

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 512.544

К УСЛОВИЮ МАКСИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

С. Р. Султанов (г. Рязань)

s.sultanov@rsu.edu.ru

Аннотация

Исследуются группы с ограничениями на подгруппы. Рассматриваются локально разрешимые группы с условием максимальности для подгрупп. Выделена подгруппа локально разрешимой группы, такая, что из выполнимости для неё условия максимальности следует выполнимость данного условия на всей группе.

Ключевые слова: Группа, условие максимальности, разрешимость, локальная разрешимость.

Библиография: 2 наименования.

TO CONDITION THE MAXIMAL CONDITION FOR SUBGROUPS OF A LOCALLY SOLVABLE GROUP

S. R. Sultanov

Abstract

Studied groups with restrictions on subgroups. Considered locally solvable groups with the maximal condition for subgroups. Selected subgroup of a locally solvable group, such that satisfiability for the conditions maximal condition should the feasibility of the conditions throughout the group.

Keywords: Group, the maximal condition, solvability, local solvability.

Bibliography: 2 titles.

1. Введение

Как известно, из выполнимости условия минимальности или максимальности для абелевых подгрупп разрешимой группы G следует выполнимость данного условия для произвольных её подгрупп. Более того, и для локально разрешимой группы из выполнимости условия минимальности для абелевых подгрупп следует, что сама группа является разрешимой черниковской ([1], с. 244). Однако, для условия максимальности подобное обобщение невозможно. Мы здесь определим подгруппу локально разрешимой группы такую, что из выполнимости на ней условия максимальности следует его выполнимость на самой группе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G — группа, $\{S_i\}_{i \in I}$ — множество классов сопряженных элементов группы G . Подгруппу H группы G мы назовем T_s -подгруппой группы G , если для каждого $i \in I$ $H \cap S_i \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 1. Если в разрешимой группе G существует её конечно порожденная T_s -подгруппа, то она совпадает с группой G .

Доказательство. Если группа G абелева, то утверждение очевидно. Пусть G — некоммутативная группа. Будем проводить доказательство индукцией по числу s — ступени разрешимости группы G .

Пусть $s = 2$ тогда имеем ряд коммутантов: $G > G' > G^2 = 1$ (под 1 понимаем единичную подгруппу группы G). Заметим, что G' — нормальный делитель группы G , и при естественном гомоморфизме φ группы G на фактор группу G/G' классы сопряженных элементов группы G переходят в классы сопряженных элементов фактор-группы G/G' .

Пусть T — конечно порожденная T_s -подгруппа группы G , тогда

$$T = (M) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Если $G = \bigcup_{i \in I} S_i$, где S_i — все различные классы сопряженных элементов данной группы G , то для каждого $i \in I$ найдем $q_i \in S_i \cap T$ и рассмотрим множество $\{\varphi(q_i)\}_{i \in I}$. Это множество содержит по представителю каждого класса сопряженных элементов группы $\varphi(G)$, но тогда в силу коммутативности фактор-группы G/G' ([2], с. 28), $\{\varphi(q_i)\}_{i \in I} = G/G'$.

Поскольку множество $\{q_i\}_{i \in I} \subset T$, то $G/G' = \langle a_1 G', \dots, a_n G' \rangle$. Действительно для каждого $i \in I$ $q_i = g_{i_1} \cdot g_{i_2} \cdot \dots \cdot g_{i_k}$, где $g_{i_l} \in M \cup M^{-1}$ ($l = \overline{1, k}$), и

$$q_i G' = (g_{i_1}) \cdot \dots \cdot (g_{i_k}) G' = (g_{i_1} G') (g_{i_2} G') \cdot \dots \cdot (g_{i_k} G'),$$

и следовательно $\{\varphi(q_i)\}_{i \in I}$ порождается множеством $\{a_1 G', \dots, a_n G'\}$. Отсюда следует, что группа $G = (M) G'$ поскольку каждый смежный класс

$$g G' \in \langle a_1 G', \dots, a_n G' \rangle,$$

и $G = \bigcup_{g \in G} gG'$.

Покажем, что если A — произвольная подгруппа группы G , а N — абелева нормальная подгруппа G такие, что $A \cdot N = G$, то $A \cap N$ — нормальная подгруппа группы G . Действительно $A \cap N$ — подгруппа G как пересечение подгрупп, и если $g \in A \cap N$, то для любого $x \in G$ найдутся $a \in A$ и $b \in N$ такие, что $x = ab$ и $x^{-1}gx = (ab)^{-1}g(ab) = b^{-1}a^{-1}gab = b^{-1}(a^{-1}ga)b$. Поскольку подгруппа N — нормальная и $g \in N$, то $a^{-1}ga \in N$, а тогда, в силу коммутативности N , $x^{-1}gx = b^{-1}b(a^{-1}ga) = a^{-1}ga \in A$. С другой стороны $x^{-1}gx \in N$, и следовательно $A \cap N$ — нормальная подгруппа G .

Заметим, что G' — нормальная абелева подгруппа группы G (коммутант $G^{(2)} = 1$); было показано, что $G = (M) \cdot G'$, поэтому, в силу вышеизложенного, $(M) \cap G'$ является нормальным делителем группы G .

Покажем, что $G' \subset (M)$. Действительно, подгруппа (M) содержит по предположению каждого класса сопряженных элементов группы G . Пусть $g \in G'$, тогда найдется $i \in I$ такой, что класс сопряженных элементов группы G $S_i \ni g$, в силу нормальности G' класс $S_i \subset G'$, и поскольку $S_i \cap (M) \neq \emptyset$, то $(M) \cap G'$ содержит класс S_i (в силу нормальности $(M) \cap G'$ в группе G), и следовательно $g \in M$.

Таким образом $G = (M) \cdot G' \subset (M) \cdot (M)$, следовательно $G = (M)$, и утверждение леммы справедливо для $s = 2$.

Пусть утверждение выполняется при $s < m$, покажем его справедливость при $s = m$.

При $s = m$ имеем ряд коммутантов:

$$G > G' > \dots > G^{(m-1)} > G^{(m)} = 1.$$

Рассмотрим фактор-группу $G/G^{(m-1)}$ ($G^{(m-1)}$ — нормальный делитель G в силу ([2], стр. 28)). Поскольку при гомоморфизме "на" образом коммутанта является коммутант, то

$$\begin{aligned} (G/G^{(m-1)})' &= G'/G^{(m-1)}, \quad (G/G^{(m-1)})^{(2)} = G^{(2)}/G^{(m-1)}, \dots, \\ (G/G^{(m-1)})^{(m-2)} &= G^{(m-2)}/G^{(m-1)}; \quad (G/G^{(m-1)})^{(m-1)} = G^{(m-1)}/G^{(m-1)} = 1, \end{aligned}$$

где 1 — единица как фактор группы $G/G^{(m-1)}$.

Таким образом фактор-группа $G/G^{(m-1)}$ имеет степень разрешимости $s_1 \leq m - 1$.

Пусть σ — естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу $G/G^{(m-1)}$. Рассмотрим образ $\sigma(T) = T'$. Поскольку T — конечно порожденная, то T' — конечно порожденная подгруппа в фактор-группе $G/G^{(m-1)}$ и

$$T' = \langle a_1 G^{(m-1)}, a_2 G^{(m-1)}, \dots, a_n G^{(m-1)} \rangle.$$

Поскольку T является T_s -подгруппой G и при гомоморфизме "на" классы сопряженных элементов прообраза переходят в классы сопряженных элементов образа, то T' является T_s -подгруппой группы $G/G^{(m-1)}$, и следовательно,

по предположению индукции $G/G^{(m-1)} = T'$. Тогда, применяя рассуждения, аналогичные проделанным выше при рассмотрении случая $s = 2$, получим, что из равенства $G = \bigcup_{g \in G} gG^{(m-1)}$ и включения $gG^{(m-1)} \subset (M)G^{(m-1)}$ для каждого элемента $g \in G$, выполняется равенство $G = (M)G^{(m-1)}$, а поскольку $G^{(m-1)}$ — абелева нормальная подгруппа G , то $(M) \cap G^{(m-1)}$ является нормальной подгруппой G и $G^{(m-1)} \subset (M)$, т.е. $G = (M)$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Очевидным образом из доказанной теоремы следует следующее утверждение

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если в разрешимой группе G найдется T_s -подгруппа с условием максимальности для подгрупп, то сама группа G удовлетворяет этому условию.*

Следующая теорема позволяет перенести этот результат на локально разрешимую группу.

ТЕОРЕМА 2. *Если в локально разрешимой группе G найдется T_s -подгруппа с условием максимальности для подгрупп, то сама группа G удовлетворяет этому условию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу локальной разрешимости группа G является RI -группой по теореме Мальцева ([1], с. 211). Пусть $\mu = \{H_i\}_{i \in I}$ — разрешимая инвариантная система группы G . Возьмем произвольную подгруппу H_{α_0} из μ , и покажем, что любая возрастающая цепочка подгрупп из системы μ , начинающаяся с H_{α_0} , будет конечной.

Действительно, пусть

$$H_{\alpha_0} < H_{\alpha_1} < \dots < H_{\alpha_n} < \dots \quad (1)$$

— возрастающая цепочка подгрупп из μ . По условию теоремы, в G найдется T_s -подгруппа T с условием максимальности для подгрупп. Пусть $G = \bigcup_{k \in K} S_k$, где

S_k — различные классы сопряженных элементов группы G , тогда для каждого $k \in K$ выберем по одному элементу $q_k \in S_k \cap T$, и полагаем $Q = \{q_k\}_{k \in K}$. Теперь, в каждой подгруппе H_{α_j} из цепочки (1) возьмем все q_k , попадающие в Q , они будут порождать подгруппу H'_{α_j} , т.е. $H'_{\alpha_j} = (Q \cap H_{\alpha_j})$. Очевидно $H'_{\alpha_j} < H'_{\alpha_{j+1}}$ для каждого натурального j , и таким образом получаем возрастающую цепочку подгрупп.

$$H'_{\alpha_0} < H'_{\alpha_1} < \dots < H'_{\alpha_n} < \dots \quad (2)$$

Поскольку эта цепочка состоит из подгрупп группы T , то цепочка (2) оборвется на некотором номере $j = l$, т.е. $H'_{\alpha_m} = H'_{\alpha_l}$ при $m > l$. Покажем, что и цепочка (1) также оборвется на этом номере l . Допустим найдется номер $m > l$ такой, что $H'_{\alpha_m} \setminus H'_{\alpha_l} \neq \emptyset$, тогда, в силу нормальности подгрупп H_{α_j} , найдется

класс сопряженных элементов группы G , содержащийся в H_{α_m} и не пересекающийся с H_{α_l} . Следовательно, в подгруппе H'_{α_m} найдется элемент этого класса, не принадлежащий H'_{α_l} , поскольку H'_{α_l} является подгруппой H_{α_l} . Получили противоречие, следовательно, цепочка (1) оборвется на номере $j = l$. Таким образом, любая возрастающая цепочка из инвариантной системы μ будет конечной. Тогда не трудно показать, что группа G разрешима, и по теореме (1) группа $G = T$.

Теорема доказана. $\square$

2. Заключение

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - 3-е изд. - М.: Наука, 1982. - 288 с.
2. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. - М.: Наука, 1984. - 520 с.

REFERENCES

1. Kargapolov, M. I., Merzlyakov, Yu. I. "*Osnovy teorii grupp.*", [Foundations of group theory] 3rd edition, Nauka, Moscow, 288 p. (Russian)
2. Pontryagin, L. S. 1984, "*Nepreryvnye gruppy.*", [Continuous groups] Nauka, Moscow, 520 pp. (Russian)

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина.

Получено 29.04.2015