

УДК 514.133+514.174.5

РАЗБИЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПРАВИЛЬНЫМИ ОРИЦИКЛИЧЕСКИМИ n -ТРАПЕЦИЯМИ

Л. Н. Ромакина (г. Саратов)

Аннотация

Гиперболическая плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны реализуется на внешней относительно овальной линии области проективной плоскости P_2 , т. е. на идеальной области плоскости Лобачевского. В работах автора построены первые разбиения плоскости $\hat{H}$. Среди них есть серии нормальных, но не моноэдральных разбиений и серии моноэдральных разбиений, не являющихся нормальными. В данной работе построены серии первых нормальных моноэдральных разбиений плоскости $\hat{H}$.

Одним из топологических отличий плоскости $\hat{H}$ от плоскости Лобачевского Λ^2 является тот факт, что никакая прямая плоскости $\hat{H}$ не разбивает плоскость на части (набор чисел Бетти для плоскости $\hat{H}$: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, для плоскости Λ^2 : $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$). Вследствие этого основные известные методы построения разбиений плоскости Лобачевского не могут быть применены в разбиениях плоскости $\hat{H}$. В качестве исключения можно рассматривать схему разбиения плоскости Λ^2 , предложенную венгерским математиком К. Берёцким. В данной работе схема Берёцкого адаптирована к плоскости $\hat{H}$, с ее помощью построены нормальные моноэдральные разбиения плоскости $\hat{H}$ с одной удаленной параболической прямой. Подробно исследованы ячейки построенных разбиений — правильные орициклические n -трапеции. Правильной орициклической n -трапецией называем $(n+3)$ -реберник, два ребра которого — конгруэнтные отрезки параллельных гиперболических прямых, а остальные ребра — конгруэнтные между собой эллиптические отрезки, причем один из них служит внутренней хордой некоторого орицикла ω , а остальные n отрезков — внутренними хордами орицикла, концентрического с ω .

Для исследования ячеек разбиения в работе введена орициклическая система ортогональных криволинейных координат. Получены вспомогательные формулы площадей некоторых фигур на плоскости $\hat{H}$. Доказано, что площадь правильной орициклической n -трапеции можно выразить

с помощью введенной автором функции $\tilde{\alpha}$ угла квазипараллельности на плоскости $\hat{H}$, а длина бокового ребра не зависит от длины эллиптических ребер и равна $\rho \ln n$, где ρ — радиус кривизны плоскости $\hat{H}$.

Ключевые слова: гиперболическая плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны, правильная орициклическая n -трапеция, нормальное моноэдральное разбиение плоскости $\hat{H}$, схема Берёцкого.

Библиография: 19 названий.

PARTITIONS OF A HYPERBOLIC PLANE OF POSITIVE CURVATURE BY CORRECT HOROCYCLIC n -TRAPEZES

L. N. Romakina

Abstract

A hyperbolic plane $\hat{H}$ of positive curvature is realized on the external domain with respect to the oval curve of the projective plane P_2 , i.e. on the ideal domain of the Lobachevskii plane. In works of the author the first partitions of the plane $\hat{H}$ are constructed. Among them there are series of the normal, but not monohedral partitions and the series of the monohedral partitions which are not the normal. In this work the series of the first normal monohedral partitions of the plane $\hat{H}$ are constructed.

One of topological differences of the plane $\hat{H}$ from the Lobachevskii plane is in the following fact. No line of the plane $\hat{H}$ partitions the plane (the set of Betti numbers for the plane $\hat{H}$: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, for the plane Λ^2 : $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$). Therefore the main known methods of a construction of partitions of the Lobachevskii plane can not be applied in partitions of the plane $\hat{H}$. As an exception it is possible to consider the tiling scheme of the plane Λ^2 offered by the Hungarian mathematician K. Beretsky. In present work Beretsky's scheme is adapted for the plane $\hat{H}$. On the basis of this scheme the normal monohedral partitions of the plane $\hat{H}$ with one remote parabolic line are constructed. The cells of the constructed partitions are the correct horocyclic n -trapezes. They are in detail investigated in this work. The correct horocyclic n -trapeze called the $(n+3)$ -hedral which contain two congruent edges on the parallel hyperbolic lines. The other edges of $(n+3)$ -hedral are the congruent elliptic segments. One of them serves as an internal chord of some horocycle ω , and other n segments are the internal chords of the concentric with ω horocycle.

For research of the cells of partitions in present work the orthogonal horocyclic coordinate system is entered. Auxiliary formulas of the areas of some figures of the plane $\hat{H}$ are received. It is proved that the area of the correct horocyclic n -trapeze can be expressed by means of the function $\tilde{\alpha}$ of a quasiparallelism angle entered by the author on the plane $\hat{H}$. The length of the side edge no depend from the length of elliptic edges and is equal to $\rho \ln n$, where ρ is the radius of curvature of the plane $\hat{H}$.

Keywords: a hyperbolic plane $\hat{H}$ of positive curvature, a correct horocyclic n -trapeze, normal monohedral partitions of the plane $\hat{H}$, Beretsky's scheme.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

1.1. Постановка задачи

В проективной интерпретации Кэли – Клейна гиперболическая плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны реализована на идеальной области плоскости Лобачевского — внешней относительно овальной линии γ области проективной плоскости P_2 [1, стр. 210], [2]. Плоскость $\hat{H}$ имеет общую с плоскостью Лобачевского Λ^2 фундаментальную группу G , гомеоморфна бескрайнему листу Мёбиуса и является проективной моделью плоскости де Ситтера [3], [4], поскольку допускает реализацию на сфере действительного радиуса с отождествленными диаметрально противоположными точками в псевдоевклидовом пространстве R_1^3 .

В работах [5] – [8] построены первые разбиения плоскости $\hat{H}$. Простые разбиения на $\hat{H}$ [7] (см. также [9]), ячейкой которых является простой 4-контур [10], являются моноэдральными¹, но не являются нормальными² и не являются правильными³. В статье [6] построены первые нормальные разбиения плоскости $\hat{H}$, в том числе первые триангуляции данной плоскости, но описанные в этой статье разбиения, названные веерными, не являются моноэдральными. Нерешенной до настоящего времени оставалась обозначенная в работе [6] задача построения нормальных моноэдральных разбиений плоскости $\hat{H}$.

В данной работе, в параграфе 7, построим серии нормальных моноэдральных разбиений плоскости $\hat{H}$ с исключенной параболической прямой и подробно исследуем ячейки построенных разбиений — правильные орициклические n -трапеции. Аналогичные разбиения плоскости Лобачевского построены венгерским математиком К. Берёцким [11] при исследовании плотнейших упаковок и приведены в статье [12] В. С. Макарова как ответ на сформулированный применительно к плоскости Лобачевского второй вопрос восемнадцатой проблемы Гильберта о существовании неправильного моноэдрального разбиения, которое нельзя преобразовать в правильное некоторым перекладыванием его ячеек.

¹ Напомним, что разбиение плоскости называют *моноэдральным*, если фундаментальная группа плоскости действует транзитивно на множестве всех ячеек данного разбиения, т. е. любые две ячейки разбиения конгруэнтны.

² Разбиение плоскости называют *нормальным*, если любые две его ячейки удовлетворяют одному из следующих условий: 1) не имеют общих точек; 2) имеют одну общую точку, являющуюся вершиной разбиения; 3) имеют общее ребро.

³ Разбиение плоскости называют *правильным*, если группа симметрий данного разбиения действует транзитивно на множестве всех его ячеек.

Отметим, что топологические отличия плоскости $\hat{H}$ от плоскости Λ^2 не позволяют применять для ее разбиения основные методы, используемые в геометрии Лобачевского. Существенным препятствием адаптации указанных методов в геометрии плоскости $\hat{H}$ является тот факт, что никакая прямая не разбивает $\hat{H}$ на части, первое число Бетти плоскости $\hat{H}$ равно единице, а для плоскости Лобачевского это число равно нулю. В связи с этим возможность применения схемы Берёцкого в разбиениях плоскости $\hat{H}$ является уникальной, для адаптации этой схемы потребовалось исключить из плоскости $\hat{H}$ некоторую параболическую прямую.

Работу построим по следующему плану. В пп. 1.2, 1.3 напомним основные метрические формулы и определения (более подробно с ними можно познакомиться по книгам [2], [9]). В параграфе 2 приведем основные свойства орицикла плоскости $\hat{H}$. В параграфе 3 конструктивно определим правильную орициклическую n -трапецию и докажем, что для каждого натурального числа n , $n > 1$, существует однопараметрическое и не более чем однопараметрическое семейство определенных с точностью до движения правильных орициклических n -трапеций плоскости $\hat{H}$ (теорема 2). Элементарные свойства правильной орициклической n -трапеции докажем в параграфе 4. В параграфе 5 введем ортогональную орициклическую параметризацию плоскости $\hat{H}$, с помощью которой в параграфе 6 получим формулы выражения площади правильной орициклической n -трапеции. Построению разбиений плоскости $\hat{H}$ правильной орициклической n -трапецией посвятим параграф 7.

Основные результаты работы доложены на международных научных конференциях «Дни геометрии в Новосибирске» 2013, 2014 гг. и представлены в тезисах докладов [13], [14].

1.2. Типы прямых и углов плоскости $\hat{H}$

Плоскость $\hat{H}$ и плоскость Лобачевского Λ^2 являются компонентами расширенной гиперболической плоскости H^2 , т. е. проективной плоскости P_2 с фиксированной на ней овальной линией γ . Линию γ называют *абсолют* плоскостей $\hat{H}$, Λ^2 и H^2 . В отличие от плоскости Лобачевского на плоскости $\hat{H}$ существуют прямые трех типов.

Эллиптическими прямыми плоскости $\hat{H}$ называют прямые плоскости H^2 , $\hat{H} \subset H^2$, имеющие с абсолютной линией γ две общие мнимо сопряженные точки, *гиперболическими* прямыми — внешние относительно γ хорды прямых плоскости H^2 , пересекающих γ в двух вещественных точках, *параболическими* прямыми — касательные к абсолюту прямые плоскости H^2 .

Пучок прямых плоскости $\hat{H}$ называют *гиперболическим* (*эллиптическим*), если его центр — внешняя (внутренняя) относительно абсолюта точка. Пучок с центром на абсолют

 называют *параболическим*.

Каждые две прямые гиперболического (эллиптического) пучка называют *пересекающимися* (*расходящимися*) на плоскости $\hat{H}$. Каждые две прямые па-

параболического пучка называют *параллельными*.

Пара прямых плоскости $\hat{H}$ в зависимости от типов прямых и типа содержащего их пучка может представлять один из пятнадцати типов углов данной плоскости [2], [15]. Углы шести типов измеримы с помощью абсолюта, причем углам трех типов можно поставить в соответствие действительные меры.

Определим типы углов, используемых в данной работе.

Пусть a и b — параллельные гиперболические прямые плоскости $\hat{H}$, пересекающиеся в точке K на абсолюте. Плоскость $\hat{H}$ прямыми a, b разбита на две связные части, ту из этих частей, которая не содержит (содержит) проходящую через точку K параболическую прямую k называют *полосой* (*псевдополосой*) плоскости $\hat{H}$ между прямыми a, b , а прямые a, b — *сторонами* полосы (псевдополосы) между ними.

На рис. 1, a полоса между прямыми a, b выделена узором.

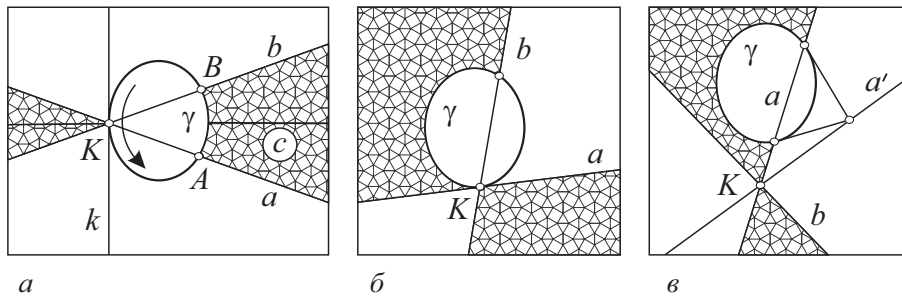


Рис. 1. Углы плоскости $\hat{H}$ с вершиной K между прямыми a, b : полоса и псевдополоса (a), параболические флаги ($б$), квазиуглы ($в$)

Прямую c пучка с центром K называют *биссектрисой* полосы между прямыми a, b , если выполняется равенство $(abck) = -1$.

Задание обхода абсолютной линии γ позволяет ввести ориентацию различных объектов плоскости $\hat{H}$ [9, параграфы 3.4, 3.5], в частности полос. Полосу плоскости $\hat{H}$ называют *направленной*, если ее стороны упорядочены. Обозначение: $\angle a, b$ (или MKN) — направленная полоса между прямыми a и b (MK и NK). Пусть прямая a (b) пересекает абсолютную линию γ в отличной от K точке A (B). Направленную полосу $\angle a, b$ называют *положительно* (*отрицательно*) *ориентированной*, если направление дуги AB , не содержащей точку K , совпадает с направлением заданного обхода абсолютной линии γ . На рис. 1, a при выделенном стрелкой обходе линии γ направленная полоса $\angle a, b$ ($\angle b, a$) является положительно (отрицательно) ориентированной.

Параллельные параболическая a и гиперболическая b прямые разбивают плоскость $\hat{H}$ на две связные части, каждую из которых называют *параболическим флагом* плоскости $\hat{H}$ между прямыми a, b . На рис. 1, $б$ один из смежных параболических флагов между прямыми a, b выделен узором.

Пусть гиперболическая a и эллиптическая b прямые плоскости $\hat{H}$ пересекаются в точке K , a' — ортогональная к a прямая пучка с центром K . Прямые

a, b разбивают плоскость $\hat{H}$ на две связные части, каждую из которых называют *квазиуглом* между прямыми a, b . По отношению друг к другу квазиуглы между прямыми a и b называют *смежными*. Тот квазиугол между прямыми a и b , который полностью содержит (не содержит) прямую a' , называют *гиперболическим* (*эллиптическим*) квазиуглом. На рис. 1, в эллиптический квазиугол между прямыми a, b выделен узором.

Полосы, псевдополосы и параболические флаги — неизмеримые углы плоскости $\hat{H}$. Каждые две полосы, псевдополосы, или каждые два параболических флага, конгруэнтны. Квазиуглы плоскости $\hat{H}$ измеримы с помощью абсолюта [2, пп. 4.3.4, 4.5.3].

Мера $\hat{ab}$ гиперболического (эллиптического) квазиугла между прямыми a, b , пересекающимися в точке K , определена равенством

$$\hat{ab} = i\frac{\pi}{2} + |\ln(a'bk_1k_2)| \quad \left(\hat{ab} = i\frac{\pi}{2} - |\ln(a'bk_1k_2)| \right),$$

где k_1, k_2 — параболические прямые пучка с центром K , a' — прямая пучка с центром K , ортогональная к гиперболической прямой a .

1.3. Основные метрические формулы

Приведем необходимые в работе метрические формулы, вывод которых можно найти в книге [2].

Каноническим репером второго типа плоскости $\hat{H}$ называют каждый проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, вершины A_1, A_2 и единичная точка E которого принадлежат абсолюту, а вершина A_3 является полюсом прямой A_1A_2 относительно абсолюта.

Семейство U^3 всех канонических реперов второго типа плоскости $\hat{H}$ зависит от трех параметров [2, п. 4.1.3]. Задание обхода абсолютной линии γ индуцирует ориентацию семейства U^3 [9, параграф 3.4].

Пусть указан некоторый обход ξ абсолютной линии γ . Репер R второго типа называют *правым* (*левым*), если при обходе ξ абсолютной линии γ единичная точка E репера R принадлежит направленной дуге A_1A_2 .

Уравнение абсолюта γ в каждом репере семейства U^3 имеет вид

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0. \quad (1)$$

Квадратичную форму $\varphi_2 = x_1x_2 - x_3^2$, заданную на векторном пространстве L_3 , порождающем проективную плоскость P_2 , $\hat{H} \subset P_2$, называют *метрической квадратичной формой*, а билинейную форму

$$\overline{\varphi}_2 = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_3x_3),$$

полярную к форме φ_2 , — *метрической билинейной формой* плоскости $\hat{H}$ в каноническом репере R второго типа.

Все используемые в работе координаты точек и прямых зададим в некотором каноническом репере второго типа.

Вещественные координаты (a_p) , $p = 1, 2, 3$, собственной (несобственной) точки плоскости $\hat{H}$ удовлетворяют условию

$$a_1 a_2 - a_3^2 < 0 \quad (a_1 a_2 - a_3^2 > 0). \quad (2)$$

Длину $|AB|$ отрезка между точками A, B эллиптической (гиперболической) прямой плоскости $\hat{H}$ можно выразить через вещественные координаты $(a_p), (b_p)$ данных точек по формуле

$$\cos \frac{|AB|}{\rho} = \pm \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2a_3 b_3}{2\sqrt{a_1 a_2 - a_3^2} \sqrt{b_1 b_2 - b_3^2}} \quad (3)$$

$$\left(\operatorname{ch} \frac{|AB|}{\rho} = \pm \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2a_3 b_3}{2\sqrt{a_1 a_2 - a_3^2} \sqrt{b_1 b_2 - b_3^2}} \right). \quad (4)$$

Аналитическое условие ортогональности точек $A(a_p), B(b_p)$ имеет вид

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2a_3 b_3 = 0, \quad (5)$$

следовательно, полюру точки $A(a_p)$ относительно абсолютной линии γ в репере R можно задать уравнением

$$a_2 x_1 + a_1 x_2 - 2a_3 x_3 = 0. \quad (6)$$

В однородных тангенциальных координатах (X_p) абсолютная овальная линия γ задана уравнением

$$4X_1 X_2 - X_3^2 = 0.$$

Координаты (a_p) эллиптической (гиперболической) прямой плоскости $\hat{H}$ удовлетворяют условию

$$4a_1 a_2 - a_3^2 > 0 \quad (4a_1 a_2 - a_3^2 < 0). \quad (7)$$

Аналитическое условие ортогональности прямых $a(a_p), b(b_p)$ имеет вид

$$2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 - a_3 b_3 = 0. \quad (8)$$

2. Орицикл плоскости $\hat{H}$

Орициклом плоскости $\hat{H}$ называют собственную овальную линию, касающуюся абсолюта в четырех слившихся точках [9], [16] и имеющую с абсолютом четыре общие совпавшие касательные. Общую точку (касательную) орицикла и

абсолюта называют *центром* (*базой*) орицикла. Каждую прямую, проходящую через центр орицикла и отличную от его базы, называют *осью* орицикла.

Орицикл плоскости $\hat{H}$ обладает следующими общими с орициклом плоскости Лобачевского свойствами.

Пусть A — собственная точка плоскости $\hat{H}$, K — точка абсолюта. Орицикл с центром K , проходящий через точку A , является множеством всех точек M плоскости $\hat{H}$, для которых углы AMK и MAK конгруэнтны [9, теорема 2.4.20].

Орицикл симметричен относительно каждой своей оси [9, теорема 2.4.21]. В каждой собственной точке орицикла плоскости $\hat{H}$ существует эллиптическая касательная, ортогональная оси орицикла, проведенной через данную точку [9, теорема 2.4.22].

Орицикл является траекторией движения точки при параболическом сдвиге плоскости $\hat{H}$ [9, параграф 3.9], называемом также орициклическим поворотом.

В доказательстве теоремы 2 потребуется следующее свойство оси орицикла.

ТЕОРЕМА 1. *Серединный перпендикуляр к внутренней эллиптической хорде орицикла плоскости $\hat{H}$ является осью данного орицикла.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω — орицикл плоскости $\hat{H}$ с центром A_1 , AB — внутренняя эллиптическая хорда орицикла ω . Отличную от A_1 точку пересечения прямой AA_1 (BA_1) с абсолютом обозначим A_2 (E), а полюс прямой A_1A_2 относительно абсолюта — A_3 . В каноническом репере $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ второго типа точку A на прямой A_1A_2 ($0 : 0 : 1$) зададим координатами $(-q : 1 : 0)$. Тогда орицикл ω в репере R можно задать [2, п. 2.4.3] уравнением

$$qx_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad q \in \mathbb{R}_+,$$

а точку $B = A_1E \cap \omega$ — координатами $(1 - q : 1 : 1)$.

Эллиптическая прямая AB задана в репере R координатами $(1 : q : -1)$, поэтому согласно первому условию из (7) $4q > 1$. Точка K пересечения прямой AB с базой A_1A_3 ($0 : 1 : 0$) орицикла ω задана в R координатами $(1 : 0 : 1)$ и вместе с точкой Q ($1 - 2q : 2 : 1$) гармонически разделяет пару точек A, B , т. е. $(ABKQ) = -1$. Кроме того, на основании условия (5) точки K и Q ортогональны. Следовательно, K и Q являются серединами отрезков, определенных на эллиптической прямой точками A и B . Точка K принадлежит базе орицикла ω , следовательно является внешней относительно ω . Таким образом, Q — середина внутренней относительно ω хорды AB .

Прямую h , ортогональную прямой AB и проходящую через точку Q , согласно условию (8) можно задать в репере R координатами $(0 : 1 : -2)$. Точка A_1 принадлежит прямой h , следовательно, h — ось орицикла ω .

Что и требовалось доказать. $\square$

В п. 4.5 докажем еще одно свойство орицикла, теорему 8 о длине внешней хорды, стягивающей параболическую дугу орицикла.

3. Правильная орициклическая n -трапеция

3.1. Определение

Пусть ω_q, ω_p — орициклы плоскости $\hat{H}$ с центром K ; AB — внутренняя эллиптическая хорда орицикла ω_p ; n — натуральное число. Точки пересечения орицикла ω_q с параллельными прямыми AK и BK обозначим соответственно Q_0, Q_n . На дуге Q_0Q_n орицикла ω_q , начиная от точки Q_0 , построим последовательно точки $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ так, чтобы прямые $Q_{j-1}Q_j$, $j = \overline{1, n}$, были эллиптическими. Обозначим через b_j внутреннюю хорду орицикла ω_q на прямой $Q_{j-1}Q_j$. Совокупность отрезков $AQ_0, b_1, \dots, b_n, Q_nB, BA$, циклически соединяющих точки $A, Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}, Q_n, B$, назовем n -трапецией, вписанной в кольцо между орициклами ω_q, ω_p , или, кратко, орициклической n -трапецией. Обозначение: AQ_0Q_nB — орициклическая n -трапеция.

Точки $A, Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}, Q_n, B$ назовем *вершинами*, отрезок AB — *основным ребром*, или *основанием*, а отрезки AQ_0, BQ_n на параллельных гиперболических прямых — *боковыми ребрами* орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB . Ломаную, составленную из всех отрезков $b_1, \dots, b_n$ эллиптических прямых, назовем *купол*, а каждый из отрезков $b_1, \dots, b_n$ — *ребром купола* орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB . Прямую, содержащую основание, ребро купола или боковое ребро орициклической n -трапеции, назовем соответственно *стороной основания*, *стороной купола* или *боковой стороной*.

Орицикл ω_p (ω_q) назовем *основным* (*купольным*) орициклом орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB .

Орициклическую n -трапецию назовем *простой*, если она не имеет точек самопересечения.

Согласно построению все точки орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB являются собственными для плоскости $\hat{H}$ и принадлежат полосе между боковыми сторонами AK, BK . Следовательно, являясь замкнутой ломаной, простая орициклическая n -трапеция AQ_0Q_nB разбивает плоскость H^2 , где $\hat{H} \subset H^2$, на две связные части, одна из которых гомеоморфна открытому диску, другая — листу Мёбиуса без края. Область ϑ , ограниченную простой орициклической n -трапецией AQ_0Q_nB , гомеоморфную открытому диску и, следовательно, полностью принадлежащую плоскости $\hat{H}$, назовем *внутренностью* n -трапеции AQ_0Q_nB . Далее под простой орициклической n -трапецией будем понимать саму n -трапецию с ее внутренностью.

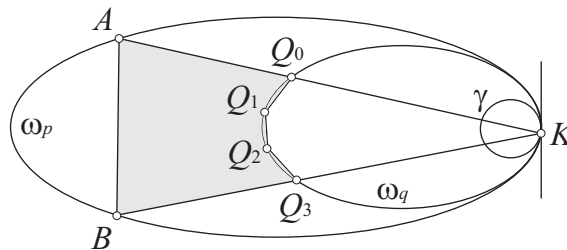


Рис. 2. Правильная орициклическая 3-трапеция AQ_0Q_3B

Правильной орициклической n -трапецией назовем простую орициклическую n -трапецию, все купольные ребра которой конгруэнтны основанию. На рис. 2 схематично изображена правильная орициклическая 3-трапеция.

3.2. Теорема существования однопараметрического семейства правильных орициклических n -трапеций

ТЕОРЕМА 2. *На плоскости $\hat{H}$ для каждого натурального значения n , $n > 1$, существует и притом однопараметрическое семейство определенных с точностью до движения правильных орициклических n -трапеций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первой части доказательства теоремы для каждого натурального значения n , $n > 1$, построим однопараметрическое семейство $\mathfrak{T}_n$ правильных орициклических n -трапеций. Во второй части — покажем, что любая определенная с точностью до движения правильная орициклическая n -трапеция плоскости $\hat{H}$ принадлежит семейству $\mathfrak{T}_n$.

I. Выберем на плоскости $\hat{H}$ произвольно орицикл ω_q с центром K и базой k . На параболической прямой k с несобственной точкой K построим последовательность точек $T_0, T_1, \dots, T_n$ так, чтобы при любом натуральном значении v , $v = \overline{1, n-1}$, точка T_v была серединой отрезка $T_{v-1}T_{v+1}$:

$$(T_{v-1}T_{v+1}, T_v) = -(T_{v-1}T_{v+1}T_vK) = 1. \quad (9)$$

В силу требования (9) согласно теореме 1 из [7] существует единственный параболический сдвиг f плоскости $\hat{H}$, при котором

$$T_v = f(T_{v-1}). \quad (10)$$

Поляры точек $T_0, T_1, \dots, T_n$ относительно абсолюта обозначим соответственно $p_\gamma(T_0), p_\gamma(T_1), \dots, p_\gamma(T_n)$. Точки $T_0, T_1, \dots, T_n$ принадлежат прямой k , следовательно, прямые $p_\gamma(T_0), p_\gamma(T_1), \dots, p_\gamma(T_n)$ проходят через точку K на абсолюте, т. е. параллельны и являются осями орицикла ω_q . Условие (10) равносильно условию

$$p_\gamma(T_v) = f(p_\gamma(T_{v-1})), \quad (11)$$

а согласно требованию (9) при любом значении v , $v = \overline{1, n-1}$, прямая $p_\gamma(T_v)$ является биссектрисой полосы между прямыми $p_\gamma(T_{v-1}), p_\gamma(T_{v+1})$.

Точки

$$Q_0 = p_\gamma(T_0) \cap \omega_q, \quad Q_1 = p_\gamma(T_1) \cap \omega_q, \quad \dots, \quad Q_n = p_\gamma(T_n) \cap \omega_q$$

принадлежат инвариантному при параболическом сдвиге f орициклу ω_q , и согласно условию (11) справедливо равенство $Q_v = f(Q_{v-1})$. Поэтому для последовательности отрезков

$$b_1 = Q_0Q_1, \quad b_2 = Q_1Q_2, \quad \dots, \quad b_n = Q_{n-1}Q_n,$$

внутренних хорд орицикла ω_q , выполняется условие $b_v = f(b_{v-1})$. Следовательно, отрезки $b_1, b_2, \dots, b_n$ конгруэнтны.

Докажем в принятых обозначениях следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Для каждого орицикла ω_q и заданной на его базе последовательности точек $T_0, T_1, \dots, T_n$, $n > 1$, существует единственный концентрический с ω_q орицикл ω_p такой, что отрезки $b_1, b_2, \dots, b_n$ конгруэнтны основанию AB вписанной в кольцо между орициклами ω_p, ω_q орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB , где $A = p_\gamma(T_0) \cap \omega_p$, $B = p_\gamma(T_n) \cap \omega_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отдельно рассмотрим случаи четного и нечетного n .

1. Пусть n принимает четные значения.

Выберем канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ второго типа так, чтобы его вершина A_1 совпала с центром K орицикла ω_q , тогда прямая k будет координатной прямой A_1A_3 . Вершину A_3 совместим с точкой $T_{n/2}$. Точку E поместим на касательную к абсолюту, проведенную через точку T_0 . Тогда в репере R точка T_0 будет задана координатами $(2 : 0 : 1)$.

Заметим, что при таком выборе репера R точка E совпадает с несобственной точкой прямой AK , следовательно, при положительной (отрицательной) ориентации направленной полосы между прямыми AK, BK репер R является правым (левым).

Параболический сдвиг f с неподвижной прямой k в репере R можно задать (см. [2, п. 3.9.1], [7]) невырожденной матрицей

$$\begin{pmatrix} \beta^2 & 1 & 2\beta \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & \beta & \beta^2 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0. \quad (12)$$

Действуя на точку $T_0(2 : 0 : 1)$ последовательно преобразованием f (12), найдем координаты в репере R точек T_v :

$$T_v(2(\beta + v) : 0 : \beta). \quad (13)$$

Поскольку репер R выбран таким образом, что точка $T_{n/2}$ совпадает с вершиной A_3 , т. е. координаты

$$\left(2\left(\beta + \frac{n}{2}\right) : 0 : \beta\right), \quad (0 : 0 : 1)$$

точек соответственно $T_{n/2}$ и A_3 пропорциональны, то

$$\beta = -\frac{n}{2}. \quad (14)$$

Подставляя выражение β из (14) в координаты (13), находим окончательно координаты точек T_v :

$$T_v(2(n - 2v) : 0 : n). \quad (15)$$

В частности, координаты точки T_n имеют вид $(-2 : 0 : 1)$.

Прямая $p_\gamma(T_0)$ задана в репере R координатами $(0 : -1 : 1)$. Используя координаты точки T_v (15) и уравнение (6) поляры точки относительно абсолюта, найдем координаты прямых $p_\gamma(T_v)$, $p_\gamma(T_n)$:

$$p_\gamma(T_v) (0 : 2v - n : n), \quad p_\gamma(T_n) (0 : 1 : 1). \quad (16)$$

Орициклы ω_p , ω_q с центром $K (1 : 0 : 0)$ зададим в репере R уравнениями:

$$\omega_p : px_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad p \in \mathbb{R}_+, \quad (17)$$

$$\omega_q : qx_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad q \in \mathbb{R}_+. \quad (18)$$

Тогда точка $A = p_\gamma(T_0) \cap \omega_p$ будет задана в R координатами $(1 - p : 1 : 1)$, ее поляра $p_\gamma(A)$ относительно абсолюта — координатами

$$p_\gamma(A) (1 : 1 - p : -2), \quad (19)$$

а точка $B = p_\gamma(T_n) \cap \omega_p$ — координатами $(1 - p : 1 : -1)$.

Сторона основания AB орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB — эллиптическая прямая. Длина σ_j , $j = 1, 2$, каждого отрезка между точками A , B , вычисленная по формуле (3), удовлетворяет равенству

$$\cos \frac{\sigma_j}{\rho} = \varepsilon_1 \frac{p-2}{p}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1. \quad (20)$$

Определим значение ε_1 в выражении (20), соответствующее длине $|AB|$ основания орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB .

Координаты эллиптической прямой AB имеют в репере R вид

$$(1 : p - 1 : 0), \quad (21)$$

поэтому согласно первому условию из (7) число p удовлетворяет неравенству

$$p > 1. \quad (22)$$

Поляра $p_\gamma(A)$ (19) точки A относительно абсолюта пересекает прямую AB (21) в точке $A^* (1 - p : 1 : 1 - p)$. Основание n -трапеции AQ_0Q_nB — внутренняя относительно орицикла ω_p хорда. Следовательно, точка $A_3 (0 : 0 : 1)$ пересечения прямой AB с базой $k (0 : 1 : 0)$ орицикла ω_p не принадлежит основанию данной n -трапеции.

Выразим число (ABA_3A^*) через параметр p :

$$(ABA_3A^*) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1-p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{p-2}{p}.$$

Расстояние между точками A , A^* равно $\pi\rho/2$, половине длины эллиптической прямой. Если пара точек A_3 , A^* разделяет (не разделяет) пару точек A , B , т. е. если $(ABA_3A^*) < 0$ ($(ABA_3A^*) > 0$), то основание AB орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB содержит (не содержит) точку A^* , следовательно является длинным (коротким) отрезком эллиптической прямой. Таким образом, справедливы утверждения:

$$|AB| < \frac{\pi\rho}{2} \iff p > 2, \quad |AB| > \frac{\pi\rho}{2} \iff p < 2. \quad (23)$$

В силу утверждений (23) в выражении (20) для основания AB n -трапеции AQ_0Q_nB получаем $\varepsilon_1 = 1$, т. е.

$$\cos \frac{|AB|}{\rho} = \frac{p-2}{p}. \quad (24)$$

Вычислим длину a попарно конгруэнтных купольных ребер $b_1, \dots, b_n$ n -трапеции AQ_0Q_nB .

Прямая $p_\gamma(T_{n/2})$ совпадает с координатной прямой $A_1A_2(0 : 0 : 1)$ репера R , следовательно, точка $Q_{n/2} = p_\gamma(T_{n/2}) \cap \omega_q$ задана в репере R координатами $(-q : 1 : 0)$. Прямая $p_\gamma(T_{n/2+1})$ имеет в R координаты $(0 : 2 : n)$ (см. (16)) и пересекает орицикл ω_q (18) в точке $Q_{n/2+1}$ с координатами

$$(4 - qn^2 : n^2 : -2n). \quad (25)$$

По определению правильной орициклической n -трапеции купольная сторона $Q_{n/2}Q_{n/2+1}$ n -трапеции AQ_0Q_nB , заданная в R координатами $(n : qn : 2)$, является эллиптической. На основании первого условия из (7) числа n , q удовлетворяют неравенству

$$qn^2 > 1. \quad (26)$$

По формуле (3) найдем длину v_j , $j = 1, 2$, каждого из отрезков между точками $Q_{n/2}$, $Q_{n/2+1}$:

$$\cos \frac{v_j}{\rho} = \varepsilon_2 \frac{qn^2 - 2}{qn^2}, \quad \varepsilon_2 = \pm 1. \quad (27)$$

Покажем, что длина a внутренней относительно орицикла ω_q хорды $Q_{n/2}Q_{n/2+1}$ удовлетворяет выражению (27) при $\varepsilon_2 = 1$.

Абсолютная поляра $p_\gamma(Q_{n/2})(1 : -q : 0)$ точки $Q_{n/2}$ пересекает прямую $Q_{n/2}Q_{n/2+1}$ в точке Q^* с координатами $(q : 1 : -qn)$, удаленной на прямой $Q_{n/2}Q_{n/2+1}$ от точки $Q_{n/2}$ на половину эллиптической прямой. Точка N пересечения прямых k и $Q_{n/2}Q_{n/2+1}$ имеет в R координаты $(-2 : 0 : n)$ и не принадлежит основанию n -трапеции AQ_0Q_nB .

В репере R справедливо выражение

$$(Q_{n/2}Q_{n/2+1}NQ^*) = \frac{qn^2 - 2}{qn^2}.$$

Поэтому длину a купольного ребра n -трапеции AQ_0Q_nB характеризуют следующие утверждения:

$$a < \frac{\pi\rho}{2} \iff qn^2 > 2, \quad a > \frac{\pi\rho}{2} \iff qn^2 < 2. \quad (28)$$

В силу утверждений (28) для величины a в выражении (27) $\varepsilon_2 = 1$, т. е.

$$\cos \frac{a}{\rho} = \frac{qn^2 - 2}{qn^2}. \quad (29)$$

На основании выражений (24), (29) равенство $|AB| = a$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$p = qn^2. \quad (30)$$

Требованием (30) орицикл ω_p определен однозначно. Таким образом, для заданного орицикла ω_q и любого четного числа n утверждение леммы справедливо.

2. Пусть теперь n — нечетное число.

На конечной дуге Q_0Q_n орицикла ω_q построим точки $V_1, V_2, \dots, V_n$, разбивающие пополам конечные дуги соответственно $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \dots, Q_{n-1}Q_n$. Построенные точки принадлежат биссектрисам полос соответственно $Q_0KQ_1, Q_1KQ_2, \dots, Q_{n-1}KQ_n$. Переобозначим построенные точки и купольные вершины n -трапеции AQ_0Q_nB следующим образом:

$$Q_0 = Q'_0, \quad V_1 = Q'_1, \quad Q_1 = Q'_2, \quad V_2 = Q'_3, \quad \dots, \quad V_n = Q'_{2n-1}, \quad Q_n = Q'_{2n}.$$

Орициклическая m -трапеция $AQ'_0Q'_mB$, вписанная в кольцо между орициклами ω_q, ω_p , содержит четное число $m = 2n$ попарно конгруэнтных купольных ребер. Присоединим к m -трапеции $AQ'_0Q'_mB$ репер R тем же способом, что и в рассуждениях пункта 1. Орициклы ω_q, ω_p зададим уравнениями соответственно (17), (18). Тогда точки A, B в репере R будут заданы координатами $(1-p : 1 : 1)$, $(1-p : 1 : -1)$, а длина $|AB|$ основания n -трапеции AQ_0Q_nB — определена формулой (24). Купольные вершины $Q'_{m/2-1}, Q'_{m/2+1}$ зададим согласно (25) координатами:

$$Q'_{m/2-1} (4 - qm^2 : m^2 : 2m), \quad Q'_{m/2+1} (4 - qm^2 : m^2 : -2m). \quad (31)$$

Внутренняя хорда $Q'_{m/2-1}Q'_{m/2+1}$ орицикла ω_q является купольным ребром орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB . Найдем длину a данной хорды. По формуле (3) выразим длину ϑ_j , $j = 1, 2$, каждого из отрезков между точками $Q'_{m/2-1}, Q'_{m/2+1}$:

$$\cos \frac{\vartheta_j}{\rho} = \varepsilon_3 \frac{qm^2 - 8}{qm^2}, \quad \varepsilon_3 = \pm 1. \quad (32)$$

Эллиптическая прямая $Q'_{m/2-1}Q'_{m/2+1}$ имеет в репере R координаты

$$(m^2 : qm^2 - 4 : 0) \quad (33)$$

при соответствующем первому требованию из (7) условию

$$qm^2 > 4. \quad (34)$$

Поляра точки $Q'_{m/2-1}$ относительно абсолюта задана в репере R координатами $(m^2 : 4 - qm^2 : -4m)$ и пересекает прямую $Q'_{m/2-1}Q'_{m/2+1}$ (33) в точке Q' с координатами $(8 - 2qm^2 : 2m^2 : 4m - qm^3)$, удаленной на прямой $Q'_{m/2-1}Q'_{m/2+1}$ от точки $Q'_{m/2-1}$ на половину эллиптической прямой. Точка $A_3(0 : 0 : 1)$ пересечения прямой $Q'_{m/2-1}Q'_{m/2+1}$ с базой k орицикла ω_q не принадлежит купольному ребру $Q'_{m/2-1}Q'_{m/2+1}$. Поэтому внутренняя хорда $Q'_{m/2-1}Q'_{m/2+1}$ является длинным (коротким) отрезком эллиптической прямой тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$(Q'_{m/2-1}Q'_{m/2+1}A_3Q') < 0, \quad ((Q'_{m/2-1}Q'_{m/2+1}A_3Q') > 0).$$

В репере R справедливо выражение

$$(Q'_{m/2-1}Q'_{m/2+1}A_3Q') = \frac{qm^2 - 8}{qm^2}.$$

Следовательно, длину a купольного ребра n -трапеции AQ_0Q_nB характеризуют утверждения

$$a < \frac{\pi\rho}{2} \iff qm^2 > 8, \quad a > \frac{\pi\rho}{2} \iff qm^2 < 8,$$

в силу которых для величины a в выражении (32) $\varepsilon_3 = 1$, т. е.

$$\cos \frac{a}{\rho} = \frac{qm^2 - 8}{qm^2}. \quad (35)$$

На основании выражений (24), (35) требование $|AB| = a$ равносильно условию $4p = qm^2$, которое при $m = 2n$ принимает вид (30) и однозначно определяет орицикл ω_p .

Отметим, что при $n = 1$ по условию (30) получаем $q = p$. В этом случае орициклы ω_q , ω_p совпадают, а орициклическая n -трапеция AQ_0Q_nB вырождается в отрезок AB . Таким образом, не существует простой орициклической 1-трапеции, купольное ребро которой конгруэнтно основанию.

Итак, для заданного орицикла ω_q и каждого нечетного значения n , $n > 1$, утверждение леммы справедливо.

Лемма доказана. $\square$

Выясним, при каких значениях параметра q орициклическая n -трапеция AQ_0Q_nB с конгруэнтными основанию купольными ребрами является простой. Для этого, сохраняя введенные обозначения, докажем две следующие леммы.

ЛЕММА 2. *Орициклическая n -трапеция плоскости $\hat{H}$ с конгруэнтными основанию купольными ребрами полностью принадлежит замыканию своего основного орицикла.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что при условии (30) каждая точка купольного орицикла ω_q принадлежит внутренности основного орицикла ω_p орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB .

Действительно, координаты точки A_2 удовлетворяют неравенству

$$px_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 > 0, \quad p \in \mathbb{R}_+, \quad (36)$$

определяющему в репере R одну из областей плоскости $\hat{H}$, ограниченную орициклом ω_p (18). Точка A_2 является внутренней относительно орицикла ω_p , так как принадлежит абсолютной линии γ . Следовательно, неравенство (36) определяет внутренность орицикла ω_p .

Пусть M — произвольная точка орицикла ω_q . В репере R точку M можно задать координатами $(m_1 : m_2 : m_3)$, удовлетворяющими уравнению (17) орицикла ω_q . При условии (30) соответственно равенству

$$qm_2^2 + m_1m_2 - m_3^2 = 0$$

запишем координаты точки M в репере R в виде

$$(n^2m_3^2 - pm_2^2 : n^2m_2^2 : n^2m_2m_3). \quad (37)$$

Координаты (37) удовлетворяют неравенству (36). Следовательно, произвольная точка M орицикла ω_q является внутренней относительно орицикла ω_p . Таким образом, купольный орицикл n -трапеции AQ_0Q_nB принадлежит внутренности ее основного орицикла.

Поскольку отрезки $b_1, \dots, b_n$ являются внутренними хордами купольного орицикла ω_q , а основание AB — внутренней хордой орицикла ω_p , то n -трапеция AQ_0Q_nB полностью принадлежит замыканию орицикла ω_p .

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 3. Орициклическая n -трапеция плоскости $\hat{H}$ с конгруэнтными основанием купольными ребрами симметрична относительно серединного перпендикуляра к основанию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h — серединный перпендикуляр к основанию AB орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB , S_h — симметрия плоскости $\hat{H}$ относительно гиперболической прямой h (см. [2, п. 4.7.2], [9, параграф 3.3]). По теореме 1 h является осью орицикла ω_p , т.е. $K \in h$. Из того, что $S_h(A) = B$, следует, что $S_h(AK) = BK$. Орициклы ω_p, ω_q концентрические, следовательно, h является осью и для орицикла ω_q . Учитывая, что

$$S_h(\omega_q) = \omega_q, \quad Q_0 = \omega_q \cap AK, \quad Q_n = \omega_q \cap BK,$$

получаем

$$S_h(Q_0) = Q_n. \quad (38)$$

По условию отрезки $b_1 = Q_0Q_1$, $b_n = Q_{n-1}Q_n$ эллиптических прямых конгруэнтны, следовательно, их длины равны. Это означает, что точка Q_1 (Q_{n-1}) принадлежит эллиптическому циклу [9, п. 2.4.2], [17] θ_0 (θ_n) с центром в точке Q_0 (Q_n) радиуса $|Q_0Q_1|$. В силу равенства (38) циклы θ_0 , θ_n симметричны относительно прямой h . Кроме того, точки Q_1 , Q_{n-1} принадлежат симметричным относительно h конечным дугам соответственно Q_0H , Q_nH орицикла ω_q , где H — точка пересечения прямой h и конечной дуги Q_0Q_n (при четном n точка H совпадает с вершиной $Q_{n/2}$ орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB). Следовательно,

$$S_h(Q_1) = Q_{n-1}. \quad (39)$$

Аналогичным образом для четного (нечетного) значения n последовательно докажем равенства:

$$S_h(Q_2) = Q_{n-2}, \dots, S_h(Q_{n/2-1}) = Q_{n/2+1}, S_h(Q_{n/2}) = Q_{n/2} \\ (S_h(Q_2) = Q_{n-2}, \dots, S_h(Q_{(n-1)/2}) = Q_{(n+1)/2}). \quad (40)$$

На основании условий (39), (40) орициклическая n -трапеция AQ_0Q_nB с конгруэнтными основанию купольными ребрами симметрична относительно серединного перпендикуляра h к основанию AB .

Лемма доказана. $\square$

Боковые ребра n -трапеции AQ_0Q_nB , отрезки AQ_0 и BQ_n , лежат на параллельных гиперболических прямых, следовательно не имеют общих точек. Согласно построению и любые два несмежных купольных ребра n -трапеции не имеют общих точек. Поэтому n -трапеция AQ_0Q_nB является простой тогда и только тогда, когда основание AB не имеет общих точек с куполом. Найдем аналитическую характеристику данного требования в репере R .

1. При четном значении n точку пересечения заданной в репере R координатами $(0 : 0 : 1)$ прямой $KQ_{n/2}$ с прямой AB обозначим через D , а с орициклом ω_p — через L . Согласно лемме 2 пара точек D , $Q_{n/2}$ не разделяет пару точек K , L . По лемме 3 орициклическая n -трапеция AQ_0Q_nB с конгруэнтными основанию AB купольными ребрами симметрична относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB . Следовательно, основание AB n -трапеции AQ_0Q_nB не имеет с куполом общих точек тогда и только тогда, когда пара точек K , D разделяет пару точек L , $Q_{n/2}$, т.е. тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $(KDQ_{n/2}L) < 0$.

Точки D и L в репере R можно задать координатами $(1 - p : 1 : 0)$ и $(-p : 1 : 0)$ соответственно. Поскольку в репере R справедливо выражение

$$(KDQ_{n/2}L) = \frac{1}{1 + q - p},$$

то при условии (30) неравенство $(KDQ_{n/2}L) < 0$ можно записать в виде

$$q > \frac{1}{n^2 - 1}. \quad (41)$$

Заметим, что при четном n и условии (30) система неравенств (26), (41) равносильна неравенству (41).

2. При нечетном n точка $Q_{(n-1)/2}$ совпадает с точкой $Q'_{m/2-1}$ (31). Точку пересечения прямой $KQ_{(n-1)/2}$ с прямой AB (21) обозначим через D , а с орициклом ω_p — через L . Основание AB n -трапеции AQ_0Q_nB не имеет с куполом общих точек тогда и только тогда, когда пара точек K, D разделяет пару точек $L, Q_{(n-1)/2}$, т.е. тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $(KDQ_{(n-1)/2}L) < 0$.

В репере R , введенном при доказательстве леммы 1 для нечетного n , прямая $KQ_{(n-1)/2}$ задана координатами $(0 : 2 : -m)$, поэтому точки D и L в R можно задать координатами соответственно $(m - pm : m : 2)$, $(4 - pm^2 : m^2 : 2m)$.

Учитывая выражение

$$(KDQ_{(n-1)/2}L) = \frac{m^2 - 4}{m^2(1 + q - p) - 4},$$

при условии (30) неравенство $(KDQ_{(n-1)/2}L) < 0$ запишем в виде

$$q > \frac{1}{n^2}. \quad (42)$$

Итак, при четном (нечетном) значении n неравенства (41) ((42)) характеризуют в репере R простую орициклическую n -трапецию AQ_0Q_nB с конгруэнтными основанию купольными ребрами.

Таким образом, для каждого натурального значения n , $n > 1$, существует однопараметрическое семейство Ω_n орициклов ω_q , параметр q которых удовлетворяет при четном (нечетном) значении n неравенству (41) ((42)), таких, что построенные указанным способом орициклические n -трапеции AQ_0Q_nB являются правильными.

При каждом фиксированном значении n семейство всех правильных орициклических n -трапеций, каждая из которых однозначно определена системой точек T_v и орициклом ω_q семейства Ω_n , обозначим $\mathfrak{T}_n$. Длина основания трапеции из семейства $\mathfrak{T}_n$ однозначно определена параметром q соответствующего ей орицикла семейства Ω_n (см. (29), (35)), следовательно, никакие две n -трапеции из $\mathfrak{T}_n$ не являются конгруэнтными.

Итак, для каждого натурального n , $n > 1$, существует однопараметрическое семейство $\mathfrak{T}_n$ правильных орициклических n -трапеций.

II. Докажем, что для каждого натурального n , $n > 1$, существует не более чем однопараметрическое семейство правильных орициклических n -трапеций, определенных с точностью до движения.

Пусть $A'Q'_0Q'_nB'$ — некоторая правильная орициклическая n -трапеция плоскости $\hat{H}$, не принадлежащая семейству $\mathfrak{T}_n$. Точку пересечения боковых сторон $A'Q'_0$, $B'Q'_n$ n -трапеции $A'Q'_0Q'_nB'$ на абсолютной линии γ обозначим K' , полюру

точки K' относительно абсолюта — k' , а отличную от точки K' точку пересечения прямой $A'Q'_0$ с абсолютом — E' . Точку пересечения с абсолютом серединного перпендикуляра h' к основанию $A'B'$, отличную от точки K' , обозначим A'_2 , а полюс прямой h' относительно линии γ — A'_3 .

Построим проективный репер $R' = \{K', A'_2, A'_3, E'\}$ и обозначим через p (q) параметр в репере R' орицикла ω'_p (ω'_q) с центром K' , содержащего точки A' , B' ($Q'_0, \dots, Q'_n$). Тогда в репере R' орицикл ω'_p (ω'_q) будет задан уравнением (18) ((17)). Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из первой части доказательства, координаты всех вершин n -трапеции $A'Q'_0Q'_nB'$ в репере R' можно однозначно выразить через параметры p , q и показать, что эти параметры удовлетворяют условию (30) и при четном (нечетном) значении n — условию (41) ((42)).

Из семейства $\mathfrak{T}_n$ выберем правильную орициклическую n -трапецию AQ_0Q_nB , координаты вершин которой в репере R имеют те же выражения через параметры p , q , что и координаты соответствующих вершин n -трапеции $A'Q'_0Q'_nB'$ в репере R' .

По основной теореме о проективных преобразованиях существует единственное проективное преобразование f плоскости P_2 , $\hat{H} \subset P_2$, при котором репер R переходит в репер R' , причем каждая точка X с координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ в репере R в преобразовании f переходит в точку X' с теми же координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ в репере R' . По построению R и R' — канонические реперы второго типа плоскости $\hat{H}$, значит, абсолютная овальная линия γ задана в них уравнением (1). Следовательно, линия γ инвариантна в преобразовании f . Тогда f — движение плоскости $\hat{H}$: $f \in G$.

Вершины n -трапеции AQ_0Q_nB заданы в репере R теми же координатами, что и соответствующие вершины n -трапеции $A'Q'_0Q'_nB'$ в репере R' , поэтому в преобразовании f n -трапеция AQ_0Q_nB переходит в n -трапецию $A'Q'_0Q'_nB'$. Следовательно, n -трапеции AQ_0Q_nB и $A'Q'_0Q'_nB'$ конгруэнтны.

Таким образом, какова бы ни была правильная орициклическая n -трапеция $A'Q'_0Q'_nB'$ плоскости $\hat{H}$, в семействе $\mathfrak{T}_n$ найдется конгруэнтная ей n -трапеция.

Что и требовалось доказать. $\square$

4. Элементарные свойства правильной орициклической n -трапеции

4.1. Симметричность

На основании леммы 3 справедливо следующее свойство правильной орициклической n -трапеции.

ТЕОРЕМА 3. *Правильная орициклическая n -трапеция плоскости $\hat{H}$ симметрична относительно серединного перпендикуляра к своему основанию.*

4.2. Принадлежность замыканию основного орицикла

Внутренность правильной орициклической n -трапеции — гомеоморфная открытому диску область плоскости $\hat{H}$, ограниченная данной n -трапецией, поэтому согласно лемме 2 справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Правильная орициклическая n -трапеция плоскости $\hat{H}$ полностью принадлежит замыканию своего основного орицикла.*

4.3. Невыпуклость

Докажем свойство правильной орициклической n -трапеции плоскости $\hat{H}$, отличающее ее от аналогично построенной n -трапеции плоскости Лобачевского.

ТЕОРЕМА 5. *Правильная орициклическая n -трапеция плоскости $\hat{H}$ не является выпуклой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть AQ_0Q_nB — правильная орициклическая n -трапеция с основным (купольным) орициклом ω_p (ω_q), K — центр орициклов ω_q , ω_p . Внутренность n -трапеции AQ_0Q_nB ограничена ее боковыми сторонами, внутренней хордой AB орицикла ω_p , внешнего по отношению к орициклу ω_q , и внутренними хордами орицикла ω_q . Следовательно, стягиваемые купольными ребрами конечные дуги орицикла ω_q , за исключением их концов $Q_0, \dots, Q_n$, принадлежат внутренности n -трапеции AQ_0Q_nB .

Выберем на дуге Q_0Q_1 некоторую отличную от Q_0 и Q_1 точку M , а на дуге Q_1Q_2 — отличную от Q_1, Q_2 точку N . Касательная к орициклу в каждой его точке является эллиптической прямой, поэтому точки M, N независимо от типа прямой Q_0Q_2 можно расположить настолько близко к точке Q_1 , чтобы прямая MN была эллиптической.

Точки M, N разделены на овальной линии ω_q парой точек Q_1, K (см. [2], [18]). Следовательно, хорды MN и Q_1K орицикла ω_q пересекаются во внутренней относительно ω_q точке, обозначим ее U . Внутренняя относительно ω_q хорда Q_1K не содержит внутренних относительно n -трапеции AQ_0Q_nB точек, следовательно, U является внешней точкой для данной n -трапеции.

Точку пересечения прямой MN с базой орициклов ω_q, ω_p обозначим V . Как точка базы орицикла ω_p V является внешней относительно ω_p . Тогда согласно теореме 4 V является внешней точкой и относительно n -трапеции AQ_0Q_nB .

Итак, на каждом из отрезков эллиптической прямой, определенных точками M, N , существует не принадлежащая внутренности n -трапеции AQ_0Q_nB точка. Следовательно, ни один из этих отрезков не принадлежит полностью внутренности данной n -трапеции. Значит, правильная орициклическая n -трапеция AQ_0Q_nB не является выпуклой.

Что и требовалось доказать. $\square$

4.4. Однозначная определенность длины бокового ребра количеством ребер купола

ТЕОРЕМА 6. *Длина b бокового ребра правильной орициклической n -трапеции плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, однозначно определена числом n :*

$$b = \rho \ln n. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть AQ_0Q_nB — правильная орициклическая n -трапеция плоскости $\hat{H}$. По утверждению 3 n -трапеция AQ_0Q_nB симметрична относительно серединного перпендикуляра к основанию AB . Следовательно, боковые ребра AQ_0 и BQ_n n -трапеции AQ_0Q_nB конгруэнтны. Значит, длины ребер AQ_0 и BQ_n равны. Покажем, что они однозначно определены значением n .

Присоединим к n -трапеции AQ_0Q_nB канонический репер R второго типа плоскости $\hat{H}$ тем же способом, что и в доказательстве теоремы 2. Тогда вершины A , Q_0 на боковой стороне в репере R можно задать координатами:

$$A(1 - p : 1 : 1), \quad p \in \mathbb{R}_+, \quad Q_0(1 - q : 1 : 1), \quad q \in \mathbb{R}_+. \quad (44)$$

Выразим длину b ребра AQ_0 по формуле (4):

$$\operatorname{ch} \frac{b}{\rho} = \frac{p + q}{2\sqrt{pq}}. \quad (45)$$

Параметры p и q в координатах правильной орициклической n -трапеции в репере R связаны условием $p = qn^2$ (30). Поэтому согласно выражению (45) справедливы равенства:

$$\operatorname{ch} \frac{b}{\rho} = \frac{n^2 + 1}{2n}, \quad \operatorname{sh} \frac{b}{\rho} = \frac{n^2 - 1}{2n}. \quad (46)$$

Из выражений (46) получаем равенство $e^{\frac{b}{\rho}} = n$, согласно которому выполняется формула (43). Теорема доказана. $\square$

Проводя аналогичные выкладки, можно доказать справедливость формулы (43) для правильной орициклической n -трапеции плоскости Лобачевского.

4.5. Ограниченность длины основания

Каждое купольное ребро правильной орициклической n -трапеции плоскости $\hat{H}$ конгруэнтно основанию. Оценим длину a основания AB правильной орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB . Воспользуемся присоединенным к данной n -трапеции соответственно четному или нечетному значению n каноническим репером R (см. доказательство теоремы 2).

Выражение (29) длины a основания AB n -трапеции AQ_0Q_nB при выполнении требования (30) можно записать следующим образом:

$$\cos \frac{a}{\rho} = 1 - \frac{2}{qn^2}. \quad (47)$$

В доказательстве теоремы 2 установили, что принимающий положительные значения параметр q в координатах вершин правильной орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB в репере R удовлетворяет при четном (нечетном) значении n неравенству (41) ((42)). От неравенства (41) ((42)) перейдем к равносильному неравенству

$$1 - \frac{2}{qn^2} > \frac{2 - n^2}{n^2} \quad \left(1 - \frac{2}{qn^2} > -1 \right).$$

Откуда с учетом выражения (47) при четном значении n и справедливых для каждого натурального значения n , $n > 1$, неравенствах

$$-1 < \frac{2 - n^2}{n^2} < 1$$

(нечетном значении n) получаем:

$$\cos \frac{a}{\rho} > \frac{2 - n^2}{n^2} \quad \left(\cos \frac{a}{\rho} > -1 \right). \quad (48)$$

На основании неравенств (48) справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Длина a каждого эллиптического ребра правильной орициклической n -трапеции плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ при четном, нечетном значении n принадлежит соответственно интервалу*

$$\left(0; \rho \arccos \frac{2 - n^2}{n^2} \right), \quad (0; \pi \rho).$$

Выясним геометрический смысл величины $\theta(n) = \rho \arccos \frac{2 - n^2}{n^2}$.

Своеобразным эталоном измерения дуг орициклов плоскости $\hat{H}$ является дуга, высекаемая на орицикле отличной от его базы параболической прямой, такую дугу назовем *параболической дугой* орицикла. В решении различных задач удобно также использовать половину параболической дуги, назовем ее *единичной дугой* орицикла (применяя введенные в параграфе 5 ортогональные орициклические координаты, можно показать, что длина единичной дуги орицикла равна радиусу кривизны ρ плоскости $\hat{H}$).

Известно [9, теорема 2.4.27], что внутренняя эллиптическая хорда орицикла, стягивающая его единичную дугу, равна трети эллиптической прямой. Следовательно, смежная с ней внешняя эллиптическая хорда орицикла имеет длину $2\pi\rho/3$. Заметим, что величина $\theta(2)$ также равна $2\pi\rho/3$.

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. *На плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, длина внешней эллиптической хорды орицикла, стягивающей n -ую часть его параболической дуги, равна*

$$\theta(n) = \rho \arccos \frac{2 - n^2}{n^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть параболическая прямая m пересекает орицикл ω в точках A, B . Выберем канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ второго типа, в котором вершина A_1 совпадает с центром орицикла ω , вершина A_2 — с несобственной точкой прямой m , а единичная точка E принадлежит касательной к абсолюту, проходящей через точку O пересечения прямой A_1A_2 с орициклом ω , причем так, что обход линии γ по дуге A_1EA_2 соответствует обходу орицикла ω по конечной дуге AB .

Орицикл ω в репере R задан уравнением

$$x_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0,$$

а точка O — координатами $(1 : -1 : 0)$. Вершина A_3 является полюсом прямой A_1A_2 относительно абсолюта, поэтому принадлежит прямой m . Значит, в репере R прямую m можно задать координатами $(1 : 0 : 0)$, а точки A, B — координатами соответственно $(0 : 1 : 1)$, $(0 : 1 : -1)$.

Конечная дуга AB является параболической дугой орицикла ω .

Подействуем n раз на точку A параболическим сдвигом f (12) с неподвижной точкой A_1 . Обозначим $f^v(A) = A^v$, где $v = \overline{1, n}$.

В репере R точка A^v задана координатами

$$(v^2 + 2v\beta : \beta^2 : \beta^2 + v\beta). \quad (49)$$

Потребуем, чтобы точка A^n с координатами $(n^2 + 2n\beta : \beta^2 : \beta^2 + n\beta)$ совпала с точкой B . В этом случае пара точек $A, A^1 = f(A)$ определит хорды орицикла ω , стягивающие n -ую часть его параболической дуги AB . Равенство $A^n = B$ приводит к условию $\beta = -n/2$. Подставляя значение $\beta = -n/2$ в координаты (49), найдем координаты точки A^1 : $(4 - 4n : n^2 : n^2 - 2n)$.

Выразим по формуле (3) длины ϑ_j , $j = 1, 2$, хорд орицикла ω между точками A, A^1 :

$$\cos \frac{\vartheta_j}{\rho} = \varepsilon \frac{n^2 - 2}{n^2}, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (50)$$

Поляра $p_\gamma(A)$ точки A относительно абсолюта задана в репере R координатами $(1 : 0 : -2)$ и пересекает прямую AA^1 $(2n : 4n - 4 : 4 - 4n)$ в точке A^* с координатами $(2 - 2n : 1 : 1 - n)$. Точка N пересечения прямой AA^1 с базой k $(0 : 1 : 0)$ орицикла ω имеет координаты $(2n - 2 : 0 : n)$ и принадлежит внешней относительно ω хорде между точками A, A^1 . Поскольку в репере R

$$(AA^1NA^*) = \frac{n^2 - 2}{n^2},$$

и при каждом натуральном n , $n > 1$, выполняется неравенство $n^2 - 2 > 0$, то внешняя относительно ω хорда AA^1 больше половины эллиптической прямой, а ее длина определена равенством (50) при $\varepsilon = -1$.

Таким образом, указанная внешняя хорда AA^1 имеет длину $\theta(n)$.

Что и требовалось доказать. $\square$

Установленный в теореме 8 геометрический смысл величины $\theta(n)$ позволяет сформулировать теорему 9, равносильную теореме 7.

ТЕОРЕМА 9. *Каждое эллиптическое ребро правильной орициклической n -трапеции плоскости $\hat{H}$ при четном n является отрезком, не достигающим по длине внешнюю хорду орицикла, стягивающую n -ную часть его параболической дуги, при нечетном n — отрезком, не достигающим содержащую его эллиптическую прямую.*

5. Вычисление площадей фигур плоскости $\hat{H}$ в ортогональной орициклической системе координат

В работе [19] получена формула для вычисления площади фигуры плоскости $\hat{H}$ в присоединенной к каноническому реперу R^* первого типа ортогональной гиперциклической системе координат C_h . Получим соответствующую формулу для вычисления площади фигуры в присоединенной к каноническому реперу R второго типа ортогональной орициклической системе координат C_o , кратко описанной в тезисах [14] и являющейся одним из аналогов полярной системы координат евклидовой плоскости. Полученную формулу применим в параграфе 6 для вычисления площади правильной орициклической n -трапеции.

5.1. Собственные координаты точки плоскости $\hat{H}$ в каноническом репере второго типа

Пусть в каноническом репере R второго типа плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, точка M задана проективными координатами (x_p) , $p = 1, 2, 3$. Собственными координатами точки M на плоскости $\hat{H}$ в репере R назовем определенную с точностью до знака упорядоченную тройку чисел:

$$\bar{x}_p = \pm \frac{\rho x_p}{\sqrt{x_3^2 - x_1 x_2}}. \quad (51)$$

Введенная нормировка, инвариантная относительно преобразований фундаментальной группы G , устанавливает взаимно однозначное соответствие между собственными точками плоскости $\hat{H}$ и определенными с точностью до знака упорядоченными тройками действительных чисел. Координаты точек абсолюта в нормировке (51) бесконечно велики, а каждой несобственной для $\hat{H}$ точке соответствует тройка мнимых чисел. Для собственных координат $(\bar{x}_p)$ собственной точки плоскости $\hat{H}$ выполняется равенство

$$\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \rho^2. \quad (52)$$

5.2. Ортогональная орициклическая система координат

На плоскости $\hat{H}$ с выделенным обходом ξ абсолютной линии γ выберем некоторый орицикл ω_0 с базой k и любую его ось l (рис. 3). Пусть A_1 — центр орицикла ω_0 , т. е. $A_1 = k \cap \gamma$, а A_2 — отличная от A_1 точка пересечения прямой l с абсолютом. Собственную на $\hat{H}$ точку пересечения прямой l с орициклом ω_0 обозначим O . Проведем касательные k_1, k_2 к абсолюту из точки O и обозначим E ту из точек касания прямых k_1, k_2 с абсолютом, которая принадлежит дуге A_1A_2 линии γ при заданном обходе ξ .

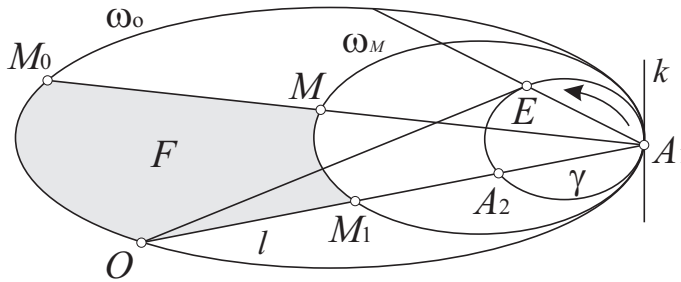


Рис. 3. Ортогональная орициклическая система координат $C_o = \{\omega_0, l, E\}$

Каждой точке M плоскости $\hat{H}$, $M \notin k$, поставим в соответствие пару чисел (u, v) следующим образом.

Пусть ω_M — орицикл с базой k , содержащий точку M , и M_1 — точка пересечения орицикла ω_M с прямой l . Обозначим:

$$u = ((A_1M)(A_1E)lk), \quad (53)$$

$$v = \delta \frac{|OM_1|}{\rho}, \quad (54)$$

где $\delta = 1$ ($\delta = -1$), если точка M_1 не принадлежит (принадлежит) лучу OA_1 .

Совокупность элементов $C_o = \{\omega_0, l, E\}$ назовем *ортогональной орициклической системой координат* плоскости $\hat{H}$. Орицикл ω_0 назовем *нулевым орициклом*, прямую l — *осью*, точку E — *единичной точкой* системы C_o . Собственную для плоскости $\hat{H}$ точку O пересечения оси l с нулевым орициклом ω_0 назовем *началом* системы координат C_o .

Пару чисел $(u; v)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, назовем *ортогональными орициклическими координатами* точки M в системе C_o .

5.3. Связь ортогональных орициклических и собственных координат точки на плоскости $\hat{H}$

Присоединим к орициклической системе координат C_o плоскости $\hat{H}$ канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ второго типа так, чтобы его вершина A_3 была полюсом прямой A_1A_2 относительно абсолюта. Репер R является правым,

т. е. представляет положительную ориентацию семейства U^3 , соответствующую заданному обходу ξ линии γ .

На плоскости $\widehat{H}$ пучок Ω всех орициклов с центром в точке $A_1(1:0:0)$ в репере R можно задать уравнением

$$qx_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad q \in \mathbb{R}_+. \quad (55)$$

Каждый орицикл пучка Ω определен однозначно заданием параметра q . Покажем, что для нулевого орицикла ω_0 системы C_o параметр q равен единице.

Действительно, в репере R касательная к абсолюту в единичной точке $E(1:1:1)$ задана координатами $(1:1:-2)$ и пересекает прямую $l = A_1A_2$ с координатами $(0:0:1)$ в точке $O(1:-1:0)$. Согласно построению системы C_o точка O принадлежит орициклу ω_0 , следовательно, для орицикла ω_0 в уравнении (55) $q = 1$.

Пусть (u, v) — координаты произвольной точки M плоскости $\widehat{H}$ в системе C_o , а $(m_1 : m_2 : m_3)$ — проективные координаты точки M в присоединенном к C_o репере R . Прямые A_1M , A_1E , l , k заданы в репере R координатами:

$$A_1M(0:-m_3:m_2), \quad A_1E(0:1:-1), \quad l(0:0:1), \quad k(0:1:0). \quad (56)$$

Выразим координату u (53) точки M через ее проективные координаты:

$$u = ((A_1M)(A_1E)lk) = \frac{m_3}{m_2}. \quad (57)$$

Орицикл ω_M из пучка Ω (55), содержащий точку M , задан уравнением

$$(m_3^2 - m_1m_2)x_2^2 + m_2^2x_1x_2 - m_2^2x_3^2 = 0$$

и пересекает ось l в точке M_1 с координатами $(m_1m_2 - m_3^2 : m_2^2 : 0)$. По формуле (4) выразим длину отрезка OM_1 гиперболической прямой l и с учетом обозначения (54) получим:

$$\operatorname{ch} v = \frac{m_2^2 + m_3^2 - m_1m_2}{2|m_2|\sqrt{m_3^2 - m_1m_2}}. \quad (58)$$

По определению координата v (54) точки M принимает положительные (отрицательные) значения тогда и только тогда, когда точка M_1 не принадлежит (принадлежит) лучу OA_1 , т. е. тогда и только тогда, когда для четверки точек M_1, A_1, O, A_2 прямой l выполняется неравенство

$$(M_1A_1OA_2) < 0 \quad ((M_1A_1OA_2) > 0). \quad (59)$$

Выразим число $(M_1A_1OA_2)$ в проективных координатах точки M :

$$(M_1A_1OA_2) = \frac{m_3^2 - m_2^2 - m_1m_2}{m_3^2 - m_1m_2}. \quad (60)$$

Координаты собственной для плоскости $\hat{H}$ точки M удовлетворяют неравенству $m_3^2 - m_1 m_2 > 0$ (см. (2)), поэтому согласно выражению (60) неравенство (59) равносильно неравенству

$$m_2^2 - m_3^2 + m_1 m_2 > 0 \quad (m_2^2 - m_3^2 + m_1 m_2 < 0). \quad (61)$$

Для положительного (отрицательного) значения v выполняется неравенство $\operatorname{sh} v > 0$ ($\operatorname{sh} v < 0$), поэтому из выражения (58) при соответствующем условии (61) получаем:

$$\operatorname{sh} v = \frac{m_2^2 - m_3^2 + m_1 m_2}{2|m_2|\sqrt{m_3^2 - m_1 m_2}}. \quad (62)$$

На основании выражений (58), (62) выполняется равенство

$$e^v = \frac{|m_2|}{\sqrt{m_3^2 - m_1 m_2}}. \quad (63)$$

Итак, любые проективные координаты $(m_1 : m_2 : m_3)$ точки M в репере R , в том числе и ее собственные координаты, определенные равенствами (51) и связанные условием (52), удовлетворяют равенствам (57), (63). Точка M — произвольная точка плоскости $\hat{H}$. Значит, для собственных координат $(\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3)$ каждой точки плоскости $\hat{H}$ выполняются соотношения:

$$\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \rho^2, \quad \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_2} = u, \quad \frac{|\bar{x}_2|}{\sqrt{\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2}} = e^v.$$

Поэтому зависимость собственных координат $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3)$ точки плоскости $\hat{H}$ в репере R от ее ортогональных орициклических координат (u, v) в присоединенной к реперу R системе C_o можно выразить формулами:

$$\bar{x}_1 = \rho(u^2 e^v - e^{-v}), \quad \bar{x}_2 = \rho e^v, \quad \bar{x}_3 = \rho u e^v. \quad (64)$$

Координатными линиями u в системе C_o являются концентрические орициклы пучка Ω , а линиями v — оси орициклов пучка Ω , гиперболические прямые, проходящие через точку A_1 . Орицикл плоскости $\hat{H}$ имеет в каждой своей точке эллиптическую касательную, ортогональную оси орицикла, проведенной в данной точке [9, теорема 2.4.22]. Поэтому две координатные линии системы C_o , проходящие через собственную точку плоскости $\hat{H}$, ортогональны.

5.4. Формула площади фигуры в орициклических координатах

Собственную точку M плоскости $\hat{H}$ зададим в репере R координатами (64). Тогда точки $M_u \left(\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial u} \right)$, $M_v \left(\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v} \right)$, принадлежащие касательным в точке M к

координатным линиям u, v , имеют в репере R координаты:

$$M_u(2\rho u e^v; 0; \rho e^v), \quad M_v(\rho u^2 e^v + \rho e^{-v}; \rho e^v; \rho u e^v). \quad (65)$$

Координаты (65) точек M_u, M_v собственными в смысле (51) не являются, но определены однозначно как производные от собственных координат (64) точки M по параметру u, v соответственно.

Для координат (64), (65) каждой пары из точек M, M_u, M_v выполняется условие (5). Следовательно, точки M_u, M_v ортогональны и принадлежат поляре m точки M относительно абсолюта. Поэтому прямой m принадлежит и точка $dM = M_u du + M_v dv$. В координатах (64), (65) получаем:

$$\varphi_2(dM) = \gamma_{uu}(du)^2 + 2\gamma_{uv}dudv + \gamma_{vv}(dv)^2,$$

$$\gamma_{uu} = \varphi_2(M_u) = -\rho^2 e^{2v}, \quad \gamma_{uv} = \bar{\varphi}_2(M_u, M_v) = 0, \quad \gamma_{vv} = \varphi_2(M_v) = \rho^2.$$

Элемент площади плоскости $\hat{H}$ в ортогональных орициклических координатах имеет вид

$$dS = \sqrt{|\gamma_{uu}\gamma_{vv} - \gamma_{uv}^2|} du dv = \rho^2 e^v du dv.$$

Пусть σ — кусочно-гладкая замкнутая двусторонняя линия плоскости $\hat{H}$, F — гомеоморфная диску область на $\hat{H}$, ограниченная линией σ , с соответствующей областью D изменения параметров u, v в параметризации (64). Тогда для площади S области F справедлива формула

$$S = \rho^2 \iint_D e^v du dv. \quad (66)$$

5.5. Площадь криволинейного координатного прямоугольника в системе C_o

На плоскости $\hat{H}$ в ортогональной орициклической системе координат $C_o = \{\omega_0, l, E\}$ с началом в точке O и центром нулевого орицикла ω_0 в точке A_1 рассмотрим криволинейный координатный прямоугольник $F = OM_1MM_0$, вершина M_1 которого лежит на оси l , но не принадлежит лучу OA_1 , вершина M_0 принадлежит нулевому орициклу ω_0 , вершина M является пересечением прямой A_1M_0 и проходящего через точку M_1 орицикла ω_M с центром A_1 , а дуги M_1M и OM_0 орициклов соответственно ω_M и ω_0 стянуты хордами на эллиптических прямых (см. рис. 3). По построению орицикл ω_M принадлежит внутренности орицикла ω_0 . Пусть a — длина внутренней хорды OM_0 орицикла ω_0 , b — длина отрезка OM_1 гиперболической прямой l . Выразим через величины a, b площадь прямоугольника F .

Точки O и M_1 заданы в системе C_o координатами соответственно $(0, 0)$ и $(0, \frac{b}{\rho})$. Первую координату точки M в системе C_o обозначим u_0 . Точка M принадлежит одному с точкой M_1 орициклу ω_M , поэтому для второй координаты

v_0 точки M получаем:

$$v_0 = \frac{b}{\rho}. \quad (67)$$

Точка M_0 в системе C_o задана координатами $(u_0, 0)$.

Условимся, что точка M , а, значит, и прямоугольник F , принадлежит тому параболическому флагу между прямыми l, k , который содержит единичную точку E . В этом случае пара прямых A_1M, A_1E не разделяет пару прямых l, k : $((A_1M)(A_1E)lk) > 0$. Следовательно, для координаты u_0 точки M в соответствии с определением (53) выполняется неравенство

$$u_0 > 0. \quad (68)$$

По формулам (64) найдем координаты точек O, M_0 в присоединенном к системе C_o репере R :

$$O(1 : -1 : 0), \quad M_0(u_0^2 - 1 : 1 : u_0). \quad (69)$$

По формуле (3) длина a внутренней хорды OM_0 орицикла ω_0 удовлетворяет равенству

$$\cos \frac{a}{\rho} = \varepsilon \frac{2 - u_0^2}{2}, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (70)$$

Чтобы найти соответствующее внутренней хорде OM_0 число ε в выражении (70), построим точки пересечения орицикла ω_0 с полярной $p_\gamma(O)$ точки O относительно абсолюта. В репере R прямая $p_\gamma(O)$ задана координатами $(1 : -1 : 0)$ (см. уравнение полярной (6)), а орицикл ω_0 — уравнением

$$x_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0.$$

Построенные точки можно задать в репере R координатами $(1 : 1 : \pm\sqrt{2})$.

В силу равенства (57) первая координата точки $N(1 : 1 : \sqrt{2})$ в системе C_o больше нуля, следовательно, N принадлежит тому же параболическому флагу между прямыми l, k , что и прямоугольник F . Точка N удалена от точки O на расстояние $\pi\rho/2$. Рассматриваемая хорда OM_0 является коротким (длинным) отрезком эллиптической прямой тогда и только тогда, когда точка M_0 принадлежит дуге $ON(NA_1)$ орицикла ω_0 , т. е. тогда и только тогда, когда прямая A_1M_0 принадлежит полосе (псевдополосе) между прямыми l, A_1N . Принадлежность прямой A_1M_0 полосе (псевдополосе) между прямыми l, A_1N равносильна неравенству

$$((A_1M_0)l(A_1N)k) > 0 \quad (((A_1M_0)l(A_1N)k) < 0). \quad (71)$$

В репере R прямые A_1M_0, A_1N, l, k заданы координатами:

$$A_1M_0(0 : -u_0 : 1), \quad A_1N(0 : -\sqrt{2} : 1), \quad l(0 : 0 : 1), \quad k(0 : 1 : 0). \quad (72)$$

Неравенство (71) в координатах имеет вид

$$\frac{\sqrt{2} - u_0}{\sqrt{2}} > 0 \quad \left(\frac{\sqrt{2} - u_0}{\sqrt{2}} < 0 \right)$$

и при допустимых значениях (68) координаты u_0 точки M равносильно неравенству

$$\frac{2 - u_0^2}{2} > 0 \quad \left(\frac{2 - u_0^2}{2} < 0 \right).$$

Итак, длину a внутренней хорды OM_0 орицикла ω_0 характеризуют условия:

$$a < \frac{\pi\rho}{2} \iff \frac{2 - u_0^2}{2} > 0, \quad a > \frac{\pi\rho}{2} \iff \frac{2 - u_0^2}{2} < 0.$$

Следовательно, величина a удовлетворяет выражению (70) при $\varepsilon = 1$.

Из равенства (70) при $\varepsilon = 1$ выразим координату u_0 :

$$u_0 = 2 \sin \frac{a}{2\rho}. \quad (73)$$

На основании выражений (67), (73) запишем в системе координат C_0 область D изменения параметров u, v , соответствующую прямоугольнику F :

$$D: \quad 0 \leq u \leq u_0 = 2 \sin \frac{a}{2\rho}, \quad 0 \leq v \leq v_0 = \frac{b}{\rho}. \quad (74)$$

Применяя запись (74) области D , по формуле (66) найдем площадь S криволинейного координатного прямоугольника F с гиперболическим ребром длиной b и дугой внешнего орицикла, стягиваемой внутренней эллиптической хордой длиной a :

$$S = 2\rho^2 \sin \frac{a}{2\rho} \left(e^{\frac{b}{\rho}} - 1 \right). \quad (75)$$

5.6. Площадь сегмента орицикла

Пользуясь обозначениями п. 5.5, найдем площадь сегмента орицикла ω_0 , ограниченного внутренней эллиптической хордой OM_0 длиной a . Сначала вычислим площадь полусегмента F_0 , ограниченного дугой OT орицикла ω_0 , прямой OM_0 и биссектрисой A_1T полосы между прямыми l, A_1M_0 .

Определим в системе координат C_0 область D_0 изменения параметров u, v , соответствующую полусегменту F_0 .

Точка T принадлежит нулевому орициклу ω_0 системы C_0 , поэтому имеет в C_0 нулевую вторую координату. Первую координату точки T обозначим u_t . Тогда в присоединенном к системе C_0 репере R точка T будет задана координатами $(u_t^2 - 1 : 1 : u_t)$, а прямая A_1T — координатами $(0 : -u_t : 1)$ (см. аналогично

вычисленные для точки M_0 координаты из (69), (72)). Для биссектрисы A_1T полосы между прямыми l , A_1M_0 выполняется равенство

$$(l(A_1M_0)(A_1T)k) = -1,$$

которое в координатах (72) прямых A_1M_0 , l , k имеет вид

$$\frac{u_0 - u_t}{-u_t} = -1.$$

Тогда $u_t = u_0/2$, и с учетом выражения (73) координату u_t точки T в системе C_o можно записать в виде

$$u_t = \sin \frac{a}{2\rho}. \quad (76)$$

Итак, первая координата u в системе C_o точек полусегмента F_0 изменяется от нуля до u_t (76). Найдем промежуток изменения второй координаты.

Прямая OM_0 в репере R задана координатами $(1 : 1 : -u_0)$, или с учетом выражения (73) — координатами

$$\left(1 : 1 : -2 \sin \frac{a}{2\rho} \right).$$

Запишем уравнение прямой OM_0 в собственных координатах $(\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3)$ текущей точки:

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2\bar{x}_3 \sin \frac{a}{2\rho} = 0. \quad (77)$$

По формулам (64) от уравнения (77) перейдем к уравнению прямой OM_0 в ортогональных орициклических координатах:

$$u^2 e^v - e^{-v} + e^v - 2ue^v \sin \frac{a}{2\rho} = 0. \quad (78)$$

Из уравнения (78) для точек прямой OM_0 получаем зависимость

$$v = -\frac{1}{2} \ln \left(u^2 - 2u \sin \frac{a}{2\rho} + 1 \right). \quad (79)$$

Выражения (76), (79) определяют область D_0 изменения параметров u , v точек полусегмента F_0 :

$$D_0 : \quad 0 \leq u \leq \sin \frac{a}{2\rho}, \quad 0 \leq v \leq -\frac{1}{2} \ln \left(u^2 - 2u \sin \frac{a}{2\rho} + 1 \right). \quad (80)$$

По формуле (66) вычислим площадь S_0 полусегмента F_0 с областью D_0 (80) изменения параметров u , v :

$$S_0 = \rho^2 \iint_{D_0} e^v du dv = \rho^2 \int_0^{\sin \frac{a}{2\rho}} du \int_0^{-\frac{1}{2} \ln(u^2 - 2u \sin \frac{a}{2\rho} + 1)} e^v dv =$$

$$= \rho^2 \left[\ln \frac{\cos \frac{a}{2\rho}}{1 - \sin \frac{a}{2\rho}} - \sin \frac{a}{2\rho} \right] = \rho^2 \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4\rho} \right) - \sin \frac{a}{2\rho} \right].$$

Удваивая величину S_0 , получим площадь S_s сегмента орицикла, ограниченного внутренней хордой длиной a :

$$S_s = 2\rho^2 \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4\rho} \right) - \sin \frac{a}{2\rho} \right]. \quad (81)$$

6. Площадь правильной орициклической n -трапеции

Рассмотрим на плоскости $\hat{H}$ правильную орициклическую n -трапецию AQ_0Q_nB с основанием AB длиной a . По определению купольные ребра n -трапеции AQ_0Q_nB конгруэнтны основанию, следовательно, сегменты купольного орицикла данной n -трапеции, отсекаемые купольными ребрами, конгруэнтны сегменту основного орицикла, отсекаемого основанием AB . Площадь каждого из указанных сегментов может быть вычислена по формуле (81).

По теореме 6 длина b бокового ребра правильной орициклической n -трапеции равна $\rho \ln n$. Подставляя данное значение в формулу (75), получим формулу для вычисления площади криволинейного прямоугольника F с вершинами в точках A, Q_0, Q_n, B , вписанного в кольцо между основным и купольным орициклами данной n -трапеции AQ_0Q_nB :

$$S_F = 2\rho^2(n-1) \sin \frac{a}{2\rho}. \quad (82)$$

Применяя формулы (81), (82), найдем площадь S правильной орициклической n -трапеции с основанием длиной a :

$$\begin{aligned} S &= S_F + (n-1)S_s = \\ &= 2\rho^2(n-1) \sin \frac{a}{2\rho} + 2\rho^2(n-1) \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4\rho} \right) - \sin \frac{a}{2\rho} \right] = \\ &= 2\rho^2(n-1) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4\rho} \right). \end{aligned}$$

Итак, доказана теорема.

ТЕОРЕМА 10. На плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S правильной орициклической n -трапеции с основанием длиной a может быть вычислена по формуле

$$S = 2\rho^2(n-1) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4\rho} \right). \quad (83)$$

В работе [15] (см. также [2, п. 4.7.3]) показано, что функция

$$\tilde{\alpha}(x) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2\rho} \right), \quad (84)$$

названная *функцией угла квазипараллельности*, определяет на плоскости $\hat{H}$ зависимость вещественной части меры квазиугла параллельности в точке плоскости относительно гиперболической прямой от расстояния x , $x \in (0; \pi\rho/2)$, данной точки до указанной прямой. Используя обозначение (84), теорему 10 сформулируем в следующем виде.

ТЕОРЕМА 11. *На плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S правильной орициклической n -трапеции с основанием длиной a может быть вычислена по формуле*

$$S = 2\rho^2(n-1) \tilde{\alpha} \left(\frac{a}{2} \right). \quad (85)$$

В теореме 12 выразим площадь правильной орициклической n -трапеции через величину ее внутреннего квазиугла при основании.

ТЕОРЕМА 12. *На плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S правильной орициклической n -трапеции с мерой A внутреннего квазиугла при основании может быть вычислена по формуле*

$$S = 2\rho^2(n-1) \left(i\frac{\pi}{2} - A \right). \quad (86)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в принятых в п. 5.5 обозначениях L — середина основания AB правильной орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB , K — точка пересечения боковых сторон данной n -трапеции. Прямые AK и LK параллельны, а прямые AB и LK ортогональны, следовательно, квазиугол LAK , смежный с внутренним квазиуглом LAQ_0 при основании n -трапеции AQ_0Q_nB , является квазиуглом параллельности в точке A относительно прямой LK . Величина $\bar{A}$ квазиугла LAK однозначно определена расстоянием $a/2$ от точки A до прямой LK [2, п. 4.7.3]:

$$\bar{A} = i\frac{\pi}{2} + \tilde{\alpha} \left(\frac{a}{2} \right).$$

Величина A внутреннего квазиугла LAQ_0 при основании n -трапеции AQ_0Q_nB связана с величиной $\bar{A}$ равенством $A + \bar{A} = i\pi$. Следовательно,

$$A = i\frac{\pi}{2} - \tilde{\alpha} \left(\frac{a}{2} \right). \quad (87)$$

Подставляя значение $\tilde{\alpha} \left(\frac{a}{2} \right)$ из равенства (87) в формулу (85), получим формулу (86).

Теорема доказана. $\square$

Функция $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(x)$ угла квазипараллельности определена на интервале $(0; \pi\rho/2)$ и положительна на всей области определения. Поэтому согласно равенству (87) вещественная часть величины A внутреннего квазиугла LAQ_0 при основании правильной орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB — отрицательное число. Следовательно, LAQ_0 — эллиптический квазиугол.

Согласно теореме 1 серединный перпендикуляр t купольного ребра Q_0Q_1 содержит центр купольного орицикла правильной орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB . Поэтому внутренний для n -трапеции AQ_0Q_nB квазиугол AQ_0Q_1 является квазиуголом параллельности в точке Q_0 относительно прямой t , его величина Q_0 в силу равенства $|Q_0Q_1| = a$ определена выражением

$$Q_0 = i\frac{\pi}{2} + \tilde{\alpha}\left(\frac{a}{2}\right).$$

Следовательно, AQ_0Q_1 — гиперболический квазиугол, мера которого в сумме с мерой квазиугла LAQ_0 равна $i\pi$.

Таким образом, доказано еще одно свойство правильной орициклической n -трапеции.

ТЕОРЕМА 13. *На плоскости $\hat{H}$ в правильной орициклической n -трапеции внутренний квазиугол при основании является эллиптическим квазиуголом, внутренний квазиугол между боковым и купольным ребром — гиперболическим квазиуголом, сумма мер указанных квазиуголов равна $i\pi$.*

Следствием теорем 7, 8, 11 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14. *На плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S правильной орициклической n -трапеции с ростом длины a основания возрастает, при нечетном значении n возрастает неограниченно, а при четном — принадлежит интервалу*

$$\left(0; 2\rho^2(n-1)\tilde{\alpha}\left(\frac{\theta(n)}{2}\right)\right).$$

Рассмотрим бесконечный трехвершинник ABK , образованный лучами AK , BK и отрезком AB , являющимся основанием правильной орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB с точкой K пересечения боковых сторон.

Собственную на $\hat{H}$ гомеоморфную открытому диску область плоскости H^2 , $\hat{H} \subset H^2$, ограниченную трехвершинником ABK , назовем *внутренностью* данного трехвершинника.

Замыкание трехвершинника ABK назовем *бесконечным трехреберником* плоскости $\hat{H}$, смежным с n -трапецией AQ_0Q_nB .

На рис. 4 бесконечный трехреберник ABK , смежный с правильной орициклической 3-трапецией AQ_0Q_3B , выделен узором.

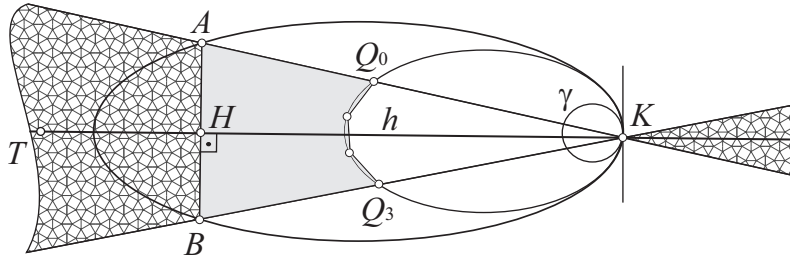


Рис. 4. Бесконечный трехреберник ABK , смежный с правильной орициклической 3-трапецией AQ_0Q_3B

ТЕОРЕМА 15. На плоскости $\hat{H}$ площадь S правильной орициклической n -трапеции в $n - 1$ раз превышает площадь S_0 смежного с ней бесконечного трехреберника:

$$S = (n - 1)S_0. \quad (88)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ в правильной орициклической n -трапеции AQ_0Q_nB с точкой K пересечения боковых сторон и длиной a основания AB , h — перпендикуляр к основанию. По теореме 1 прямая h проходит через точку K . Пусть $AB \cap h = H$, тогда $|AH| = a/2$.

Выберем на луче HK некоторую точку T . Площадь S_1 прямоугольного трехреберника AHT с эллиптическим (гиперболическим) катетом длиной $a/2$ (b) может быть вычислена (см. [19, теорема 3]) по формуле

$$S_1 = \rho^2 \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{b}{\rho} + \operatorname{ch} \frac{b}{\rho} \sin \frac{a}{2\rho}}{\sin \frac{a}{2\rho} + \cos \frac{a}{2\rho} \operatorname{sh} \frac{b}{\rho}}.$$

Устремим точку T к точке K по лучу HK , сохраняя прямым квазиугол AHT . Тогда при постоянном значении длины катета AH длина b катета HT будет стремиться к бесконечности, а площадь S_2 трехреберника AHT будет равна пределу величины S_1 :

$$\begin{aligned} S_2 &= \rho^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{\operatorname{sh} \frac{b}{2\rho} + \operatorname{ch} \frac{b}{2\rho} \sin \frac{a}{2\rho}}{\sin \frac{a}{2\rho} + \cos \frac{a}{2\rho} \operatorname{sh} \frac{b}{2\rho}} \right) = \rho^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1 + \operatorname{cth} \frac{b}{2\rho} \sin \frac{a}{2\rho}}{\frac{\sin \frac{a}{2\rho}}{\operatorname{sh} \frac{b}{2\rho}} + \cos \frac{a}{2\rho}} \right) = \\ &= \rho^2 \ln \frac{1 + \sin \frac{a}{2\rho}}{\cos \frac{a}{2\rho}} = \rho^2 \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4\rho} \right) = \rho^2 \tilde{\alpha} \left(\frac{a}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, площадь бесконечного прямоугольного трехреберника с эллиптическим катетом длиной $a/2$ и одной вершиной на абсолюте равна $\rho^2 \tilde{\alpha}(a/2)$. Следовательно, площадь S_0 смежного с n -трапецией AQ_0Q_nB бесконечного трехреберника ABK равна $2\rho^2 \tilde{\alpha}(a/2)$. Поэтому согласно теореме 11 справедлива формула (88).

Что и требовалось доказать. $\square$

7. Разбиения плоскости $\hat{H}$ правильными орициклическими n -трапециями

7.1. Построение разбиений

Выберем на плоскости $\hat{H}$ правильную орициклическую n -трапецию $F = AQ_0Q_nB$ с точкой K пересечения боковых сторон (рис. 5). Пусть k — параболическая прямая, содержащая точку K . Параболический сдвиг f вдоль прямой k , переводящий точку A в точку B , определен однозначно заданием прямых AK , BK [9, п. 3.9.2]. Действуя на n -трапецию AQ_0Q_nB неограниченное число раз преобразованием f и обратным к нему преобразованием f^{-1} , заполним правильными конгруэнтными орициклическими n -трапециями кольцо ς_1 между купольным ω_0 и основным ω_1 орициклами n -трапеции AQ_0Q_nB .

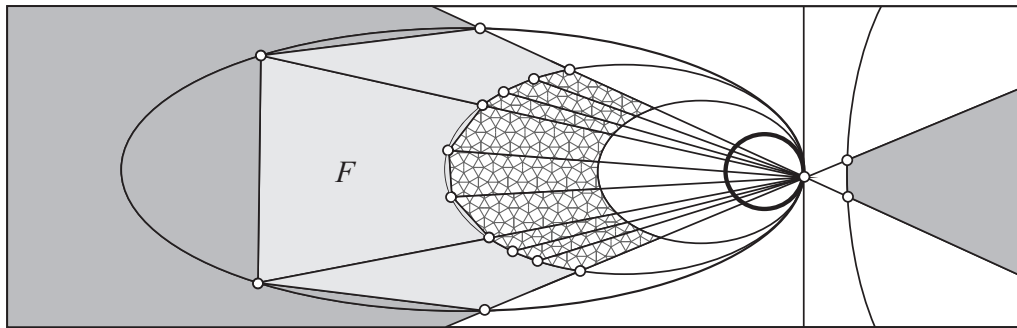


Рис. 5. Фрагмент разбиения плоскости $\hat{H}$ правильной орициклической 3-трапецией

Из построенных в кольце ς_1 n -трапеций составим наборы, объединяя в них по n подряд расположенных n -трапеций так, чтобы каждые две последовательно взятые ячейки набора были смежны по боковому ребру, а каждая n -трапеция кольца ς_1 входила в некоторый набор, причем только в один. При доказательстве теоремы 2 установили, что для орицикла ω_1 существует единственный орицикл ω_2 с центром K , содержащий основания вписанных в кольцо ς_2 между орициклами ω_1 , ω_2 правильных орициклических n -трапеций, купольные ребра которых расположены на орицикле ω_1 . Построим орицикл ω_1 . Продолжая тем же способом процесс неограниченно, построим орициклы

$$\omega_3, \quad \dots, \quad \omega_j, \quad \dots, \quad j \in \mathbb{N},$$

и внешние относительно орицикла ω_0 кольца $\varsigma_3, \dots, \varsigma_j, \dots$ между двумя последовательно взятыми орициклами соответственно

$$\omega_2, \omega_3; \quad \dots; \quad \omega_{j-1}, \omega_j; \quad \dots$$

заполним правильными орициклическими n -трапециями, конгруэнтными n -трапеции AQ_0Q_nB . Тем самым построим разбиение внешней относительно

орицикла ω_0 области плоскости $\hat{H}$ с исключенной прямой k попарно конгруэнтными правильными орициклическими n -трапециями.

На каждом купольном ребре n -трапеций кольца ς_1 построим как на основании правильную орициклическую n -трапецию, конгруэнтную n -трапеции AQ_0Q_nB , и заполним таким образом n -трапециями кольцо $\varsigma_{(-1)}$ между орициклами $\omega_0, \omega_{(-1)}$. Продолжая тем же способом процесс неограниченно, построим орициклы

$$\omega_{(-2)}, \quad \dots, \quad \omega_{(-j)}, \quad \dots$$

и внутренние относительно ω_0 кольца $\varsigma_{(-2)}, \dots, \varsigma_{(-j)}, \dots$ между двумя последовательно взятыми орициклами соответственно

$$\omega_{(-1)}, \omega_{(-2)}; \quad \dots; \quad \omega_{(1-j)}, \omega_{(-j)}; \quad \dots$$

заполним правильными орициклическими n -трапециями, конгруэнтными n -трапеции AQ_0Q_nB . Тем самым построим разбиение внутренней относительно орицикла ω_0 области плоскости $\hat{H}$ попарно конгруэнтными правильными орициклическими n -трапециями.

Итак, разбиение плоскости $\hat{H}$ с исключенной параболической прямой k построено. Выбирая в качестве ячейки всевозможные правильные орициклические n -трапеции, аналогичным образом для каждого натурального значения n , $n > 1$, построим однопараметрические семейства нормальных моноэдральных разбиений плоскости $\hat{H}$ с исключенной параболической прямой.

8. Заключение

В работе построены серии первых нормальных моноэдральных разбиений плоскости $\hat{H}$. Ячейкой каждого из построенных разбиений служит правильная орициклическая n -трапеция. При подробном исследовании правильной орициклической n -трапеции была введена ортогональная орициклическая система координат, и с ее помощью получены формулы для вычисления площадей некоторых фигур на $\hat{H}$. Доказаны новые свойства орициклов данной плоскости.

Выделим три наиболее интересные, по мнению автора, задачи развития идей представленного исследования.

1. Во введении работы отмечено, что применение схемы Берёцкого дает положительный ответ на второй вопрос восемнадцатой проблемы Гильберта в его постановке для плоскости Лобачевского Λ^2 (см. [12]): на плоскости Λ^2 существуют моноэдральные разбиения, из ячеек которых некоторым их перекладыванием нельзя составить правильное разбиение данной плоскости. В дальнейшем предполагаем показать, что построенные разбиения плоскости $\hat{H}$ правильными орициклическими n -трапециями дают положительный ответ на указанный вопрос Гильберта применительно к плоскости $\hat{H}$.

2. Найти и исследовать преобразование плоскости H^2 , в котором заданное разбиение правильной орициклической n -трапецией плоскости $\hat{H}$ соответствует некоторому разбиению плоскости Λ^2 по схеме Берёцкого.

3. Построить обобщение разбиений плоскости $\hat{H}$ правильными орициклическими n -трапециями на случай n -мерного гиперболического пространства $\hat{H}^n$ положительной кривизны, реализуемого на внешней относительно овальной гиперквадрики области проективного пространства P_n (напомним, что обобщение разбиений Берёцкого на случай n -мерного пространства Лобачевского построено в работе [12]).

Решение данной задачи требует предварительного исследования различных объектов пространства $\hat{H}^n$, в частности, его гиперповерхностей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 548 с.
2. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 244 с.
3. Coxeter H. S. M. A Geometrical Background for De Sitter's World // Amer. Math. Mon. 1943. Vol. 50, iss. 4, pp. 217–228.
4. De Sitter W. On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis // Proc. Royal Acad. Amsterdam. 1917. Vol. 19, iss. 2, pp. 1217–1225.
5. Ромакина Л. Н. Аналог мозаики на гиперболической плоскости положительной кривизны // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та., 2010. Вып. 12, С. 69–72.
6. Ромакина Л. Н. Веерные триангуляции гиперболической плоскости положительной кривизны // Матем. тр. 2013. Т. 16, вып. 2. С. 142–168.
7. Ромакина Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // Матем. сб. 2012. Т. 203, вып. 9. С. 83–116.
8. Ромакина Л. Н. Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные правильным n -контуром // Теория относительности, гравитация и геометрия : тр. междунар. конф. «Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation». Казань: Казан. ун-т, 2010. С. 227–232.
9. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 274 с.

10. Ромакина Л. Н. Конечные замкнутые $3(4)$ -контурные расширенной гиперболической плоскости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 14–26.
11. Böröczky K. Gombkitoltések allando gorbuletu terekben, I // Mat. lapok. 1974. bd. 25, s. 265–306.
12. Макаров В. С. Об одном неправильном разбиении n -мерного пространства Лобачевского конгруэнтными многогранниками // Дискретная геометрия и топология. К 100-летию со дня рождения Бориса Николаевича Делоне. Тр. МИАН СССР. М.: Наука, 1991. Т. 196, С. 93–96.
13. Ромакина Л. Н. О разбиениях гиперболической плоскости положительной кривизны правильными орициклическими n -трапециями // Дни геометрии в Новосибирске — 2014 : Тез. Междунар. конф., посвящ. 85-летию академика Ю. Г. Решетняка. Новосибирск : Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН. 2014. С. 57, 58.
14. Ромакина Л. Н. Ортогональная орициклическая система координат на гиперболической плоскости положительной кривизны // Дни геометрии в Новосибирске, 2013 : Тез. Междунар. конф. Новосибирск : Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН. 2013. С. 74, 75.
15. Ромакина Л. Н. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // Сиб. электрон. матем. изв. 2013. Т. 10, С. 393–407.
16. Ромакина Л. Н. Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 37–44.
17. Ромакина Л. Н. Циклы гиперболической плоскости положительной кривизны // Геометрия и топология, 12 : Зап. науч. сем. ПОМИ / под ред. Малютина А. В., Нецветаева Н. Ю. СПб.: Изд-во ПОМИ, 2013. Т. 415, С. 137–162.
18. Ромакина Л. Н. Конечные замкнутые 5-контурные расширенной гиперболической плоскости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 38–49.
19. Ромакина Л. Н. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны // Дальневост. матем. ж. 2013. Т. 13, № 1. С. 127–147.

REFERENCES

1. Rozenfeld B. A., 1969, "Non-Euclidean spaces", Nauka, Moscow, 548 p. (Russian)
2. Romakina L. N., 2013, "Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 1 : Trigonometry", Saratov Univ. Press., Saratov, 244 p. (Russian)
3. Coxeter H. S. M., 1943, "A Geometrical Background for De Sitter's World", *Amer. Math. Mon.*, vol. 50, no. 4, pp. 217–228.
4. De Sitter W., 1917, "On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis", *Proc. Royal Acad. Amsterdam.*, vol. 19, no. 2, pp. 1217–1225.
5. Romakina L. N., 2010, "An analog of a mosaic on a hyperbolic plane of positive curvature", *Matematika, mekhanika : sb. nauch. tr.* Saratov Univ. Press, Saratov, no. 12, pp. 69–72. (Russian)
6. Romakina L. N., 2014, "Fan triangulations of a hyperbolic plane of positive curvature", *Siberian Advances in Mathematics*, vol. 24, no. 3, pp. 204–221. (Russian)
7. Romakina L. N., 2012, "Simple partitions of a hyperbolic plane of positive curvature", *Sbornik: Mathematics*, vol. 203, no. 9, pp. 1310–1341. (Russian)
<http://dx.doi.org/10.1070/SM2012v203n09ABEH004266>.
8. Romakina L. N., 2010, "Partition of a hyperbolic plane of positive curvature generated by the regular n -loops", *Probability, Gravitation, and Geometry, The International Conference "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation"*
(*Teoriia otnositel'nosti, gravitatsiia i geometriia: trudy mezhdunar. konf. "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation"*, Kazanskii un-t, Kazan'), Kazan Univ., Kazan, pp. 227–232. (Russian)
9. Romakina L. N., 2013, "Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 2 : Transformations and simple splittings", Saratov Univ. Press, Saratov, 274 p. (Russian)
10. Romakina L. N., 2010, "Finite closed 3(4)-loops of extended hyperbolic plane", *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriia «Matematika. Informatika. Mekhanika»*, vol. 10, no. 3, pp. 14–26. (Russian)
11. Böröczky K., 1974, "Gombkitoltések allando gorbületu terekben, I", *Mat. lapok.*, vol. 25, pp. 265–306.

12. Makarov V. S., 1991, "On some tiling of the n -dimensional Lobachevskij space with congruent polytopes", *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 196, pp. 93–96. (Russian)
13. Romakina L. N., 2014, "About partition of a hyperbolic plane of positive curvature by correct horocyclic n -trapezes", *Dni geometrii v Novosibirske — 2014: tez. mezhdunar. konf., posviashch. 85-letiiu akademika Iu.G. Reshetniaka* (*Days of the geometry in Novosibirsk, 2014: tes. of the international conference devoted to the 85 anniversary of the academician Yu.G. Reshetnyak*), Novosibirsk, pp. 57, 58. (Russian)
14. Romakina L. N., 2013, "The orthogonal horocyclic coordinat system on the hyperbolic plane of positive curvature", *Dni geometrii v Novosibirske, 2014: tez. mezhdunar. konf.* (*Days of the geometry in Novosibirsk, 2013: tes. of the international conference*), Novosibirsk, pp. 74, 75. (Russian)
15. Romakina L. N., 2013, "Analogues of a formula of Lobachevsky for angle of parallelism on the hyperbolic plane of positive curvature", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 10, pp. 393–407. (Russian) Available at:
<http://semr.math.nsc.ru>
16. Romakina L. N., 2012, "Oval lines of the hyperbolic plane of positive curvature", *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriya «Matematika. Informatika. Mekhanika»*, vol. 12, no. 3, pp. 37–44. (Russian)
17. Romakina L. N., 2013, "Cycles of the hyperbolic plane of positive curvature", *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, vol. 415, pp. 137–162. (Russian)
18. Romakina L. N., 2010, "Finite closed 5-loops of extended hyperbolic plane", *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriya «Matematika. Informatika. Mekhanika»*, vol. 11, no. 1, pp. 38–41. (Russian)
19. Romakina L. N., 2013, "The theorem of the area of a rectangular trihedral of the hyperbolic plane of positive curvature", *FEMJ*, vol. 13, no. 1, pp. 127–147. (Russian)

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.
Получено 10.06.2015