{zyx}),$$

а значит $\eta_{xzx} \neq 0$. Иными словами $x \sim z$. Также очевидно что $x \sim x$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть F — поле и множество $X = \{x_i\}_1^n$ снабжено η -предпорядком. Тогда $J(I(X, F; \eta)) = \{f \in I(X, F; \eta) \mid f(x, y) = 0 \text{ если } x \sim y\}$.

Пусть $[r_1], \dots, [r_p]$ - различные классы эквивалентности относительно отношения ' $\sim$ '. Построим биекцию $\pi : X \rightarrow \{1..n\}$ по следующему правилу. Для $[r_1] = \{r_{11}, \dots, r_{n_1}\}$ положим $\pi(r_{11}) = 1, \pi(r_{12}) = 2, \dots, \pi(r_{n_1}) = n_1$.

В общем случае для $[r_k] = \{r_{k1}, \dots, r_{kn_k}\}$ положим $\pi(r_{kj}) = n_1 + \dots + n_{k-1} + j$.

Тогда отображение $x_i \mapsto x_{\pi(i)}$, $\eta_{ijk} \mapsto \eta_{\pi(i)\pi(j)\pi(k)}$ является изоморфизмом обобщенных алгебр инцидентности. Образ при этом отображении будем называть обобщенной алгеброй инцидентности в *блочной форме*. Стоит отметить что блочная форма не единственна.

Пусть алгебра инцидентности $K = I(X, F; \eta)$ над полем F представлена в блочной форме. Классы эквивалентности по отношению ' $\sim$ ' - $[r_1], \dots, [r_p]$ имеют вид:

$$[r_1] = \{x_1, \dots, x_{n_1}\}, [r_k] = \{x_{n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_k}\}, \quad n_p = n.$$

Покажем что каждый внедиагональный блок может принимать либо только нулевое значение, либо произвольное. Пусть $x \in [r_i], y \in [r_j], i \neq j$, и $x \leq y$. Для $x' \in [r_i]$ можно составить цепочку $x \leq x' \leq x \leq y$. В силу определения мультипликативной системы: $\eta_{xx'x} = \eta_{x'xy}\eta_{xyx}$. Т.к. $\eta_{xx'x} \neq 0$, то $0 \neq \eta_{x'xy}$ и $x' \leq x \leq y$, а тогда по η -транзитивности получаем $x' \leq y$.

Это позволяет на множестве $\hat{X} = \{[r_1], \dots, [r_p]\}$ определить отношение ' $\leq$ ' по правилу: пусть $x \in [r_i]$ и $y \in [r_j]$, тогда $[r_i] \leq [r_j]$ если и только если $x \leq y$. Пусть теперь $x \in [r_i], y \in [r_j]$ и $z \in [r_k], x \leq y \leq z$ и $\eta_{xyz} \neq 0$. Если $x' \sim x$, то из цепочки $x' \leq x \leq y \leq z$ получаем $\eta_{x'xy}\eta_{xyx} = \eta_{xyz}\eta_{x'xz}$. Как мы показали выше, $x' \leq y$ и $\eta_{x'xz} \neq 0$. Тогда $x' \leq y \leq z$ и $\eta_{x'yz} \neq 0$. Рассматривая оставшиеся два случая получаем, что если найдутся $x' \leq y' \leq z', x' \in [r_i]$ и $y' \in [r_j], z' \in [r_k]$, то коэффициенты η_{xyz} определены для всех $x \in [r_i], y \in [r_j]$ и $z \in [r_k]$ и одновременно равны или не равны нулю.

Теперь мы можем вернуться к вопросу о вложимости обобщенной алгебры инцидентности в кольцо формальных матриц со значением в поле.

ТЕОРЕМА 7. Пусть множество $X = \{x_i\}_1^n$ снабжено η -предпорядком и F — поле. Тогда обобщенную алгебра инцидентности $I(X, F; \eta)$ изоморфна подалгебре некоторого кольца формальных матриц порядка n со значением в поле F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебра инцидентности $I(X, F; \eta)$ представлена в блочной форме. Классы эквивалентности по отношению ' $\sim$ ' - $[r_1], \dots, [r_p]$ имеют вид:

$$[r_1] = \{x_1, \dots, x_{n_1}\}, [r_k] = \{x_{n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_k}\}, \quad n_p = n.$$

Фиксируем по одному элементу из каждого множества: $t_i \in r_i, 1 \leq i \leq p$. Рассмотрим идемпотент $e = \sum_{i=1}^p e_{x_{t_i}} \in I(X, F; \eta)$. Несложно проверить что алгебра $eI(X, F; \eta)e$ тоже является обобщенной алгеброй инцидентности. Обозначим ее

$I(\{x_{t_i}\}_{i=1}^p, F; \bar{\eta})$, причем множество $\{x_{t_i}\}_{i=1}^p$ является частично $\bar{\eta}$ -упорядоченным. В силу теоремы 3 эту алгебру можно вложить в кольцо формальных матриц — $M_p(F; \bar{\mu})$. Определим теперь кольцо формальных матриц $M_n(F; \mu)$, продолжив $\bar{\mu}$ на все тройки.

Для троек x_i, x_j, x_k где $x_i \sim x_j \sim x_k$, положим $\mu_{ijk} = \eta_{x_i x_j x_k}$. Также для всех пар x_i, x_j положим $\mu_{x_i x_i x_j} = \mu_{x_i x_j x_j} = 1$. И, наконец, для каждой тройки $1 \leq i, j, k \leq p$ положим $\mu_{x_{t_i} x_{t_j} x_{t_k}} = \bar{\mu}_{ijk}$. Если $\mu_{x_{t_i} x_{t_j} x_{t_k}} \neq 0$, то для $a \sim x_{t_i}, b \sim x_{t_j}, c \sim x_{t_k}$ положим $\mu_{abc} = \eta_{abc} \neq 0$, а иначе соответствующие коэффициенты μ_{abc} приравняем нулю. Несложно убедиться в том что эти четыре определения не противоречат друг другу.

Введем обозначения — блок отвечающий классу эквивалентности $[r_i]$ будем обозначать $E_{[r_i][r_i]}$, а блок стоящий на одной горизонтали с $E_{[r_i][r_i]}$ и на одной вертикали с $E_{[r_j][r_j]}$ обозначим $E_{[r_i][r_j]}$. Теперь определим произведение диагонального и внедиагонального блоков. Пусть это блоки $E_{[r_i][r_i]}$ и $E_{[r_i][r_j]}$, вкпе с блоками $E_{[r_i][r_j]}$ и $E_{[r_j][r_j]}$, $i \neq j$. Для каждой четверки a, a', a'', b' , где $a, a', a'' \in [r_i]$ и $b \in [r_j]$ мы хотим чтобы выполнялось

$$\mu_{aa'a''} \mu_{aa''b} = \mu_{aa'b} \mu_{a'a''b}.$$

А оставшиеся коэффициенты $\mu_{a''ab}, \mu_{a'ab}, \mu_{a'a'b}$ доопределим из соотношений вида $\mu_{aa'a} = \mu_{aa'b} \mu_{a'ab}$. Заметим, что если мы удовлетворим эти равенства, то будут верны и соответствующие равенства для любой перестановки тройки a, a', a'' . Так, к примеру, для четверки a, a'', a', b имеем

$$\mu_{aa''a'} \mu_{aa'b} = \mu_{aa'b} \frac{\mu_{a''a'a''}}{\mu_{aa'a''}} = \mu_{aa'b} \frac{\mu_{a''a'b} \mu_{a'a''b}}{\mu_{aa'a''}} = \mu_{a''a'b} \frac{\mu_{aa'b} \mu_{a'a''b}}{\mu_{aa'a''}} = \mu_{a''a'b} \mu_{aa''b}.$$

Это позволяет нам определить следующую индуктивную процедуру (обозначим ее $\Gamma_{[r_i],b}$). Для удобства обозначения положим $[r_i] = \{t_1, \dots, t_m\}$.

1) Положим $\mu_{t_1 t_2 b}$ равным произвольному ненулевому элементу поля F . Тогда из четверки t_1, t_2, t_1, b получаем что $\mu_{t_2 t_1 b} = \mu_{t_1 t_2 t_1} / \mu_{t_1 t_2 b}$.

2) Пусть мы уже определили коэффициенты $\mu_{aa'b}$ для $a, a' \in \{t_1, \dots, t_{k-1}\}$. Определим их для $a, a' \in \{t_1, \dots, t_k\}$. Для четверки $t_1 t_2 t_k b$ хотим чтобы выполнялось

$$\mu_{t_1 t_2 t_k} \mu_{t_1 t_k b} = \mu_{t_1 t_2 b} \mu_{t_2 t_k b}.$$

Положим $\mu_{t_1 t_k b}$ произвольному ненулевому элементу поля F . Тогда $\mu_{t_2 t_k b}$ определяется однозначно. Последовательное рассмотрение четверок вида t_i, t_{i+1}, t_k, b позволяет однозначно определить $\mu_{t_{i+1} t_k b}$ через $\mu_{t_i t_k b}$. Коэффициенты $\mu_{t_k t_i b}$ определим как $\mu_{t_i t_k t_i} / \mu_{t_i t_k b}$.

В силу замечания перед описанием процедуры, достаточно проверить кор-

ректность только для четверок вида t_i, t_{i+j}, t_k, b ; $j > 0$.

$$\begin{aligned}
 \mu_{t_i t_{i+j} b} \mu_{t_{i+j} t_k b} &= \mu_{t_i t_{i+j} b} \frac{\mu_{t_{i+j-1} t_{i+j} t_k} \mu_{t_{i+j-1} t_k b}}{\mu_{t_{i+j-1} t_{i+j} b}} = \mu_{t_i t_{i+j} b} \frac{\mu_{t_{i+j-1} t_{i+j} t_k}}{\mu_{t_{i+j-1} t_{i+j} b}} \mu_{t_{i+j-1} t_k b} = \\
 &= \mu_{t_i t_{i+j} b} \frac{\mu_{t_{i+j-1} t_{i+j} t_k}}{\mu_{t_{i+j-1} t_{i+j} b}} \frac{\mu_{t_{i+j-2} t_{i+j-1} t_k}}{\mu_{t_{i+j-2} t_{i+j-1} b}} \mu_{t_{i+j-2} t_k b} = \\
 &= \mu_{t_i t_{i+j} b} \frac{\mu_{t_{i+j-2} t_{i+j-1} t_k} \mu_{t_{i+j-1} t_{i+j} t_k}}{\mu_{t_{i+j-2} t_{i+j-1} b} \mu_{t_{i+j-1} t_{i+j} b}} \mu_{t_{i+j-2} t_k b} = \\
 &= \mu_{t_i t_{i+j} b} \frac{\mu_{t_{i+j-2} t_{i+j-1} t_{i+j}} \mu_{t_{i+j-2} t_{i+j} t_k}}{\mu_{t_{i+j-2} t_{i+j-1} t_{i+j}} \mu_{t_{i+j-2} t_{i+j} b}} \mu_{t_{i+j-2} t_k b} = \dots = \\
 &= \mu_{t_i t_{i+j} b} \frac{\mu_{t_{i+j-j} t_{i+j} t_k}}{\mu_{t_{i+j-j} t_{i+j} b}} \mu_{t_{i+j-j} t_k b} = \mu_{t_i t_{i+j} t_k} \mu_{t_i t_k b}.
 \end{aligned}$$

Аналогично определяем и процедуру $\Gamma_{a, [r_j]}$, $a \in [r_i]$. Теперь рассмотрим четверку a, a', b, b' ; $a, a' \in [r_i]$, $b, b' \in [r_j]$. Хотим что бы выполнялось $\mu_{aa'b} \mu_{abb'} = \mu_{aa'b'} \mu_{a'bb'}$, или иными словами $\frac{\mu_{aa'b}}{\mu_{aa'b'}} = \frac{\mu_{a'bb'}}{\mu_{abb'}}$. (*)

Это позволяет нам задать следующий порядок действий (процедура $\Gamma_{[r_i], [r_j]}$):

- 1) Для всех $b \in [r_j]$ реализуем $\Gamma_{[r_i], b}$;
- 2) Фиксируем $a_0 \in [r_i]$ и реализуем $\Gamma_{a_0, [r_j]}$.

3) Используя равенство (*) доопределяем оставшиеся коэффициенты $\mu_{abb'}$ через $\mu_{a_0 bb'}$, $\mu_{aa_0 b}$ и $\mu_{aa_0 b'}$.

Проверим корректность. Для произвольной четверки a, a', b, b' ; $a, a' \in [r_i]$, $b, b' \in [r_j]$:

$$\begin{aligned}
 \mu_{aa'b} \mu_{abb'} &= \mu_{aa'b} \frac{\mu_{aa_0 b'} \mu_{a_0 bb'}}{\mu_{aa_0 b}} = \mu_{aa'b} \mu_{a'a_0 b} \frac{\mu_{aa_0 b'} \mu_{a_0 bb'}}{\mu_{aa_0 b} \mu_{a'a_0 b}} = \mu_{aa'a_0} \mu_{aa_0 b} \frac{\mu_{aa_0 b'} \mu_{a_0 bb'}}{\mu_{aa_0 b} \mu_{a'a_0 b}} = \\
 &= \mu_{aa'a_0} \frac{\mu_{aa_0 b'} \mu_{a_0 bb'}}{\mu_{a'a_0 b}} = \mu_{aa'a_0} \mu_{aa_0 b'} \frac{\mu_{a_0 bb'}}{\mu_{a'a_0 b}} = \mu_{aa'b'} \mu_{a'a_0 b'} \frac{\mu_{a_0 bb'}}{\mu_{a'a_0 b}} = \mu_{aa'b'} \mu_{a'bb'}.
 \end{aligned}$$

Также для произвольной четверки a, b, b', b'' ; $a \in [r_i]$, $b, b', b'' \in [r_j]$:

$$\begin{aligned}
 \mu_{abb'} \mu_{ab'b''} &= \frac{\mu_{aa_0 b'} \mu_{a_0 bb'}}{\mu_{aa_0 b}} \frac{\mu_{aa_0 b''} \mu_{a_0 b'b''}}{\mu_{aa_0 b'}} = \frac{\mu_{aa_0 b''}}{\mu_{aa_0 b}} (\mu_{a_0 bb'} \mu_{a_0 b'b''}) = \\
 &= \frac{\mu_{aa_0 b''}}{\mu_{aa_0 b}} (\mu_{a_0 bb''} \mu_{b'b''}) = \mu_{abb''} \mu_{b'b''}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что если существовали коэффициенты вида $\eta_{aa'b}$, то заменяя каждый выбор произвольного $\mu_{aa'b}$ в алгоритме $\Gamma_{[r_i], [r_j]}$ на приравнивание коэффициенту $\eta_{aa'b}$ мы получим равенство $\mu_{aa'b} = \eta_{aa'b}$ для всех троек a, a', b . Если же существовали коэффициенты вида $\eta_{abb'}$, то можно "отзеркалить" алгоритм $\Gamma_{[r_i], [r_j]}$ и применить с учетом замечания выше. Все это будем так же называть алгоритмом $\Gamma_{[r_i], [r_j]}$.

Теперь рассмотрим произвольную четверку $a, b, c, d \in X$. Хотим установить взаимосвязь между введенными мультипликативными коэффициентами вида

$\mu_{xx'y}$, $x, x', y \in X$. Если $a \sim c$ и $a \not\sim b$, то $\mu_{abc} = 0$, т.к. $0 = \mu_{aba}$ (св-во блочной формы - μ_{bac} и μ_{baa} одновременно равны или не равны 0), потому равенство тождественно. Если $a \sim b \sim c$, то подобные четверки уже учтены в процедуре $\Gamma_{[r_i], [r_j]}$. Остаются 3 зависимости: пусть $a \sim a'$, и a, b, c лежат в разных классах эквивалентности, тогда

- 1) $\mu_{aa'b}\mu_{abc} = \mu_{aa'c}\mu_{a'bc}$ (четверка a, a', b, c);
- 2) $\mu_{baa'}\mu_{ba'c} = \mu_{bac}\mu_{aa'c}$ (четверка b, a, a', c);
- 3) $\mu_{bca'}\mu_{baa'} = \mu_{bca'}\mu_{caa'}$ (четверка b, c, a, a').

Заметим, что если мы потребуем выполнение условий 1) и 3), то условие 2) выполняется автоматически. В самом деле

$$\mu_{baa'}\mu_{ba'c} = \frac{\mu_{bca'}\mu_{caa'}}{\mu_{bca}}\mu_{ba'c} = \frac{\mu_{caa'}}{\mu_{bca}}(\mu_{bca'}\mu_{ba'c}) = \frac{\mu_{caa'}}{\mu_{bca}}(\mu_{a'ca'}) = 0.$$

Аналогично равна нулю и правая часть равенства в пункте 2). Пусть теперь мы уже определили $\mu_{aa'b}$ и с помощью него, имея $\mu_{abc} \neq 0$, определили $\mu_{aa'c}$. Пусть у нас также $\mu_{acd} \neq 0$. Тогда $0 \neq \mu_{abc}\mu_{acd} = \mu_{abd}\mu_{bcd}$. Т.е. мы можем определить $\mu_{aa'd}$ и через $\mu_{aa'b}$ и через $\mu_{aa'c}$. Но как легко видеть

$$\begin{aligned} \mu_{aa'd} &= \frac{\mu_{aa'c}\mu_{acd}}{\mu_{a'cd}} = \frac{(\mu_{aa'c}\mu_{a'bc})\mu_{acd}}{\mu_{a'bc}\mu_{a'cd}} = \frac{(\mu_{aa'b}\mu_{abc})\mu_{acd}}{\mu_{a'bd}\mu_{bcd}} = \frac{\mu_{aa'b}(\mu_{abc}\mu_{acd})}{\mu_{a'bd}\mu_{bcd}} = \\ &= \frac{\mu_{aa'b}(\mu_{abd}\mu_{bcd})}{\mu_{a'bd}\mu_{bcd}} = \frac{\mu_{aa'b}\mu_{abd}}{\mu_{a'bd}}. \end{aligned}$$

Таким образом, порядок применения пункта 1), при выражении $\mu_{aa'c}$ через $\mu_{aa'b}$, не важен. Аналогичное утверждение верно и для пункта 3).

Получаем следующий алгоритм.

Шаг 1. Выбрать классы эквивалентности $[r_i]$ и $[r_j]$, такие что произведения блоков $E_{[r_i], [r_i]}$ и $E_{[r_i], [r_j]}$ еще не были определены (на шаге 1 или 2), и применить процедуру $\Gamma_{[r_i], [r_j]}$.

Шаг 2. Применить пункты 1) и 3), указанные выше, покуда это возможно.

Шаг 3. Повторить шаги 1 и 2, пока мы не исчерпаем все варианты.

В результате мы получим мультипликативную систему μ , такую что $a \leq b \leq c$ влечет $\mu_{abc} = \eta_{abc}$. Это и завершает доказательство теоремы. $\square$

ЛЕММА 5 ([4]). Пусть $K_n(R : \{\eta_{ijk}\})$ — кольцо формальных матриц над коммутативным кольцом R порядка n и $\eta_{ijk} \in R$, $1 \leq i, j, k, \leq n$. Тогда $K_n(R : \{\eta_{ijk}\}) \cong M_n(R)$ если и только если все $\eta_{ijk} \in U(R)$.

В силу приведенной выше леммы, диагональные блоки элементов в обобщенной алгебре эквивалентности $I(X, F; \eta)$ изоморфны кольцу обыкновенных матриц над полем F , а значит Морита эквивалентны полю F .

PROPOSITION 8. Пусть F — поле и множество $X = \{x_i\}_1^n$ снабжено η -предпорядком. Тогда найдется такая мультипликативная система η' и частично η' -упорядоченное множество X' , что обобщенная алгебра инцидентности $I(X, F; \eta)$ Морита эквивалентна алгебре инцидентности $I(X', F; \eta')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра $I(X, F; \eta)$ Морита эквивалентна своей базисной алгебре (см. например [8, Теорема 6.16]). $\square$

В случае классической алгебры инцидентности, если у нас была информация о размерах диагональных блоков, то мы могли однозначно восстановить алгебру инцидентности на основе ее базисной алгебры. В случае же обобщенной алгебры инцидентности об однозначности речи идти уже не может, ибо соответствующее η' -упорядоченное множество определяется далеко не однозначно. Однако, если говорить об однозначности с точностью до изоморфизма, то указанное выше свойство сохраняется.

PROPOSITION 9. Пусть F — поле и множество $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ снабжено одновременно η -предпорядком и μ -предпорядком, причем $x \overset{\eta}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mu}{\sim} y$. Тогда если базисные алгебры $eI(X, F; \eta)e$ и $fI(X, F; \mu)f$ изоморфны, то изоморфны и алгебры $I(X, F; \eta)$ и $I(X, F; \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $eI(X, F; \eta)e = I(X', F; \eta')$ и

$$fI(X, F; \mu)f = I(X'', F; \mu').$$

В силу теоремы 4, не нарушая общности можно считать что $X' = X''$ и $\eta'_{abc} \neq 0 \Leftrightarrow \mu'_{abc} \neq 0, \forall a, b, c \in X'$. Это непосредственно влечет что $\eta_{abc} \neq 0 \Leftrightarrow \mu_{abc} \neq 0, \forall a, b, c \in X$.

Пусть алгебра инцидентности $I(X, F; \eta)$ представлена в блочной форме. Классы эквивалентности по отношению ' $\sim$ ' — $[r_1], \dots, [r_p]$ имеют вид:

$$[r_1] = \{x_1, \dots, x_{n_1}\}, [r_k] = \{x_{n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_k}\}, \quad n_p = n.$$

И пусть выполняется $e = \sum_{i=1}^p e_{x_{t_i}}$, где $t_i \in r_i, 1 \leq i \leq p$. Построим отображение $g : X \times X \rightarrow F^*$, такое что $\mu_{abc}g(a, b)g(b, c) = \eta_{abc}g(a, c)$ для любой тройки $a \leq b \leq c \in X$. В силу той же теоремы 4, можно считать что у нас уже заданы элементы $g(t_i t_j), 1 \leq i, j \leq p$.

Если $a \sim a' \sim t_j \in X$, то используя явный вид изоморфизма из леммы 5, можно положить $g(a, a') = \eta_{t_j a a'} \mu_{t_j a a'}^{-1}$. Легко убедиться что это определение корректно.

Пусть теперь $a_0 \sim a \not\sim b \sim b_0 \in X$, где $a_0, b_0 \in \{t_i\}_{i=1}^p$. Тогда применяя два раза требуемое условие, получаем что мы хотим чтобы выполнялось:

$$\mu_{a_0 a b} \mu_{a_0 b b_0} g(a_0, a) g(a, b) g(b, b_0) = \eta_{a_0 a b} \eta_{a_0 b b_0} g(a_0, b_0),$$

или иными словами

$$g(a, b) = g(a_0, b_0) \frac{1}{g(a_0, a)g(b, b_0)} \frac{\eta_{a_0ab}\eta_{a_0bb_0}}{\mu_{a_0ab}\mu_{a_0bb_0}}.$$

Это позволяет доопределить оставшиеся элементы $g(a, b)$. Проверим корректность такого определения. Пусть $\eta_{abc} \neq 0$, $a \sim a_0, b \sim b_0, c \sim c_0$ и $a_0, b_0, c_0 \in \{t_i\}_{i=1}^p$. Тогда

$$\begin{aligned} g(a, b)g(b, c) &= \\ &= \left(g(a_0, b_0) \frac{1}{g(a_0, a)g(b, b_0)} \frac{\eta_{a_0ab}\eta_{a_0bb_0}}{\mu_{a_0ab}\mu_{a_0bb_0}} \right) \left(g(b_0, c_0) \frac{1}{g(b_0, b)g(c, c_0)} \frac{\eta_{b_0bc}\eta_{b_0cc_0}}{\mu_{b_0bc}\mu_{b_0cc_0}} \right) = \\ &= (g(a_0, b_0)g(b_0, c_0)) \frac{1}{g(a_0, a) [g(b, b_0)g(b_0, b)] g(c, c_0)} \frac{(\eta_{a_0ab}\eta_{a_0bb_0})(\eta_{b_0bc}\eta_{b_0cc_0})}{(\mu_{a_0ab}\mu_{a_0bb_0})(\mu_{b_0bc}\mu_{b_0cc_0})} = \\ &= \frac{\eta_{a_0b_0c_0}}{\mu_{a_0b_0c_0}} \frac{\mu_{bb_0b}}{\eta_{bb_0b}} \frac{1}{g(a_0, a)g(b, b)g(c, c_0)} \frac{(\eta_{a_0ab}\eta_{a_0bb_0})(\eta_{b_0bc}\eta_{b_0cc_0})}{(\mu_{a_0ab}\mu_{a_0bb_0})(\mu_{b_0bc}\mu_{b_0cc_0})} = \\ &= \frac{1}{g(a_0, a)g(c, c_0)} \frac{\mu_{bb_0b}}{\eta_{bb_0b}} \frac{(\eta_{a_0ab}\eta_{a_0bb_0})\eta_{a_0b_0c_0}(\eta_{b_0bc}\eta_{b_0cc_0})}{(\mu_{a_0ab}\mu_{a_0bb_0})\mu_{a_0b_0c_0}(\mu_{b_0bc}\mu_{b_0cc_0})}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta_{a_0ab}\eta_{a_0bb_0})\eta_{a_0b_0c_0}(\eta_{b_0bc}\eta_{b_0cc_0}) &= (\eta_{a_0ab_0}\eta_{abb_0})\eta_{a_0b_0c_0}(\eta_{b_0bc}\eta_{b_0cc_0}) = \\ &= \eta_{abb_0}(\eta_{a_0ab_0}\eta_{a_0b_0c_0})(\eta_{b_0bc}\eta_{b_0cc_0}) = \eta_{abb_0}(\eta_{a_0ac_0}\eta_{ab_0c_0})(\eta_{b_0bc}\eta_{b_0cc_0}) = \\ &= \eta_{abb_0}\eta_{a_0ac_0}\eta_{b_0bc}(\eta_{ab_0c_0}\eta_{b_0cc_0}) = \eta_{abb_0}\eta_{a_0ac_0}\eta_{b_0bc}(\eta_{ab_0c}\eta_{acc_0}) = \\ &= (\eta_{a_0ac_0}\eta_{acc_0})\eta_{abb_0}(\eta_{ab_0c}\eta_{b_0bc}) = (\eta_{a_0ac}\eta_{a_0cc_0})\eta_{abb_0}(\eta_{ab_0b}\eta_{abc}) = \\ &= \eta_{abc}(\eta_{a_0ac}\eta_{a_0cc_0})(\eta_{ab_0b}\eta_{abb_0}) = \eta_{abc}\eta_{bb_0b}(\eta_{a_0ac}\eta_{a_0cc_0}). \end{aligned}$$

Таким образом

$$g(a, b)g(b, c) = \frac{1}{g(a_0, a)g(c, c_0)} \frac{\mu_{bb_0b}}{\eta_{bb_0b}} \frac{\eta_{abc}\eta_{bb_0b}(\eta_{a_0ac}\eta_{a_0cc_0})}{\mu_{abc}\mu_{bb_0b}(\mu_{a_0ac}\mu_{a_0cc_0})} = \frac{\eta_{abc}}{\mu_{abc}} g(a, c).$$

Теперь если мы обозначим матричные единицы алгебры $I(X, F; \eta)$ за E_{ab} , а матричные единицы алгебры $I(X, F; \mu)$ за E'_{ab} , то отображение $\varphi : I(X, F; \eta) \rightarrow I(X, F; \mu)$, действующее по правилу $\varphi(E_{ab}) = g(a, b)E'_{ab}$ и будет искомым. $\square$

Как мы видим, в Морита эквивалентной алгебре, η' -упорядоченное множество определяется далеко не однозначно. Приведенные выше рассуждения позволяют определить $\eta_{[r_i][r_j][r_k]}$ как 1, если $\eta_{xyz} \neq 0$ и 0 иначе, где $x \in [r_i]$, $y \in [r_j]$ и $z \in [r_k]$. Полученное множество коэффициентов обозначим $\hat{\eta} = \{\eta_{[r_i][r_j][r_k]} \mid 1 \leq i, j, k \leq p\}$. Мы определили алгебру инцидентности $I(\hat{X}, F; \hat{\eta})$, получаемую из исходной 'сжатием' классов эквивалентностей до одноэлементных блоков и соответствующим 'сжатием' остальных блоков. $\hat{X}$ уже является частично $\hat{\eta}$ -упорядоченным. Есть основания полагать, что можно определить стандартный вид Морита эквивалентной алгебры.

ГИПОТЕЗА 1 ($\{0, 1\}$ -гипотеза). Пусть F — поле и множество $X = \{x_i\}_1^n$ снабжено частичным η -порядком. Тогда алгебра $I(X, F; \eta)$ изоморфна алгебре с соответствующей $\{0, 1\}$ -мультипликативной системой.

Если эта гипотеза верна, то она имеет далеко идущие последствия. Так, к примеру, в теореме 4 если указанные в условии алгебры снабжены $\{0, 1\}$ -мультипликативной системой, то функция g тождественна равна 1. И потому критерий изоморфизма обобщенных алгебр инцидентности преобразуется в $\eta_{xyz} = 0 \Leftrightarrow \mu_{\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)} \neq 0 \forall x \leq y \leq z \in X$. Более того, в силу теоремы 9 и блочной формы обобщенной алгебры инцидентности, последняя формулировка сохранится и для η и μ -предпорядков.

При работе с классическими матрицами очень часто возникает понятие определителя. На случай колец формальных матриц это понятие было обобщено в работе [5]. Так для произвольного фиксированного i_0 можно положить $\det_{\eta}(A) := \det(\varphi(A))$, где $\varphi : A = (a_{ij}) \mapsto (\eta_{i_0 i j} a_{ij})$. Так же было показано, что для введенного определителя сохраняются все базовые свойства, такие как определитель произведения, равносильность обратимости определителя и обратимости матрицы и теорема Гамильтона–Кэли.

Фиксируем кольцо формальных матриц $K = M_n(F; \eta)$ над полем F . Можно считать что K представлено в блочной форме.

$$K = \begin{pmatrix} \boxed{K_1} & * & \dots & * \\ * & \boxed{K_2} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \boxed{K_p} \end{pmatrix}.$$

Здесь порядки колец матриц $K_1, \dots, K_p$ равны $n_1, \dots, n_p$ соответственно. Для матриц из $K_1, \dots, K_p$ можно определить $\det_{\eta}$, ограничив η на соответствующие тройки. Как легко видеть, в частности для $A \in K_1$ имеем

$$\det_{\eta}(A) = \det_{\eta}(\text{diag}(A, E_2, \dots, E_p)),$$

где $\text{diag}(M_1, \dots, M_p)$ — матрица составленная из диагональных блоков $M_i \in K_i$, а $E_2, \dots, E_p$ — единичные матрицы в соответствующих диагональных блоках.

ЛЕММА 6. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & * & \dots & * \\ * & \boxed{A_2} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \in M_{\eta}(F; \eta).$$

Тогда $\det_{\eta}(A) = \det_{\eta}(A_1) \cdot \dots \cdot \det_{\eta}(A_p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению

$$\det_{\eta}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right) \left(\prod_{i=1}^n \eta_{i_0 i \sigma(i)} \right).$$

Для $\sigma = (r_{11}, \dots, r_{1m_1}) \dots (r_{k1}, \dots, r_{km_k})$ выполняется

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^{m_1} \eta_{i_0 r_{1i} \sigma(r_{1i})} \right) &= \left(\prod_{i=1}^{m_1-1} \eta_{i_0 r_{1i} r_{1(i+1)}} \right) \eta_{i_0 r_{1m_1} r_{11}} = \dots = \\ &= \eta_{i_0 r_{11} r_{1m_1}} \left(\prod_{i=2}^{m_1-1} \eta_{r_{11} r_{1i} r_{1(i+1)}} \right) \eta_{i_0 r_{1m_1} r_{11}}. \end{aligned}$$

Пусть слагаемое $\left(\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right) \left(\prod_{i=1}^n \eta_{i_0 i \sigma(i)} \right)$ отлично от нуля. Тогда отличны от нуля и все $\eta_{i\sigma(i)i}$. С другой стороны, отличен от нуля и множитель $\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$, т.е. на множестве X выполняется $i \leq \sigma(i)$. Но тогда $i \leq \sigma(i) \leq \sigma^2(i) \leq \dots \leq i$. Таким образом $i \cong \sigma(i)$ для всех i . Имеем

$$\det_{\eta}(A) = \det_{\eta}(\text{diag}(A_1, \dots, A_p)) = \det_{\eta}(A_1) \cdot \dots \cdot \det_{\eta}(A_p).$$

□

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть F — поле и множество $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ снабжено η -предпорядком. Тогда $f \in I(X, F; \eta)$ обратим если и только если $\det(f|_{[x, x]_{\eta}}) \neq 0 \forall x \in X$.

5. Заключение

В настоящей статье обобщается теория алгебр инцидентности для колец формальных матриц над полем. Здесь получены первые результаты. Предполагается дать приложение этих результатов к проблеме изоморфизма колец формальных матриц. Также планируется найти приложения комбинаторного характера.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. П. А. Крылов Об изоморфизме колец обобщённых матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47. С. 456—463.
2. G. Tang, C. Li, Y. Zhou Study of Morita contexts // Comm. Algebra. 2014. Vol. 42. P. 1668—1681.
3. G. Tang, Y. Zhou A class of formal matrix rings // Linear Algebra Appl. 2013. Vol. 438. P. 4672—4688.
4. А. Н. Абызов, Д. Т. Тапкин О некоторых классах колец формальных матриц // Известия вузов. Математика. 2015. вып. 3. С. 1—12.

5. П. А. Крылов, А. А. Туганбаев Формальные матрицы и их определители // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2014. Т. 19, № 1. С. 65—119.
6. E. Spiegel, C. J. O'Donnell Incidence Algebras, New York: Marcel Dekker, 1997. 335p.
7. A. D. Sands Radicals and Morita contexts // *J. Algebra*. 1973. Vol. 24. P. 335—345.
8. A. Skowronski, K. Yamagata Frobenius algebras I: Basic representation theory, Zurich: European Mathematical Society, 2011. 650p.
9. M. Akkurt, E. Akkurt, P. Barker Automorphisms of structural matrix algebras // *Operators and Matrices*. 2013. Vol. 7. P. 431—439.
10. W. R. Belding Incidence rings of pre-ordered sets // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 1973. Vol. XIV. P. 481—509.
11. R. Brusamarello, D. W. Lewis Automorphisms and involutions on incidence algebras // *Linear and Multilinear Algebra*. 2011. Vol. 59. P. 1247—1267.
12. S. P. Coelho The automorphism group of structural matrix algebra // *Linear Algebra and its Appl.* 1993. Vol. 95. P. 35—58.
13. N. S. Khripchenko, B. V. Novikov Finitary incidence algebras // *Commun. Algebra*. 2009. Vol. 37. P. 1670—1676.
14. G.-C. Rota On the foundations of combinatorial theory: I, Theory of Mobius functions // *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw.* 1964. Vol. 2. P. 340—368.
15. W. Scharlau Automorphisms and Involutions of Incidence Algebras // *Lecture Notes in Mathematics*. 1975. Vol. 488. P. 340—350.
16. R. P. Stanley Structure of incidence algebras and their automorphism groups // *Bull. AMS*. 1970. Vol. 76. P. 1936—1939.

REFERENCES

1. Krylov, P. A. 2008, "Isomorphism of generalized matrix rings", *Algebra and Logic*, vol. 47, pp. 258—262
2. Tang, G., Li, C. & Zhou Y. 2014, "Study of Morita contexts", *Comm. Algebra*, vol. 42, pp. 1668—1681
3. Tang, G. & Zhou, Y. 2013, "A class of formal matrix rings", *Linear Algebra Appl*, vol. 438, pp. 4672—4688

4. Abyzov, A. N. & Tapkin, D. T. 2015, "On some classes of formal matrix rings" (Russian), *Izvestia Vuzov. Matematika*, № 3, pp. 1—12
5. Krylov, P. A. & Tuganbaev A. A. 2014, "Formal matrices and their determinants" (Russian), *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, vol. 19, № 1, pp. 65—119
6. Spiegel, E. & O'Donnell C. J. 1997, "Incidence Algebras", *New York: Marcel Dekker*, 335pp.
7. Sands, A. D. 1973, "Radicals and Morita contexts", *J. Algebra*, vol. 24, pp. 335—345.
8. Skowronski A. & Yamagata K. 2011 "Frobenius algebras I: Basic representation theory", *Zurich: European Mathematical Society*, 650p.
9. Akkurt, M., Akkurt, E. & Barker, P. 2013, "Automorphisms of structural matrix algebras", *Operators and Matrices*, vol. 7, pp. 431—439
10. Belding, W. R. 1973, "Incidence rings of pre-ordered sets", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XIV, pp. 481—509
11. Brusamarello, R. & Lewis D. W. 2011, "Automorphisms and involutions on incidence algebras", *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 59, pp. 1247—1267
12. Coelho S. P. 1993, "The automorphism group of structural matrix algebra", *Linear Algebra and its Appl.*, vol. 95, pp. 35—58
13. Khripchenko, N. S. & Novikov B. V. 2009, "Finitary incidence algebras", *Commun. Algebra.*, vol. 37, pp. 1670—1676
14. Rota, G.-C. 1964, "On the foundations of combinatorial theory: I, Theory of Mobius functions", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw.*, vol. 2, pp. 340—368.
15. Scharlau, W. 1975, "Automorphisms and Involutions of Incidence Algebras", *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 488, pp. 340—350
16. Stanley, R.P. 1970, "Structure of incidence algebras and their automorphism groups", *Bull. AMS*, vol. 76, pp. 1936—1939

Институт математики и механики

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

Получено 06.07.2015