ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 51(091) DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-166-198

Научная школа Якоба и Иоганна Бернулли. Учителя и ученики

Г. И. Синкевич

Синкевич Галина Ивановна — доктор физико-математических наук, Санкт-Петеррбургский государственный архитектурно-строительный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Аннотация

В течение XVII в. в работах европейских ученых формировались аналитические методы, приходящие на смену геометрическим и синтетическим, где для каждой задачи создавался собственный уникальный конкретный метод, не допускающий обобщения на широкий класс задач. На базе обобщения аналитических методов создавали свои теории И. Ньютон и Г.В. Лейбниц. Их изложение было затруднительно для освоения. Прямых учеников не было ни у Ньютона, ни у Лейбница. В Англии пропаганду учения Ньютона взяли на себя К. Маклорен, Э. Галлей, А. де Муавр и Д. Стирлинг. В Европе распространением учения Лейбница занялись братья Бернулли. Рассматриваемый этап представляет собой переходный период от эпохи классических геометрических методов к универсальным аналитическим. Якоб и Иоганн Бернулли были лучшими учителями математики в Европе, такого объема знаний не давал ни один университет. Как в Базеле, так и в Париже у них было много учеников и последователей. Благодаря их педагогической деятельности сформировалась сильнейшая в Европе базельская математическая школа. Выделены группы ученых, обучавшихся либо консультировавшихся у Якоба Бернулли и Иоганна Бернулли как лично, так и в переписке, как регулярно, так и эпизодически, охарактеризована их научная деятельность. Это поколение в свою очередь создало потенциал для следующего поколения и дальнейшего развития аналитических методов, благодаря обобщению и классификации проблем анализа и аналитической механики уже к середине XVIII в. изменилась архитектура математики и расширились ее области.

Ключевые слова: математический анализ, Якоб Бернулли, Иоганн Бернулли, научно-педагогическая деятельность.

Библиография: 31 названий.

Для цитирования:
Синкевич Г. И. Научная школа Якоба и Иоганна Бернулли. Учителя и ученики // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 166–198.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 51(091) DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-166-198

Jacob and Johann Bernoulli scientific school. Teachers and disciples

G. I. Sinkevich

Sinkevich Galina Ivanovna — doctor of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (Saint Petersburg).
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Abstract

During the 17-th century, analytical methods were formed in the works of European scientists, replacing geometric and synthetic ones, where for each problem their own unique specific method was created, which did not allow generalization to a wide class of problems. Based on the generalization of analytical methods, I. Newton and G.W. Leibniz created their theories. Their presentation was difficult to master. Neither Newton nor Leibniz had direct students. In England, C. Maclaurin, E. Halley, A. de Moivre and D. Stirling took on the propaganda of Newton's doctrine. In Europe, the Bernoulli brothers took up the dissemination of Leibniz's doctrine. The period under consideration is a transitional period from the era of classical geometric methods to universal analytical ones. Jacob and Johann Bernoulli were the best teachers of mathematics in Europe; no university gave such a volume of knowledge. Both in Basel and in Paris, they had many students and followers. Thanks to their teaching activities, the Basel mathematical school, the strongest in Europe, was formed. Groups of scientists who studied or consulted with Jacob Bernoulli and Johann Bernoulli, both personally and in correspondence, both regularly and occasionally, are identified, and their scientific activities are characterized. This generation, in turn, created the potential for the next generation and the further development of analytical methods, thanks to the generalization and classification of problems of analysis and analytical mechanics, by the middle of the 18-th century the architecture of mathematics had changed and its areas had expanded.

Keywords: mathematical analysis, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, scientific and pedagogical activity.

Bibliography: 31 titles.

For citation:
Sinkevich, I. I. 2026, "Jacob and Johann Bernoulli scientific school. Teachers and disciples", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 166–198.

1. Введение

В XVII в. в работах европейских ученых П. Ферма, Р. Декарта, Б. Кавальери, Дж. Валлиса, Дж. Грегори, И. Барроу и многих других формировались аналитические методы, приходившие на смену геометрическим. Особенностью классических методов было создание уникального для каждой задачи конкретного способа, не допускающего обобщения на широкий класс задач. Трудные задачи поддавались лишь математикам-одиночкам, а не широкому кругу образованных людей. Такие разобщенные приемы с трудом адаптировались к методике обучения.

Европейские университеты не являлись научными центрами, в них господствовали схоластические приемы обучения. "Высшими" считались богословский, юридический и медицинский факультеты. Философский факультет (куда входила математика) был подготовительным и считался второстепенным. В школах учителя математики не входили в коллегию преподавателей, их статус отражала поговорка "mathematicus non est collega" (математик – не коллега).

Но жизнь ставила перед математикой новые задачи. Они формировались в промышленности, строительстве, транспорте, артиллерии, навигации, приборостроении, физиологии. Это проблемы гидротехники (давление воды на плотины и шлюзы, работа насосов; движение воды в каналах, кровообращение), кораблестроения и навигации (устойчивость плавающих тел, движение твердого тела в жидкости, картография, определение долготы корабля в открытом море), артиллерии (движение брошенного тела в пустоте и в сопротивляющейся среде), оптики (свойства линз и их систем), точного приборостроения (часы и колебания маятника) ([1], с. 10).

Математики нуждались в среде общения, эпистолярные пути уже не выдерживали потока научной информации. Возникают первые научные журналы: в Париже *Journal des sçavans* (1665 г., на латыни), в Лондоне *Philosophical Transactions of the Royal Society* (1665 г., на латыни), в Лейпциге *Acta Eruditorum* (1682 г., на латыни), в Риме *Giornale de' Letterati* (1668 г., на итальянском), уделявшие немало страниц математическим статьям.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), мечтавший об универсальном математическом языке, понятном широкому кругу математиков, использовавший алгебраический подход, и Исаак Ньютон (1642–1727), один из творцов классической физики, использовавший кинематический подход, создали гениальную теорию – дифференциальное и интегральное исчисление. К сожалению, они не были преподавателями и не имели непосредственных учеников.

В 1684 г. в *Acta Eruditorum* была опубликована фундаментальная статья Лейбница "Новый метод максимумов и минимумов, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления" [24][1]. Этот метод был изложен на шести с половиной страничках плюс страничка чертежей. В статье вводятся основные правила и формулы дифференцирования, геометрический смысл производной и его применение к исследованию кривых – хорошо знакомый всем нам материал, но изложен он весьма схематично, невнятно и не строго. Якоб Бернулли (1654–1705), тогда еще не знакомый с Лейбницем, написал ему письмо с просьбой о разъяснении неясных мест, но Лейбниц был в длительном отъезде и ответил лишь через три года[2]. Якоб Бернулли привлек к изучению метода Лейбница своего младшего брата Иоганна (1667–1748), математический талант которого расцвел к 1687 г. Братьям удалось разгадать основы метода, воссоздать то, что было опущено Лейбницем в его сжатой публикации, и значительно развить новое исчисление. Не случайно Лейбниц высоко ценил их достижения и писал, например, в письме от 21.09.1694 г.: "Эта метода не менее Ваша, чем моя". Якоб совместно с Иоганном овладели дифференциальным и интегральным исчислениями настолько, что вскоре смогли приступить к систематическому развитию метода.

Триумвират – Лейбниц, Якоб и Иоганн Бернулли – менее чем за 20 лет чрезвычайно обогатил анализ бесконечно малых. В отличие от замкнутого И. Ньютона, неохотно публиковавшего свои открытия, общительный и приветливый Г. Лейбниц широко пропагандировал новый метод во всех странах, где он бывал. Благодаря семье математиков Бернулли и их ученикам сформировалась сильная базельская школа математики с европейской известностью. Якоб и Иоганн Бернулли были лучшими учителями математики в Европе, объем преподаваемых ими

---

[1] В 1948 г. ее перевел на русский язык А.П. Юшкевич [10].

[2] С 1676 г. Лейбниц служил историографом при дворе герцога, его работа требовала разъездов по всей Европе. В 1691 г. Иоганн Бернулли был в путешествии по Германии и намеренно заехал в Ганновер, где познакомился с Лейбницем, что подтверждено их перепиской. Когда Лейбниц познакомился с Якобом Бернулли, точно неизвестно, вероятно, около 1695 г. В дальнейшем встречи Лейбница с братьями Бернулли повторялись и поддерживались оживленной перепиской.

знаний значительно превосходил университетские курсы. Как в Базеле, так и в Париже, у них было много учеников и последователей, учившихся регулярно и очно, как в университете, так и частным образом, либо консультировавшихся эпизодически и по переписке. Так, у Якоба учились его брат Иоганн, племянник Николай I, Пауль Эйлер (отец Леонарда), Якоб Герман; у Иоганна – его сыновья Николай II и Даниил, Гийом Франсуа де Лопиталь, Габриэль Крамер, Леонард Эйлер, Пьер Луи де Мопертюи, Никола де Бегелен. В Париже И. Бернулли обучил методу Лейбница членов кружка Николя Мальбранша: священника Луи Бизанса, математиков Шарля Рене Рейно, Пьера де Монмора, маркиза Лопиталя и Пьера Вариньона, астронома Алекси Клеро. Все они имели своих учеников, таким образом, учение Лейбница распространялось по всей Европе. Самую сильную опору учение обрело во Франции, охватило Швейцарию, Италию и Россию.

Братьями Бернулли была выработана подача материала в виде легко остающихся в памяти формул, что давало точки роста для новых преобразований; благодаря существованию общего метода решались и возникающие попутно проблемы. Использовавшиеся методы базировались на классической геометрии и механике, но привлекалась и геометрия неделимых, и модельный анализ, и кинематический метод, и использование рядов, и инфинитезимальные методы, апеллирующие к сложным пропорциям, использованию первой и второй производной для определения участков монотонности, экстремумов, направления выпуклости и точек перегиба, построению касательных и их связи с квадратурами. Понятия неопределенного интеграла в XVII в. еще не было, но создавались обширные таблицы дифференциалов для конкретных задач. Наряду с алгебраическими кривыми из задач физики и механики в XVII в. появились и заинтересовали математиков новые кривые: брахистохрона, трактриса, циклоида, многолепестковые розы, спирали, цепная линия; эволюты и эвольвенты, конхоиды, верзьера, строфоида и мн. др. В XVII–XVIII в. свойства трансцендентных кривых выражались в алгебраической форме на основе зависимостей между специально подобранными отрезками. Далеко не всегда их можно было построить классическими методами циркуля и линейки. Приходилось использовать кинематический метод (представление кривой как траектории движения точки, полученного в результате сложения простых движений), модельный анализ, допускающий физический эксперимент по измерению длины кривой с помощью нитки и определению площади между кривой и ее асимптотой, центра тяжести с помощью подвешивания грузиков на модель кривой, и проч.

Я. Герман говорил: "при исследовании провисания ткани (навеса, Веларии) и рисунка полотна я помещал перед глазами эти фигуры такими, какими они должны быть: я получил кривые; разделив кривые на элементы, я исследовал, на что должны влиять механические принципы в каждом, и так я спускался шаг за шагом к простейшим принципам, из композиции которых впоследствии получил построение кривой; и это действительно оказалась Велария (навес) или цепная линия" ([7], с. 4).

Особенностями научной школы Лейбница–братьев Бернулли были общность разрабатываемых проблем, интенсивное коллегиальное общение в ежемесячном журнале *Acta eruditorum*. Обсуждались и предлагались задачи, назначались призы за решения, рецензировались, критиковались и оценивались методы, исправлялись ошибки, ради сохранения приоритета публиковались или рассылались надежным людям анаграммы и логогрифы – зашифрованные решения, авторы соревновались в получении наиболее изящного либо наиболее общего способа решения. Чтение этого журнала показывает, как развивался и укреплялся метод дифференциального и интегрального исчисления. Так, например, Якоб Бернулли в 1690 г. предложил задачу: найти форму струны (или каната, или цепи), совершенно гибкой во всех своих частях, но неспособной к растяжению, свободно подвешенной между двумя неподвижными точками. Решение этой проблемы предложили Иоганн Бернулли, Лейбниц и Гюйгенс, а кривая получила название фуникулярия (веревочная) и/или катеноида (цепная). В 1696 г. Иоганн Бернулли поставил задачу о брахистохроне: опубликовал ее без решения, приглашая лучших математиков заняться ею. Четверо ученых решили эту задачу: Лейбниц, Ньютон, де-Лопиталь и Якоб Бернулли. Решение Якоба Бернулли было наиболее общим и сыграло выдающуюся роль в истории математики. Искали также формы и уравнения пространственных кривых и поверхностей: паруса; ткани, плавающей в воде; вуали, развеваемой ветром; стержня под нагрузкой и многие другие. Как говорил Якоб Герман в 1726 г. в Санкт-Петербурге, "Та высокая эффективность, которой постепенно достигло дифференциальное исчисление, должна быть отнесена по большей части к [Якобу] Бернулли, поскольку он, в своих проблемах, на решение которых едва ли можно было надеяться другими методами, дал чудесные результаты в удивительном количестве; иначе этим исчислением бы долго пренебрегали и мало использовали" ([6], с. 14).

Более всего приверженцев нового учения привлекала возможность по геометрическим или механическим свойствам кривых создавать их уравнения, а также возможность вычислять квадратуры[3] кривых (длину, площадь и проч.). Тому немало примеров, о которых мы надеемся в будущем рассказать читателю.

Я. Герман дал прекрасную оценку новому исчислению: "Новый метод дифференциального исчисления в стиле Лейбница, или ньютоновский метод флюксий прекрасен, как жизнь, поскольку он приводит к недоступным для предыдущих методов истинам, и даже к таким, истинность которых устанавливалась из других источников, это дало бы подтверждения, которые он должен был бы предоставить, однако у него не было недостатка в противниках и критиках, и даже по сию пору у него нет в них недостатка, хотя их теперь меньше, чем раньше. Ибо этот метод, как и искусство фокусников, показался противникам скорее чудесным, чем надёжным, на который можно уверенно положиться и пользоваться" ([6], с. 13).

2. Основные члены школы-сообщества

2.1. Якоб Бернулли (Jakob Bernoulli, 1654–1705)

Рис. 1: Якоб Бернулли. Портрет работы художника Никлауса Бернулли, брата Якоба. 1687.

[3]Квадратурой называли любое вычисление с помощью интеграла.

Старший из братьев и первый математик в семье. Учился в Базельском университете. Вопреки воле отца начал заниматься математикой, получил степень магистра философии в 1671 г., после чего совершил путешествие по Европе. В Нидерландах познакомился с Христианом Гюйгенсом (1629–1695). Вернувшись в Базель, стал читать в университете курс экспериментальной физики, с 1686 г. занял кафедру математики. Научные интересы Якоба были сосредоточены на развитии и применениях математического анализа. Освоив алгоритм Лейбница, приложил его к исследованию кривых. Совместно с братом Иоганном заложил основы вариационного исчисления. Важную роль здесь сыграло решение задачи о брахистохроне и изопериметрической задачи, состоящей в отыскании фигуры, ограниченной линией определенной длины и имеющей наибольшую площадь. При отыскании сумм одинаковых степеней натуральных чисел Якоб открыл встречающиеся в различных разделах математики числа, названные впоследствии его именем. Он выполнил значительные исследования в области числовых рядов.

Основополагающий вклад внес Якоб в теорию вероятностей. Этими исследованиями он занимался в последние 20 лет жизни. Итогом стало выпущенное его племянником Николаем Бернулли в 1713 г., через семь лет после смерти Якоба, “Искусство предположений”, содержащее его закон больших чисел. В области научных интересов Я. Бернулли находились и проблемы механики, гидравлики, сопротивления материалов.

2.2. Иоганн Бернулли (Johann Bernoulli,1667–1748) – младший брат и ученик Якоба Бернулли

Рис. 2: Иоганн Бернулли. Портрет работы И. Р. Хубера, 1740 г.

Якоб привлек к занятиям математикой своего младшего брата Иоганна. Иоганн продолжал по настоянию отца занятий медициной, в 1690 г. защитил диссертацию на звание лицентиата, дающую право читать лекции в университете. Затем отправился в длительное путешествие, около года жил в Женеве, переехал в Париж (1692 г.). Приезд Иоганна в столицу Франции сыграл решающую роль в приобщении французских математиков к школе Лейбница. В Париже Иоганн познакомился с астрономом Д.Д. Кассини, математиком Ф. де ла Гиром (ст.). Дружба и переписка Иоганна с П. Вариньоном продолжалась до самой смерти последнего в 1722 г.

В литературно-философском салоне Николя Мальбранша Иоганн познакомился с механиком П. Вариньоном и маркизом Г. де Лопиталем, имевшим репутацию одного из крупнейших французских математиков. Легкость, с которой И. Бернулли решал трудные, с точки зрения Г. Лопиталя, задачи, поразила его, Лопиталь начал брать у И. Бернулли уроки, а затем, после отъезда И. Бернулли в Базель, получал его лекции в письменном виде. Их переписка продолжалась более 10 лет, до самой смерти Лопиталя. В 1696 г. Лопиталь издал свой учебник "Анализ бесконечно малых" [25], [3]. Курс, читаный Бернулли и посылаемый в письмах Лопиталю, разошелся в копиях по рукам. Такая копия была у Я. Германа, Ш. Рейно, Л. Бизанса, П. де Монмора, Н. Мальбранша. Опубликован этот курс И. Бернулли был уже после смерти Г. Лопиталя, в третьем томе сочинений И. Бернулли в 1742 г.: "Математические лекции о методе интегралов и других вопросах, написанные для маркиза Лопиталя" [13], а "Лекции по исчислению дифференциалов" [14] были обнаружены в рукописях библиотеки Базельского университета в 1922 г. и изданы в 1924 г. Несмотря на то, что курс И. Бернулли был прочитан одному слушателю, он сыграл большую роль в становлении анализа.

В ноябре 1692 г. по настоянию родных Иоганн возвратился домой и продолжал изучать медицину. В 1694 г. он получил степень доктора медицины, защитив диссертацию "О движении мускулов", в которой задачи о форме и движении мускулов решались с помощью анализа бесконечно малых. Т.к. в Базельском университете кафедра математики была занята его старшим братом, И. Бернулли принял предложение Гронингенского университета (Голландия), где преподавал с 1695 по 1705 г. После смерти Якоба Иоганн вернулся в Базель и в течение 42 лет занимал кафедру математики в университете.

Первая его лекция "О новых фактах анализа и высшей геометрии" собрала огромную аудиторию. Его лекции слушали студенты и ученые из Англии, Италии, Франции, Швеции и других стран. Он вел чрезвычайно деятельную жизнь: руководил кафедрой, факультетом и университетом (был восемь раз деканом философского факультета и два раза ректором университета), председательствовал и выступал на диспутах, переписывался с математиками, физиками, Академиями, членом которых состоял, никогда не прекращал научную работу. Регулярно проводил "приватные коллегии", то есть читал лекции у себя на дому. На эти лекции собирались близкие ему люди: сыновья Николай, Даниил, Иоганн, Й. Гесснер со своим другом А. фон Халлером, П. де Мопертюи и другие. При всей своей занятости Иоганн находил время для выполнения поручений магистрата: в течение года ежедневно проводил несколько часов в школах города.

Иоганн был счастлив в учениках. В молодости он обучал Гийома де Лопиталя, Пьера Вариньона, в университете его студентами были трое его сыновей (Николай, Даниил и Иоганн), Г. Крамер, Й. С. Кениг и другие выдающиеся математики. Особое внимание Иоганн уделял будущему великому математику Леонарду Эйлеру, с ним он встречался и проводил занятия отдельно, каждую субботу. Многогранная педагогическая деятельность И. Бернулли привела к созданию школы, которой суждено было в следующих поколениях еще более развить новую математику.

Иоганн Бернулли дал первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчислений, нашел новые методы решения дифференциальных уравнений, впервые поставил и решил задачи о геодезических линиях. Он успешно решал механические задачи: в теории колебаний маятника, теории удара, гидравлике. Одна из наиболее значительных заслуг И. Бернулли перед наукой состоит в том, что он поставил и решил задачу о брахистохроне, тем самым положив начало вариационному исчислению. В исследованиях по механике применял закон сохранения энергии (живой силы, как тогда говорили).

2.3. Пауль Эйлер (Paulus III Euler, 1670–1745), ученик Якоба Бернулли

Отец Леонарда, пастор Реформатской церкви. Из автобиографии Леонарда Эйлера: "Мой отец был Паулюс Эйлер, тогда назначенный пастором в деревню Риен, в часе езды от Базеля, а имя моей матери было Маргарета Брукер. Мои родители переехали в Риен, где в свое время я получил от отца свое первое обучение; и поскольку он был одним из учеников всемирно известного Якоба Бернулли, он попытался передать мне первые принципы математики, и для этой цели использовал "Косс" Кристофа Рудольфа с аннотациями Михаэля Штифеля[4]", по которому я усердно практиковался в течение нескольких лет." ([4], с. 248–249).

2.4. Якоб Герман (Jakob Hermann, 1678–1733), ученик Якоба Бернулли

Рис. 3: Якоб Герман. Автор портрета и дата написания неизвестны

Швейцарский математик и механик, любимый ученик Якоба Бернулли, родственник (троюродный дядя по матери) Леонарда Эйлера, стал первым профессором высшей математики Петербургской академии наук. Его отец был директором гимназии Базеля (Gymnasialrektor).

[4]Михаэль Штифель (Michael Stifel, ок.1487–1567) – немецкий математик, один из изобретателей логарифмов, автор книги "Die Coss Christoffs Rudolffs", Königsberg, 1553 г. Коссисты – немецкие алгебраисты XIV–XV веков. Неизвестное в уравнениях они, следуя Л. Пачоли, называли *cosa, Coß* – вещь. Кристоф Рудольф (Christoph Rudolff, 1499–1545) – немецкий математик, автор первого немецкого учебника алгебры «Быстрый и красивый счёт при помощи искусных правил алгебры, обычно называемых „Косс"»(Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coß genennt werden, 1525). Заметим, что у П.П. Пекарского, а вслед за ним и у В.Е. Прудникова имя автора этого учебника расшифровывается как Рудольф Лос (Rudolff Losz), видимо, по прочтении рукописной автобиографии Л. Эйлера и неразборчивости его почерка.

Якоб Герман изучал философию в Базельском университете и много внимания уделял математике и механике, занимаясь с профессором Я. Бернулли, а затем защитив диссертацию по данной им теме (ряды) и под его руководством. Блестящая полемическая статья (1700 г.) Германа в защиту учения Лейбница обеспечила ему уважение и покровительство последнего. Лейбниц способствовал его избранию иностранным членов Берлинской академии наук (1701 г.). Именно Герману Лейбниц поручил в 1705 г. написать некролог на смерть Я. Бернулли для *Acta eruditorum*.

В 1707–1713 гг. Герман был профессором математики в Падуе (Италия), где, помимо преподавания, основным его научным интересом оставалось распространение, разработка и применение дифференциального исчисления. У него сложился круг научного общения, в который входили многие крупные математики Италии, в том числе Я. Риккати и Г. Гранди. В 1708 г. Герман был избран членом Академии в Болонье. С 1714 по 1725 г. Герман преподавал в университете Виадрина во Франкфурте-на-Одере. В 1716 г. издал свой труд по механике "Форономия" [23].

С 1725 по 1731 г. Герман был *Первым профессором высшей математики* (professor primarius et Matheseos sublimioris) в Санкт-Петербурге, в созданной указом Петра I Академии наук. Как старший из профессоров выступал перед императрицей на ежегодных открытых заседаниях Академии, всячески пропагандируя учение Лейбница.

Основные работы Германа относятся к дифференциальному исчислению, небесной механике, геометрии, сферической геометрии, тригонометрии, оптике, вариационному исчислению, акустике. Его труды по механике характеризуют переход от геометрических представлений Ньютона к аналитическим методам исчисления бесконечно малых.

2.5. Пьер Вариньон (Pierre Varignon, 1654–1722), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 4: Пьер Вариньон. Работа неизвестного автора. Ок. 1719 г.

Французский математик и механик. Изучал богословие в иезуитском колледже в Кане (Caen), но затем увлекся математикой и механикой, в 1687 г. опубликовал "Проект новой механики" [31], где сформулировал понятие параллелограмма сил, момента сил и геометрических операций сложения и вычитания сил. Учился у И. Бернулли, поддерживал переписку с обоими братьями Бернулли, Лейбницем и Ньютоном. С 1688 г. – профессор математики колледжа Мазарини, с 1704 г. – профессор Коллеж де Франс. Член Парижской академии наук (1688 г.), Лондонского королевского общества (1714 г.). Сферой его интересов были статика и механика, инфинитезимальный анализ, геометрия, гидромеханика. Активно пропагандировал дифференциальное исчисление. Формализовал понятия мгновенной скорости и ускорения и связи между ними на основе дифференциального исчисления.

С 1700 г. в Парижской академии наук нарастало активное противодействие новому исчислению. Еще в 1697 г. Пьер Вариньон столкнулся с первой критикой со стороны Академии. Так, он писал Иоганну Бернулли: "Маркиз де Лопиталь все еще в деревне, так что я оказался здесь один, на меня пала обязанность защищать бесконечно малые величины, истинным мучеником которых я являюсь, выдержав уже столько нападок за них со стороны некоторых математиков старого стиля, огорченных тем, что молодые люди догоняют и даже превосходят их в этом исчислении, делают все возможное, чтобы порицать их; хотя с тех пор, как маркиз де Лопиталь дал решение Вашей проблемы *linea celerrimi descensus* (линии скорейшего спуска), они уже не говорят так громко, как прежде" ([15], с. 26).

2.6. Шарль Рене Рейно (Charles René Reyneau, 1656–1728), ученик Иоганна Бернулли

Французский математик, аббат, свободный академик Парижской академии наук (т.е. член-корреспондент, 1716 г.)[5]. С 1683 г. в течение 22 лет преподавал математику в колледже в Анжере. С целью обоснования алгебраических и аналитических методов по примеру классического обоснования геометрии и уступая настоятельной просьбе Мальбранша, Ш.Р. Рейно на основе работ Декарта, Лейбница, Ньютона и братьев Бернулли, переписки и рукописей, издал в 1798 г. ставший популярным двухтомник "Доказательный анализ, или метод решения математических задач" [29]. Первый том содержал теорию нового исчисления, в том числе доказательства многих методов[6], оставленные авторами без внимания, второй том – приложения. Некоторые ошибки были исправлены А. Клеро во втором издании 1736 г. В 1714 г. издал первый том вводного учебника "Наука об исчислении величин вообще, или Элементы математики" [30], оба тома вышли посмертно в 1739 г.

2.7. Луи Бизанс (Louis De Byzance, ?–1722), ученик Иоганна Бернулли

Священник Луи Бизанс (при рождении – Рафаил Леви) из Константинополя. Проявлял большой интерес к восточным рукописям Нового Завета, был способным математиком. Член парижского кружка Мальбранша, где стал учеником Иоганна Бернулли. В 1705 г. аббат Рейно среди других рукописей получил от Бизанса "Leçons" – рукопись лекций Иоганна Бернулли, подготовленных для Лопиталя[7].

[5]https://bookofproofs.github.io/history/17th-century/reyneau.html

[6]Заметим, что в то время доказательства были приняты только в геометрии; в алгебре удовлетворялись "демонстрациями", т.е. примерами и/или контрпримерами. Вопрос об обосновании математического анализа был открыт.

[7]https://bookofproofs.github.io/history/17th-century/reyneau.html

2.8. Гийом Франсуа маркиз де Лопиталь (Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital,1661–1704), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 5: Гийом Франсуа Антуан, маркиз де Лопиталь. Гравюра резцом Жерара Эделинка (Gerard Edelinck) по картине Николя Фуше (Nicolas Fouché). Не позже 1707 г.

Происходил из знатной семьи, был в военной службе[8], но по слабости зрения оставил службу и посвятил себя наукам. Участник учёного кружка Мальбранша. Под глубоким впечатлением от математического искусства молодого[9] Иоганна Бернулли, Лопиталь начал брать у него уроки зимой 1691–1692 г. (4 месяца) в поместье Лопиталя в Ук (Oucques), близ Блуа. В 1693 г., благодаря частным урокам Бернулли, маркиз Лопиталь решил задачу, поставленную в сочинении Иоганна Бернулли, и 17 июня 1693 г. стал почетным членом Парижской академии наук. Дальнейшая переписка с Иоганном Бернулли позволила ему разнообразить свои решения. Он заинтересовался задачей равновесия подъемного моста – решением была эпициклоида – и опубликовал свои результаты в *Acta eruditorum*. В 1697 г. маркиз под влиянием Иоганна Бернулли опубликовал там же статью о брахистохроне. В письме от 17 марта 1694 г. Лопиталь предложил Бернулли ежегодную пенсию в 300 ливров с обещанием повысить ее, лишь бы Иоганн сообщал только ему свои открытия, согласился бы разрабатывать

[8] Chevalier, marquis de Saint Mesme, comte d'Autremont, seigneur d'Oucques et des maréchaux de France, Guillaume-François de l'Hospital était aussi juge de point d'honneur, grand bailly, gouverneur et capitaine des chasses de la généralité de Dourdan. Рыцарь, маркиз Сен-Мем, граф Отремон, сеньор Ук и маршал Франции, Гийом-Франсуа де Л'Опиталь был также судьей чести, великим приставом, губернатором и капитаном охоты генералитета Дурдана.

[9] Лопиталю было 30 лет, И. Бернулли – 24 года.

интересующие его вопросы и не давал никому копии читанных ему лекций. Этот договор выполнялся вплоть до выхода в свет "Анализа бесконечно малых величин для изучения кривых линий" [25] Лопиталя (1696 г.). После этого, сначала в письмах, а после смерти маркиза в 1704 г. и в печати, Иоганн настоятельно высказывал свои права на авторство "Анализа". Как писал И. Бернулли в письме Лейбницу от 8 февраля 1698 г.: "За исключением немногих страниц (скажу на ухо), все остальное он частью получил от меня в письменном виде, – частью написал под мою диктовку, часть же, после того как я покинул Париж, получил в письмах, многочисленные свидетельства чего я сохранил и смог бы в подходящий момент опубликовать (...), кроме того, я располагаю письмами Лопиталя ко мне, показывающими, сколь многим он мне обязан. Главная заслуга его состоит в том, что он все привел в порядок и отделал по-французски аккуратно то, что я беспорядочно изложил ему частью по-французски, частью по-латыни. Как я сказал, собственно своего он добавил не более чем на 3 или 4 страницы". Бернулли совершенно справедливо отметил, что Лопиталь в сочинении "Анализ бесконечно малых " [25] дал первое систематическое изложение математического анализа. В этой книге собраны и приведены в стройное целое отдельные вопросы, разбросанные до того в переписке и различных статьях.

В 1935 г. "Анализ бесконечно малых" Лопиталя вышел в русском переводе Н.В. Леви под редакцией и с примечаниями А.П. Юшкевича [3].

Якоб Герман в своей петербургской речи "Об истории геометрии" 1726 г. говорит: "В 1696 г. появилось сочинение *Анализ бесконечно малых* Прославленного Маркиза Лопиталя, очень изящный труд, который, помимо ясно объясненных правил дифференциального исчисления, содержит все основные понятия, а именно касательные, максимумы и минимумы, перегибы направления кривизны, радиусы кривизны, оптические линии или Каустики при Отражении и Преломлении, которые касаются Кривых в данном положении, чьи величины дробны, причем числитель и знаменатель в определенных случаях исчезающе малы, и многое другое" ([6], с. 15).

В "Анализе бесконечно малых", в предисловии, Лопиталь пишет: "Я намеревался прибавить к книге еще одну главу, чтобы показать также удивительную пользу этого исчисления в физике, показать, до какой степени точности оно может довести ее и насколько от него может выиграть механика. Но болезнь помешала моему намерению; однако читатели от этого ничего не потеряют, и когда-нибудь они будут за это возмещены даже с избытком.

Во всем этом речь идет лишь о первой части исчисления г. Лейбница, заключающейся в том, чтобы переходить от конечных величин к их бесконечно малым разностям и сравнивать между собой эти бесконечно малые любого рода: эту часть называют *дифференциальным исчислением.* Я также намеревался составить другую часть, которую называют *интегральным исчислением*, и которая заключается в том, чтобы переходить от этих бесконечно малых к конечным величинам или целым, бесконечно малые разности которых они составляют, т.е. в том, чтобы находить суммы этих разностей. Но когда Г. Лейбниц мне написал, что он работает над этим для трактата, который он называет *De scientia infiniti* (О познании бесконечного), то я отказался от мысли лишить читающую публику столь прекрасного труда, долженствующего заключать все наиболее любопытное в обратном методе касательных, в вопросах о спрямлении кривых, о квадратуре заключаемых ими площадей, о квадратурах поверхностей тел, об определении центров тяжести и т.д. Даже это сочинение я публикую лишь потому, что он просил меня об этом в своих письмах и что я считаю это необходимым для подготовки умов к пониманию всего того, что удастся открыть в дальнейшем по этим вопросам.

Под конец я должен признать, что я многим обязан знаниям гг. Бернулли, особенно младшему из них, состоящим в настоящее время профессором в Гронингене. Я без всякого стеснения пользовался их открытиями и открытиями г. Лейбница. Поэтому я не имею ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно, сам довольствуясь тем, что они соблаговолят мне оставить" ([3], с. 58-59).

Заметим, что вошедшее во все учебники анализа “правило Лопиталя” следует называть правилом Бернулли – Лопиталя.

Лопиталь умер в Париже 2 февраля 1704 г. в возрасте 43 лет, оставив сына и четырех дочерей. Его “Трактат о конических сечениях и их использовании для решения уравнений в определенных и неопределенных задачах” [26] был впервые опубликован в 1707 г.

2.9. Пьер Ремон де Монмор (Pierre Rémond de Montmort, 1678–1719), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 6: Пьер де Монмор. Портрет работы Алекси-Симона Белля (Alexis-Simon Belle). 1715 г.

Французский математик, член Лондонского королевского общества (1715), Французской академии наук (1716), внёсший вклад в становление теории вероятностей, член кружка Н. Мальбранша. Поддерживал отношения с А. де Муавром, Ф. Николем, Б. Тейлором, Г. Лейбницем, Николаем I Бернулли. Его исследования по теории вероятностей изложены в особом составленном им сочинении, вышедшем в свет в 1708 г. под заглавием “Опыт исследования азартных игр” [27], но без имени автора. Во втором издании 1713 г. развил теорию сочетаний и анализ выигрыша на ее основе. Ему принадлежит первая постановка Петербургской задачи (Петербургского парадокса), которой также занимались Г. Крамер и Д. Бернулли. Последняя часть сочинения Монмора содержала переписку автора с Иоганном и Николаем I Бернулли.

2.10. Джулио Фаньяно (Giulio Carlo, Count Fagnano, Marquis de Toschi, 1682–1766), состоял в переписке с Иоганном Бернулли

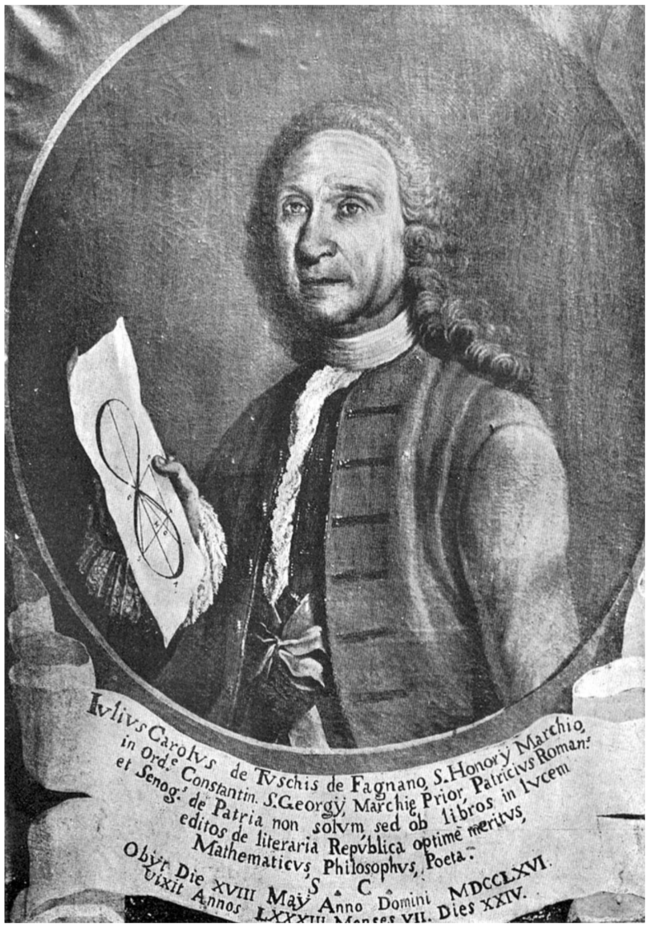

Рис. 7: Джулио Карло, граф Фаньяно, маркиз де Тоски. Гравюра из его книги Opere Matematiche Volume Primo, 1911 (стр. 3)

Итальянский математик, член Лондонского королевского общества и Берлинской академии (1751 г.). Владелец огромного майората, занимался математикой в свое удовольствие и ради ее красоты. Публиковал свои работы в *Giornale de' letterati d'Italia*, в 1750 г. выпустил двухтомник своих сочинений “Produzioni matematiche” [22].

Католическая Италия неохотно принимала идеи протестантских ученых. Журнал *Acta eruditorum*, содержавший статьи не только по математике, но и по теологии, морали и праву, был запрещен. Достать журнал было нелегко, но возможно, а вот читать его католикам было нельзя. Как пишет маркиз Д. Фаньяно в письме к Гвидо Гранди 19.10.1715, для чтения только математических статей этого журнала необходимо было получить разрешение (лицензию) у своего аббата ([28], с. 7). Самому Фаньяно это разрешение доставалось без труда, так как его аббатом был математик Гвидо Гранди.

Основные исследования Фаньяно относятся к теории дифференциальных уравнений, теории функций и алгебре. Особого внимания заслуживают общая теория геометрических пропорций, некоторые новые методы решения алгебраических уравнений до четвертой степени, теорема о спрямлении разностей бесконечных пар дуг, выбранных на эллипсе и гиперболе, что заложило основу теории эллиптических интегралов. Изучал (1718 г.) свойства лемнискаты. Первым применил мнимые степени в биноме Ньютона. Его исследования высоко оценил

Л. Эйлер, благодаря рекомендации которого Фаньяно был избран в Берлинскую академию (1751 г.).

2.11. Николай II Бернулли (Nikolaus (Niklaus) II Bernoulli, 1695–1726), сын и ученик Иоганна Бернулли, старший брат Даниила и Иоганна II Бернулли

Рис. 8: Николай II Бернулли, портрет работы Иоганна Рудольфа Хубера (J. R. Huber). 1723 г.

Математик и механик. Николай II Бернулли родился в Базеле (Швейцария) в семье Иоганна Бернулли. Был очень одарен: в возрасте 8 лет говорил на 4 языках, в 16 лет окончил университет, получив степень магистра философии, в 19 лет защитил диссертацию по правоведению на степень лиценциата. При этом он занимался математикой под руководством отца, помогал ему вести научную переписку и занимался математикой с младшим братом Даниилом. В 1716 г. Н. Бернулли решил предложенную Лейбницем задачу об ортогональных траекториях, благодаря чему стал известен среди математиков. В 1723 г., после путешествия по Италии и Франции, Н. Бернулли был назначен профессором права в Базеле, а через год получил кафедру права в Берне. Когда в 1824 г. Л. Блюментрост, организатор и будущий первый президент Петербургской академии, написал Иоганну Бернулли о желании пригласить одного из его сыновей, было решено, что поедет Даниил. Но Николай, нежно любя брата, выразил желание поехать с ним, несмотря на то, что занимал кафедру в Берне. Вопрос был урегулирован, и в октябре 1725 г. братья прибыли в Петербург. Даниил получил кафедру физиологии, Николай – должность профессора кафедры математики с окладом 1000 рублей (самым высоким из всех платившихся академикам). Братья сразу же включились в работу Академии наук.

К сожалению, деятельность Н. Бернулли в Петербурге продолжалась всего около 8 месяцев. Он умер от обострения язвы желудка.

Николай Бернулли оставил после себя сочинения, которые относятся к теории дифференциальных уравнений и их применению в механике. Посмертно в академическом журнале *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* Т.1, 1728. были опубликованы две его статьи: одна – по теории дифференциальных уравнений (уравнение, позже названное именем итальянского математика Я.Ф. Риккати, и линейные уравнения первого порядка), другая – о движении тел под действием удара.

2.12. Пьер Луи де Мопертюи (Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, 1698–1759), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 9: Пьер Луи де Мопертюи. Гравюра Ж. Долле (J. Daullé, 1741) по рис. Р. Турньера (R. Levrac-Tournières, 1737 г.).

Пьер де Мопертюи – французский математик, естествоиспытатель, механик, астроном, физик и геодезист. В 1718 г. зачислен в мушкетёры и служил в кавалерии. Однако природные наклонности к точным наукам побудили его в 1722 г. выйти в отставку и поселиться в Париже, усиленно занимаясь математикой. Начиная с 1724 г. Мопертюи публикует ряд научных работ, занимался задачами на максимумы и минимумы, изучал свойства циклоиды и других плоских кривых. В 1728 г. побывал в Лондоне, где был избран членом Лондонского Королевского общества. В 1729–1730 гг. в Базеле под руководством И. Бернулли изучал дифференциальное и интегральное исчисление. Вернулся во Францию поборником нового исчисления. В 1731 г. избран членом Парижской академии наук и затем назначен главой геодезической экспедиции, посланной в Лапландию для измерения длины земного меридиана. По приглашению короля Фридриха II в 1740 г. переселился в Пруссию, в 1745–1753 гг. был президентом Физико-математического класса Берлинской академии наук. Работы Мопертюи посвящены механике, математическому анализу и геометрии, а также геодезии, астрономии и биологии. Наиболее известным научным вкладом Мопертюи стал предложенный им принцип наименьшего действия, обобщение которого впоследствии дал Л. Эйлер (1744 г.).

2.13. Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli, 1700–1782), сын и ученик Иоганна Бернулли, ученик своего старшего брата Николая

Рис. 10: Даниил Бернулли. Неизвестный художник. Венецианская школа. 1720-1723 гг.

Д. Бернулли родился в Гронингене (Голландия) в семье Иоганна Бернулли. С 1705 г. семья жила в Базеле, где отцу предложили место профессора математики в университете. Детство Даниила протекало в спокойной обстановке, типичной для семьи успешного ученого. И. Бернулли много времени уделял обучению математике своих сыновей. По настоянию отца Даниил изучал медицину в Базеле, Гейдельберге и Венеции, но уже в 1724 г. публикует свою первую математическую работу, за которую Академия Болоньи сделала его своим членом. Вскоре Д. Бернулли получил премию Парижской академии наук, а всего с 1724 по 1757 г. он удостаивался премий 10 раз, уступая лишь Эйлеру.

С октября 1725 г. братья Николай и Даниил Бернулли поселились в Петербурге. Даниил получил кафедру физиологии, а Николай – кафедру математики.

Деятельность Д. Бернулли в Петербурге была необычайно продуктивна. В течение первого года своей работы в академии он сделал более 10 сообщений, посвященных решению проблем математики и механики, являющихся основой для решения задач физиологии. Первые тома *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* содержат целый ряд его исследований. В 1729 г. Д. Бернулли приступил к работе над “Гидродинамикой”, в основном закончив ее в 1733 г. Он провел многочисленные опыты для проверки выдвинутых им гипотез. В 1738 г. Бернулли издал “Гидродинамику” [12] в Страсбурге, этот труд принес ему мировую славу. В 1950 г. вышел русский перевод [2].

В 1733 г. он обратился к руководству академии с просьбой об отставке, объясняя это сырым климатом Петербурга. Вернулся в Базель, где занял кафедру анатомии и ботаники. В 1750 г. получил в Базельском университете кафедру физики и занимал ее до последних лет жизни.

Связь Даниила с Петербургской академией не прекращалась после его отъезда. Многие его работы публиковались в изданиях Петербургской академии. Они относятся к гидродинамике, кинетической теории газов, теории колебаний. Д. Бернулли, наряду с Даламбером и Эйлером, заложил основы теории уравнений в частных производных. Большое место в его исследованиях занимала теория вероятностей. В его известной работе “Попытка новой теории вычисления вероятностей случайных величин” (1738 г.), опубликованной в Петербурге, Д. Бернулли ввел понятие “морального ожидания”. Это понятие он применил к задаче, которая получила название “Петербургская игра”, или “Петербургский парадокс”.

Научные заслуги Д. Бернулли были высоко оценены современниками. На родине он дважды избирался ректором Базельского университета; был членом многих иностранных Академий и научных обществ.

Все труды Д. Бернулли написаны в изысканной классической манере. Введенные им научные термины отличались четкостью. Его термины “гидродинамика”, “установившееся состояние” стали общепринятыми и используются до сих пор.

Даниил Бернулли прожил долгую жизнь, никогда не был женат. Он был скромным, уравновешенным человеком. На склоне лет Д. Бернулли занялся благотворительностью. На свои средства он построил небольшой отель для путешествующих студентов и ученых, в котором они могли найти приют и пропитание. Даниил Бернулли скончался в возрасте 82 лет в Базеле. Научная общественность отметила кончину великого ученого глубоким трауром.

2.14. Габриэль Крамер (Gabriel Cramer, 1704–1752), ученик Иоганна Бернулли

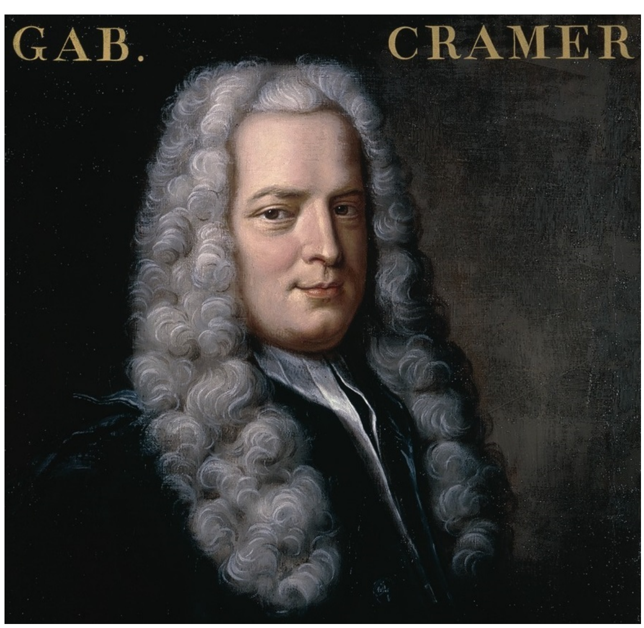

Рис. 11: Габриэль Крамер. Портрет работы Роберта Горделя (R. Gardelle)

Швейцарский математик из Женевы, ученик и друг Иоганна Бернулли, один из создателей линейной алгебры. Помимо занятий с И. Бернулли, учился у Э. Галлея и А. де Муавра в Лондоне, П. Мопертюи и А. Клеро в Париже. По возвращении поддерживал с ними переписку. В 1728 г. предложил свое решение Петербургского парадокса. В 1729 г. вернулся в Женеву и возобновил преподавательскую работу. Участвовал в конкурсе, объявленном Парижской академией, задание в котором: есть ли связь между эллипсоидной формой большинства планет и смещением их афелиев? Работа Крамера занимает второе место (первый приз получил Иоганн Бернулли). Исследования Г. Крамера посвящены геометрии, астрономии, теории вероятностей, философии и истории математики. Крамер также опубликовал труд по небесной механике (1730 г.) и комментарий к ньютоновской классификации кривых третьего порядка (1746 г.). В 1747 г. Г. Крамер второй раз посетил Париж, где познакомился с Ж.Л. Даламбером.

Около 1740 г. Иоганн Бернулли поручил Крамеру хлопоты по изданию сборника собрания своих трудов. В 1742 г. Крамер публикует сборник в 4 томах, а вскоре (1744 г.) выпускает аналогичный (посмертный) сборник работ Якоба Бернулли и двухтомник переписки Лейбница с И. Бернулли. Эти издания имели огромный резонанс в научном мире.

2.15. Леонард Эйлер (Leonhard Euler, 1707–1783), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 12: Леонард Эйлер. Портрет работы Якоба Эммануэля Хандмана (Handmann), 1753 г.

Леонард Эйлер родился в Базеле в семье протестантского священника Пауля Эйлера, учившегося математике у Якоба Бернулли. Пауль Эйлер стал первым учителем сына. Л. Эйлер пишет: “В последующие годы я жил у бабушки в Базеле, чтобы изучить основы гуманитарных наук, частично в местной Гимназии, частично через частных репетиторов, и в то же время добиться прогресса в математике. В 1720 году я был принят в университет в качестве государственного студента, где вскоре нашел возможность познакомиться со знаменитым профессором Иоганном Бернулли, который с особым удовольствием помогал мне в математических науках. Частные уроки, однако, он категорически исключил из-за своего плотного графика: Однако он дал мне гораздо более полезный совет, который состоял в том, чтобы я посмотрел некоторые из наиболее трудных математических книг и проработал их с большим усердием, и если я столкнусь с какими-либо возражениями или трудностями, он предоставил мне свободный доступ к нему каждую субботу днем, и он был достаточно любезен, чтобы прокомментировать собранные трудности, что было сделано с таким желаемым преимуществом, что, когда он разрешил одно из моих возражений, десять других сразу исчезли, что, безусловно, является лучшим методом для достижения благоприятного прогресса в математических науках". ([4], с. 248–249).

По примеру своего учителя, Эйлер всю жизнь вел математические записи. Таких "Записных книжек" за всю жизнь у него было двенадцать[10], первые две (первая и половина второй) из них относятся к базельскому периоду и заполнены записями занятий с И. Бернулли.

В 1727 г. Л. Эйлер благодаря протекции Даниила Бернулли отправился в Петербург. Ему было двадцать лет. Здесь Эйлер сформировался как ученый, жил до 1741 г., затем 25 лет прожил в Германии, в 1766 г. вернулся в Россию, где и жил до конца жизни.

Уникальность Петербургской академии состояла в том, что она не была связана схоластическими традициями и над нею не довлело картезианство. Приехавшие из разных стран ученые были по большей части молодыми; математики, физики и механики, преимущественно из Швейцарии и Германии, смело приветствовали и развивали новое исчисление Лейбница. Ученики братьев Бернулли Я. Герман, Н. и Д. Бернулли, Л. Эйлер составляли научно продуктивное большинство. Дважды в неделю в Конференции Академии читались доклады, которые затем публиковались в *Комментариях академии наук*. Профессора, в том числе Л. Эйлер, несколько раз в неделю читали лекции по математике, физике и механике, составляли учебники. В газете *Приложения к Ведомостям* Эйлер с молодыми коллегами публиковал научно-популярные статьи.

Эйлер написал несколько вводных учебников по элементарной математике: "Руководство к арифметике"[11], "Элементы алгебры", "Полное введение в алгебру"[12], "Планиметрия", "Стереометрия". На базе нового исчисления Эйлер предопределил единство и общность методов, сведя всю высшую математику в целостную теорию, опубликовав ясные и строгие изложения ее разделов в следующих сочинениях: "Аналитическая механика" (1732 г.), "Морская наука" (1749 г.), "Теория движения Луны" (1753 г.), "Введение в анализ бесконечно малых" (2 тома, 1748, 1749 гг., русский перевод 1936 г.), "Дифференциальное исчисление" (1755 г., русский перевод 1949 г.), "Интегральное исчисление" в трех томах[13] (первое издание Петерб. АН 1768–1770 гг., русский перевод 1956–1958 гг.), "Диоптрика" (1769–1771 гг.), "Новая теория движения Луны" (1772 г.).

Как и И. Бернулли, Эйлер занимался математикой со своими сыновьями, а затем с внуками, терпеливо добиваясь понимания. В годы его пребывания в Берлинской академии наук у него в доме жили русские ученики-пансионеры. В Петербурге и Берлине у него было немало учеников: В.Е. Адодуров, С.К. Котельников, С.Я. Румовский. По возвращении в Россию Эйлер обучал своих молодых помощников Н. Фусса, М.Е. Головина, Л.Ю. Крафта-мл., А. Лекселя. Вместе со старшим сыном, Альбрехтом Иоганном, они организовали научный се-

[10] Санкт-Петербургский филиал Архива РАН. Фонд 136, опись 1.

[11] 1738–1740 гг. на нем. яз., рус. перевод В.Е. Адодурова 1740 г., [9].

[12] 1770 г., в русском переводе "Универсальная арифметика".

[13] Том первый – основные начала метода интегрирования вплоть до интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Том второй – теория обыкновенных дифференциальных уравнений второго или высшего порядка. Том третий – дифференциальные уравнения в частных производных, вариационное исчисление.

минар, проводимый на дому у Л. Эйлера, где ставили, обсуждали и решали разнообразные математические проблемы от теории чисел до теории Луны. Протоколы этих обсуждений были опубликованы в 1862 г. в “Opera postuma” [19].

Отметим педагогические черты Эйлера. Он учит читателя технике исследования и доказательства. В отличие от предшествующих ученых (Ферма, Декарт, Ньютон, Лейбниц, Гаусс), приводящих свои результаты в готовом виде без указания способов их получения, Эйлер всегда дает возможность читателю проследить ход своих рассуждений. В его текстах звучит разговорная речь неторопливого и доброжелательного наставника, подробно и доходчиво раскрывающего ход и мотивацию своей мысли, объясняющего, как ему удалось найти более простой способ. Он хорошо умеет встать в положение ученика. Эйлер не одобрял форму старых учебников, приводящих правила и по нескольку примеров к ним. Необходимым Эйлер считал изложение тех идей, которые привели к правильному результату.

Значительность результатов Эйлера была столь велика, что даже Иоганн Бернулли почтительно обращался к нему в письмах: “Более того, мне было весьма приятно, что то, что я написал о вертикальных соприкосновениях, понравилось Вам до восхищения из-за простоты выражения и замечательной пользы, которую они могут принести для объяснения веса кораблей; но я бы предпочел, чтобы Вы сами также произвели расчеты, используя Вашу изобретательность, как это было возможно, чтобы я не ошибся в рассуждениях”[14]. Тем не менее, зная тяжелый характер Иоганна Бернулли, свою статью о логарифме отрицательного числа, который Бернулли считал вещественным, Эйлер опубликовал лишь после смерти Бернулли[15]. В начале своей статьи Эйлер подробно комментирует дискуссию Лейбница и И. Бернулли и анализирует ошибку последнего.

Широк спектр его работ: от элементарных учебников до специальных прикладных и теоретических работ, включающих столь различные области, как алгебра, теория чисел, комбинаторика, анализ, теория рядов и дифференциальные уравнения, теория функций комплексной переменной, вариационное исчисление, классическая и дифференциальная геометрия, топология и теория графов, математическая физика, статистика, механика, гидродинамика, оптика, астрономия, картография, теория приближенных вычислений, теория корабля, баллистика и артиллерия. Исследования Эйлера определили пути мировой математики и стали основой Петербургской математической школы.

---

[14] De caetero gratissimum mihi fuit, quod ad admirationem usque Tihi plaquerint, quae scripsi de oscullationibus verticalibus, propter simplicitatem expressionis et insignem usum, quem praestare possunt in explicandis navium ponderibus; maluissem autem, ut ipse quoque calculum fecisses ex Tue ingenio, quo mihi potuisset, anon in ratiocinando erraverim.

[15] В 1712 г. И. Бернулли и Лейбниц спорили о значении логарифма отрицательного числа. Лейбниц полагал, что он должен быть комплексным (мнимым), но и этот термин у него не имел чёткого определения. Бернулли, а потом и Даламбер, считали, что логарифм отрицательного числа должен быть вещественным. Позже Эйлер доказал, что логарифм отрицательного числа будет комплексным, добавив, что логарифм многозначен [5].

2.16. Йоханнес Гесснер (Johannes Gessner, 1709–1790), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 13: Йоханнес Гесснер. Портрет работы Иоганна Рудольфа Делликера (J. R. Dälliker), ок. 1749 г.

Швейцарский математик из Цюриха, физик, ботаник, минералог и врач. Переехал в Базель, чтобы изучать медицину, затем продолжил обучение в Лейденском университете. В 1728 г. вместе со своим другом, медиком Альбрехтом фон Халлером (1708–1777) изучал математику у Иоганна Бернулли. Гесснер стал врачом в Базеле в 1730 г., но вскоре перешел на научную работу. В 1733 г. он стал профессором математики, а в 1738 г. начал преподавать физику в Цюрихе. В 1752 г. написал сочинение “Физическая диссертация о различиях и различном происхождении окаменелостей, с Божьей помощью” [20].

2.17. Иоганн Самуэль Кёниг (Johann Samuel König, 1712–1757), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 14: Иоганн Самуэль Кёниг. Неизвестный художник. Возможно, Роберт Гардель (R. Gardelle).

Швейцарский математик и механик. Занимался математикой под руководством своего отца. С 1729 г. учился в Лозанне, с 1730 г. – в Базельском университете (в 1730–1733 гг. у Иоганна Бернулли, в 1733–1735 гг. – у Даниила Бернулли), где его однокурсниками были П. Л. Мопертюи и А. К. Клеро; вместе с Клеро и Мопертюи изучал "Principia" Ньютона. в 1735–1737 гг. изучал в Марбургском университете у Христиана Вольфа философию Лейбница. Кёниг преподавал математику и философию Лейбница маркизе дю Шатле. По инициативе Р.А. Реомюра написал работу о математической конструкции пчелиных сот[16], за что в 1740 г. был избран член-корреспондентом Парижской академии наук. В 1747 г. написал работу о форме Земли. С 1747 г. стал профессором математики университета в городе Франекер (Нидерланды). Оспаривал приоритет Мопертюи в формулировке принципа наименьшего действия. Основное направление исследований – динамика. Состоял также иностранным членом Берлинской

[16]Реомюр показывал своим гостям эксперименты, которые он проводил, чтобы получить представление о структуре пчелиных ячеек, и поставил перед Кёнигом задачу доказать, были ли пчелиные ячейки построены наиболее геометрически совершенным образом и выбрали ли пчелы из всех возможных форм ту, в которой будет создано наибольшее пространство с наименьшими затратами материала. Красота задачи привлекла Кёнига, и он обнаружил, что пирамидальное основание шестигранных ячеек, образованное тремя ромбами с определенными углами, было построено точно по законам максимума и минимума. Кёниг провозгласил: «Природа достигает всего самым коротким или наиболее выгодным путем» и доказал это, вычислив ромбический угол базальных поверхностей пчелиных ячеек. Заметим, что этой задачей занимались многие ученые. Благодаря своему исследованию по рекомендации Реомюра Кёниг был избран членом-корреспондентом Парижской академии. Эта его четвертая научная работа никогда не была опубликована под его именем; Реомюр счел целесообразным присвоить часть ее себе [21].

академии (1749 г.), Лондонского Королевского общества в Геттингене (1750 г.). Сформулированный Кёнигом в 1751 г. закон кинетической энергии движения точечной системы масс относительно ее центра тяжести носит его имя (теорема Кёнига).

2.18. Никлаус Блаунер (Niklaus Blauner, 1713–1791), ученик Иоганна Бернулли

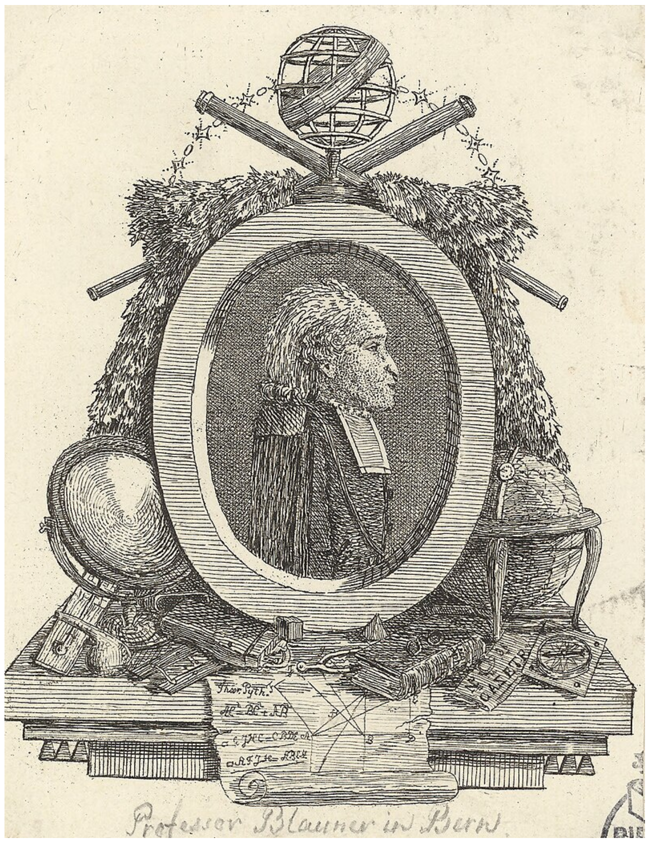

Рис. 15: Никлаус Блаунер. Офорт. Неизвестный художник. Подпись гравера: Mss.Mül.Gr.

Швейцарский профессор физики и географии из Берна. После изучения теологии в Берне и математики у Жана-Пьера де Круза[17] в Лозанне и Иоганна Бернулли в Базеле, был рукоположен в сан реформатского пастора в 1741 г. и в 1749 г. избран профессором математики в *Hochschule*, предшественнице Бернского университета, сменив Самуэля Кёнига. Был ректором *Hochschule* с 1759 по 1762 г.

[17]Jean-Pierre de Crousaz, 1663–1750.

2.19. Алекси Клеро (Alexis Claude Clairaut, 1713–1765), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 16: Алекси Клод Клеро. Гравюра Луи-Жака Катлена (L.-J. Cathelin) с оригинала художника Шарля-Николя Кошена II (Ch.-N. Cochin II). 1790 г.

Французский математик, механик и астроном. Родился в семье парижского преподавателя математики, учился математике у отца. В семье был 21 ребенок, Алекси был вторым.

Как пишет Л.С. Фрейман, "То, что глава семьи был математиком, наложило оригинальный отпечаток на развитие ребенка. Отец знакомил его с алфавитом по буквам на чертежах Евклидовых "Начал". Мальчик хорошо усвоил уроки и к четырем годам уже свободно читал и писал, рано пристрастился к чтению книг по математике. Маленькому Клеро еще не было десяти лет, когда он овладел элементами высшей математики. Клеро изучил книги Лопиталя, читал их по нескольку раз, пока не убеждался, что полностью их усвоил (...). В 12-летнем возрасте Алекси написал работу о кривых 4-го порядка, которую признали парижские академики. По окончании доклада в Академии А. Клеро был подвергнут обстоятельному допросу по теме с целью установить, действительно ли он является автором этого замечательного труда. Ответы А. Клеро не оставили на этот счет никаких сомнений. Аудитория была поражена, а присутствовавший на заседании член Академии аббат Рейно не смог сдержать слез радости и умиления при виде мальчика, достойного занять место среди лучших ученых Франции. Работа была опубликована в *Известиях Берлинской академии наук*" ([8], с. 200–202).

В 16-летнем возрасте А. Клеро представил в Академию трактат "Исследования о кривых двоякой кривизны", в котором заложены основы аналитической геометрии в пространстве, дифференциальной геометрии и начертательной геометрии. По специальному разрешению Людовика XV 18-летний Клеро был избран членом (адъюнктом) Парижской академии. В 1734 г. Пьер Луи де Мопертюи отвез А. Клеро в Базель слушать лекции Иоганна Бернулли[18].

[18]Клеро поступил в Базельский университет 4 октября 1734 г., а в середине декабря 1734 г. они с Мопертюи

Член Лондонского королевского общества (1737 г.), иностранный член Берлинской академии наук (1744), иностранный почётный член Петербургской академии наук (1753). Принимал участие в экспедициях (1736 г., 1741 г.) по измерению градуса меридиана. По возвращении Клеро написал классическую монографию “Теория фигуры Земли, извлечённая из принципов гидростатики” (1743 г.).

В математическом анализе Клеро ввёл понятия криволинейного интеграла (1743 г.), полного дифференциала, а также общего и особого решения дифференциальных уравнений первого порядка (1736), интегрирующего множителя. Огромны заслуги Клеро в механике и особенно в утверждении системы Ньютона. Клеро доказал ряд фундаментальных для высшей геодезии теорем, нашёл остроумный способ приближённого решения “задачи трёх тел”.

Клеро написал замечательные учебники с картинками по элементарной математике “Элементы алгебры” (1731 г.) [17] и “Элементы геометрии ” (1741 г.) [18]. Они впервые ориентированы на детское восприятие, содержат наглядные и понятные детям рисунки – здания, реки, деревья. Трехмерные объекты изображены с применением светотени. В “Элементах алгебры” впервые приводится уравнение плоскости.

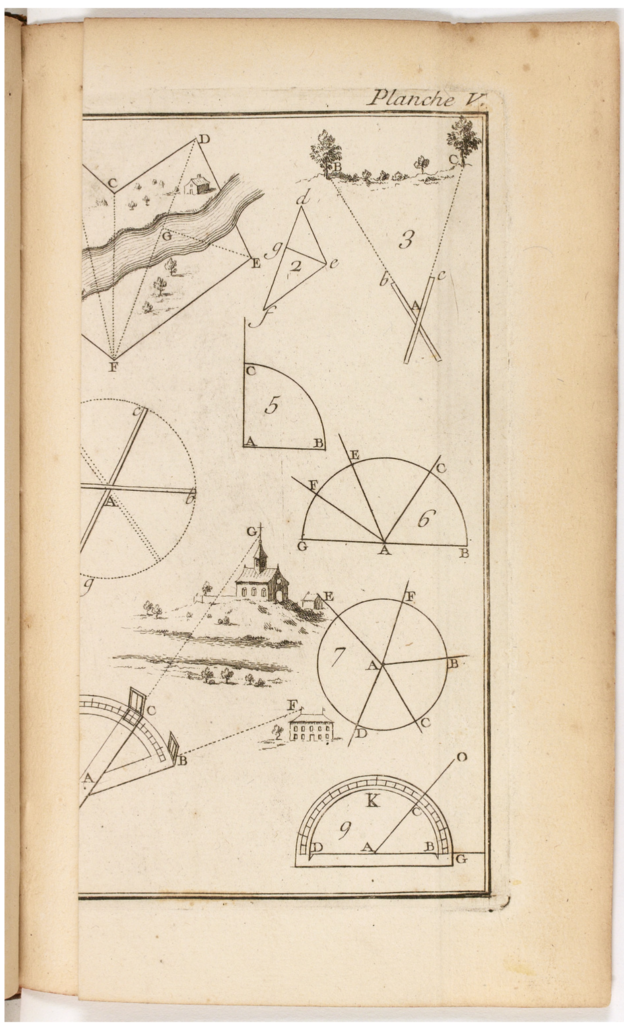

Рис. 17: Алекси Клод Клеро. Чертеж из учебника “Élémens d’algèbre”

12 августа 1731 г. И. Бернулли писал Мопертюи о Клеро: “on a bien fait de rendre justice à son talent” (хорошо, что мы отдали должное его таланту) [16].

уехали, поблагодарив Иоганна Бернулли за гостеприимство [16].

2.20. Никола де Бегелен (Бегелин, Nicolas de Béguelin, 1714–1789), ученик Иоганна Бернулли

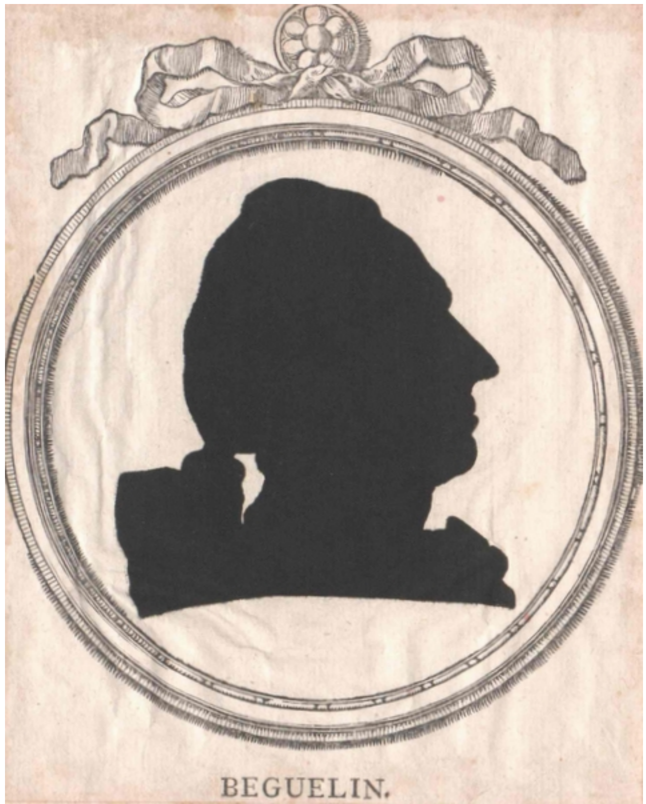

Рис. 18: Николас де Бегелина (1714–1789). Художник Иоганн Фридрих Готлиб Унгер, 1779 г.

Швейцарский физик, математик, философ, писатель, педагог, академик. Доктор права, философии и математики. С 1729 г. изучал право и математику в Базельском университете, ученик Иоганна Бернулли. В 1735 г. после окончания университета, отправился в Вецлар (Wetzlar) для продолжения изучения прусского права. Защитил диссертации по юриспруденции, математике и философии. В записках Берлинской академии опубликовал несколько работ по теории вероятностей, в т.ч. о генуэзском лото, а в 1768 г. опубликовал труд под названием "Об использовании при вычислении вероятностей принципа достаточного основания" [11], в котором он изложил шесть разных решений Петербургского парадокса. Занимался исследованиями в области алгебраического анализа; в области физики – оптикой и метеорологией. Наставник будущего короля Пруссии Фридриха Вильгельма II, директор философского класса Академии наук в Берлине.

2.21. Жан Лерон Д'Аламбер (д'Аламбер, Даламбер; Jean Le Rond D'Alembert, d'Alembert, 1717–1783)

Рис. 19: Ж.Л. Даламбер. Портрет работы М. К. де Латура, 1753 г.

Французский учёный-энциклопедист Жан Лерон Д'Аламбер, известен своим вкладом в математику и механику. Лично Даламбер не общался с Иоганном Бернулли, но они знали о трудах друг друга по переписке и научным публикациям. Даламбер говорил, что если он и знает что-либо из области математики, то этим он обязан И. Бернулли.

3. Заключение

На этом мы заканчиваем обзор первого поколения учеников Якоба и Иоганна Бернулли. Их деятельность протекала в переходный период от эпохи классических геометрических методов к универсальным аналитическим. С конца XVII и до конца XVIII в. были выделены основные типы задач математического анализа и аналитической механики, развивался метод, появились новые разделы математики. Плодотворная работа нескольких поколений представителей базельской школы распространила математический анализ по европейским странам, внедрила его в теоретические и прикладные научные исследования. С годами потенциал аналитических методов только усиливался. Как говорил И.П. Павлов, "наука развивается толчками в зависимости от успехов методики". Среди представителей базельской школы были не только крупные ученые, но и талантливые преподаватели, методисты, создавшие хорошие передовые учебники. Многие, как например, Л. Эйлер и А. Клеро, сочетали в себе талант ученого и преподавателя. Если ранее изучать математический анализ приходилось либо от учителя к ученику, либо по оригинальным трудам ученых, то уже в конце XVIII в. появились прогрессивные учебники А.Г. Кёстнера и С.Ф. Лакруа. В работах математиков XIX в. Б. Больцано, О.

Коши, К. Вейерштрасса эвристическая составляющая дополнилась логической строгостью; Г. Кантор создал теорию множеств, которая впоследствии стала фундаментом математического анализа. Известная истина, что традиция тогда сильна, когда ученики превосходят своих учителей, нашла свое подтверждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. История математики. Т. 2: Математика XVII столетия / под ред. А. П. Юшкевича. — М.: Наука, 1970. — 302 с.

2. Бернулли Д. Гидродинамика, или записки о силах и движениях жидкостей / пер. В. С. Гохмана; коммент. и ред. А. И. Некрасова и К. К. Баумгарта; ст. В. И. Смирнова. — Л.: Изд-во АН СССР, 1950. — 216 с.

3. Л'Опиталь Г. Ф., де. Анализ бесконечно малых / пер. с фр. Н. В. Леви; под ред. и со вступ. ст. А. П. Юшкевича. — М.; Л.: Гос. техн.-теоретич. изд-во, 1935. — 429 с. — URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_005289961/ (дата обращения: 01.01.2024).

4. Пекарский П. П. История Императорской академии наук в Петербурге. — СПб.: изд. Отд-ния рус. яз. и словесности Императорской акад. наук, 1870–1873. — Т. 1. — 1870. — LXVIII, 774 с. — URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003859364/ (дата обращения: 01.01.2024). — Также см.: Записки Императорской академии наук. — Т. 6. — С. 59–92.

5. Синкевич Г. И. История самой красивой формулы математики. Тождество Эйлера // История науки и техники. — 2023. — № 3. — С. 3–25.

6. [Синкевич Г. И.] Вторая часть речи Якоба Германа «О возникновении и развитии геометрии» на заседании Петербургской академии наук 1 августа 1726 г. / пер. с латыни и примеч. Г. И. Синкевич // История науки и техники. — 2024. — № 11. — С. 3–19.

7. [Синкевич Г. И.] Третья часть речи Якоба Германа «О возникновении и развитии геометрии» на заседании Петербургской академии наук 1 августа 1726 г. / пер. с латыни и примеч. Г. И. Синкевич // История науки и техники. — 2024. — № 12. — С. 3–11.

8. Фрейман Л. С. Творцы высшей математики. — М.: Наука, 1968. — 216 с. — URL: https://www.mathedu.ru/text/freyman_tvortsy_vyshey_matematiki_1968/p0/ (дата обращения: 01.01.2024).

9. Эйлер Л. Руководство к арифметике для употребления Гимназии при Императорской академии наук. Ч. 1. — СПб.: тип. Акад. наук, 1740. — URL: https://rusneb.ru/catalog/000207_000017_RU_RGDB_BIBL_0000353513/ (дата обращения: 01.01.2024).

10. [Юшкевич А. П.] Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница / сост. и пер. А. П. Юшкевич // Успехи математических наук. — 1948. — Т. 3, вып. 1. — С. 165–204. — URL: https://www.mathnet.ru/links/ba1a3dd73bc0d48edebb1ae8d1ecd2f8/rm8687.pdf (дата обращения: 01.01.2024).

11. Béguelin N. de. Sur l'usage du principe de la raison suffisante dans le calcul des probabilités // Mémoires de l'Académie de Berlin. — 1769. — P. 382–412.

12. Bernoulli D. Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii. — Strasbourg: Johann Reinhold Dulsecker, 1738. — 325 p. — URL: https://archive.org/details/bub_gb_3yRVAAAAcAAJ (дата обращения: 01.01.2024).

13. Bernoulli Johannis. Opera Omnia. Vol. III. — Lausannae & Genevae: Sumtibus Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum, 1742. — 563 p. — URL: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6962604 (дата обращения: 01.01.2024).

14. Bernoulli Johann. Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92 / hrsg. P. Schafheitlin. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1924. — (Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft).

15. Borowczyk J. Doit-on réhabiliter l'identité numérique du marquis de l'Hospital? // APMEP – PLOT. — 2009. — N° 26. — P. 24–28. — URL: https://www.apmep.fr/IMG/pdf/l_Hospital_Borowczyk.pdf (дата обращения: 01.01.2024).

16. Chronologie de la vie de Clairaut (1713–1765) [Электронный ресурс]. — URL: http://www.clairaut.com/jeanibernoulli.html (дата обращения: 01.01.2024).

17. Clairaut A. C. Élémens d'algèbre. — Paris: David fils, 1731. — URL: https://archive.org/details/chepfl-lipr-AXA20 (дата обращения: 01.01.2024).

18. Clairaut A. C. Élémens de Géométrie. — Paris: David fils, 1741. — 321 p. — URL: https://archive.org/details/elemensdegeomet00claigoog (дата обращения: 01.01.2024).

19. Euler L. Leonardi Euleri Opera postuma mathematica et physica anno MDCCCXLIV detecta, quae Academiae scientiarum Petropolitanae obtulerunt ejusque auspiciis ediderunt auctoris pronepotes Paulus Henricus Fuss et Nicolaus Fuss. Vol. 1. — Petropoli: Typis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, 1862. — X, 588 p. — URL: http://heritage.jscc.ru/Book/10091678 (дата обращения: 01.01.2024).

20. Gessner J. Dissertatio physica de petrificatorum differentiis et varia origine quam Auxiliante Deo. — Zürich: Tigvri, Ex officina Gessneriana, 1752. — URL: https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/150146 (дата обращения: 01.01.2024).

21. Graf J. H. Der Mathematiker Johann Samuel König und das Princip der kleinsten Aktion. — Bern: Buchdruckerei K. J. Wyss, 1889. — URL: https://www.math.rug.nl/bernoulli/uploads/Geschiedenis/konigraf.pdf (дата обращения: 01.01.2024).

22. Fagnano dei Toschi G. C. Produzioni matematiche. In 2 vol. — Pesaro: Stamperia Gavelliana, 1750. — Vol. 1. — URL: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6962477 (дата обращения: 01.01.2024). — Vol. 2. — URL: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE7059372 (дата обращения: 01.01.2024).

23. Herman J. Phoronomia, sive De viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo. — Amsterdam: Rudolf Wetstein & Gerard Wetstein, 1716. — URL: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE7570777 (дата обращения: 01.01.2024). – English translation: Hermann's Phoronomia / transl. and annotated by I. Bruce, 2016. — URL: https://www.17centurymaths.com/contents/hermanphoronomia.htm (дата обращения: 01.01.2024).

24. Leibniz G. W. Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus // Acta eruditorum. — 1684. — Octobris. — P. 467–473. — URL: https://archive.org/details/s1id13206500/page/472/mode/2up (дата обращения: 01.01.2024).

25. L'Hospital G.-F.-A. Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes. — A Paris: de l'Imprimerie royale, 1696. — 266 p. — URL: https://archive.org/details/libria_353620 (дата обращения: 01.01.2024).

26. L'Hospital G.-F.-A. Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminés qu'indéterminés. — A Paris: Chez Moutard..., de Madame, & de Madame la Comtesse d'Artois chez Montalant, Paris et Montpellier, 1776. — URL: https://archive.org/details/traitanalytiqu00lhos (дата обращения: 01.01.2024).

27. Montmort P. R. de. Essay d'analyse sur les jeux de hazard. — Paris: Chez J. Quillau, 1708. — URL: https://archive.org/details/ldpd_6444894_000 (дата обращения: 01.01.2024).

28. Pepe L. La formazione filosofica e scientifica di Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano [Электронный ресурс]. — 2023. — URL: http://dm.unife.it/comunicare-la-matematica/filemat/pdf/FAGNANO.pdf (дата обращения: 01.01.2024).

29. Reynaud Ch.-R. Analyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les problèmes de mathématiques. En 2 t. — Paris: Quillau, imprimeur-juré-libraire de l'Université, 1708.

30. Reynaud Ch.-R. La science du calcul des grandeurs en général, ou Les Élémens Des Mathématiques. — Paris: Quillau, imprimeur-juré-libraire de l'Université, 1739. — 440 p.

31. Varignon P. Projet d'une nouvelle mécanique. — Paris: Edme Martin, veuve, 1687. — URL: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6566991 (дата обращения: 01.01.2024).

REFERENCES

1. Yushkevich, A.P. (ed.) 1970, *Istoriya matematiki. Tom 2. Matematika XVII stoletiya* [History of mathematics. Vol. 2. Mathematics of the 17th century], Nauka, Moscow.

2. Bernoulli, D. 1950, *Gidrodinamika (Hydrodynamica)*, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, Leningrad.

3. L'Hospital, G.-F.-A. 1935, *Analiz beskonechno malykh* [Analysis of the infinitely small], translated from French by N.V. Levi, edited by A.P. Yushkevich, Gosudarstvennoe tekhniko-teoreticheskoe izdatel'stvo, Moscow-Leningrad, Available at: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_005289961/ [Accessed 18 February 2026].

4. Pekarskii, P.P. 1870, *Istoriya Imperatorskoi akademii nauk v Peterburge* [History of the Imperial Academy of Sciences in St. Petersburg], Vol. 1, Izdanie Otdeleniya russkogo yazyka i slovesnosti Imperatorskoi akademii nauk, St. Petersburg, Available at: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003859364/ [Accessed 18 February 2026].

5. Sinkevich, G.I. 2023, "Istoriya samoi krasivoi formuly matematiki. Tozhdestvo Eilera" [History of the most beautiful formula of mathematics. Euler's identity], *Istoriya nauki i tekhniki*, no. 3, pp. 3–25.

6. Sinkevich, G.I. 2024, "Vtoraya chast' rechi Yakoba Germana 'O vozniknovenii i razvitii geometrii' na zasedanii Peterburgskoi Akademii nauk 1 avgusta 1726 g. Perevod s latyni i primechaniya G.I. Sinkevich. Prodolzhenie. Nachalo v predydushchem nomere" [The second part of Jakob Hermann's speech 'On the origin and development of geometry' at the meeting of the St. Petersburg Academy of Sciences on August 1, 1726. Translation from Latin and notes by G.I. Sinkevich. Continuation. Beginning in the previous issue], *Istoriya nauki i tekhniki*, no. 11, pp. 3–19.

7. Sinkevich, G.I. 2024, “Tret’ya chast’ rechi Yakoba Germana ’O vozniknovenii i razvitii geometrii’ na zasedanii Peterburgskoi Akademii nauk 1 avgusta 1726 g. Perevod s latyni i primechaniya G.I. Sinkevich” [The third part of Jakob Hermann’s speech ’On the origin and development of geometry’ at the meeting of the St. Petersburg Academy of Sciences on August 1, 1726. Translation from Latin and notes by G.I. Sinkevich], *Istoriya nauki i tekhniki*, no. 12, pp. 3–11.

8. Freiman, L.S. 1968, *Tvortsy vysshei matematiki* [Creators of higher mathematics], Nauka, Moscow.

9. Euler, L. 1740, *Rukovodstvo k arifmetike dlya upotrebleniya Gimnazii pri Imperatorskoi Akademii nauk* [Guide to arithmetic for the use of the Gymnasium at the Imperial Academy of Sciences], Part 1, Tipografiya Akademii nauk, St. Petersburg, Available at: https://rusneb.ru/catalog/000207_000017_RU_RGDB_BIBL_0000353513/ [Accessed 18 February 2026].

10. Yushkevich, A.P. 1948, “Izbrannye otryvki iz matematicheskikh sochinenii Leibnitsa. Sostavil i perevel A.P. Yushkevich” [Selected passages from Leibniz’s mathematical works. Compiled and translated by A.P. Yushkevich], *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 3, no. 1, pp. 165–204.

11. Béguelin, N. de 1769, “Sur l’usage du principe de la raison suffisante dans le calcul des probabilités”, *Mémoires de l’Académie de Berlin*, pp. 382–412.

12. Bernoulli, D. 1738, *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*, Johann Reinhold Dulsecker, Strasbourg.

13. Bernoulli, Johannis 1742, *Opera Omnia*, Vol. III, Sumtibus Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum, Lausanne & Geneva, Available at: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6962604 [Accessed 18 February 2026].

14. Bernoulli, Johann 1924, *Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92*, edited by P. Schafheitlin, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft.

15. Borowczyk, J. 2009, “Doit-on réhabiliter l’identité numérique du marquis de l’Hospital?”, *APMEP – PLOT*, no. 26, pp. 24–28, Available at: https://www.apmep.fr/IMG/pdf/l_Hospital_Borowczyk.pdf [Accessed 18 February 2026].

16. Clairaut, A.C. n.d., *Chronologie de la vie de Clairaut (1713–1765)*, Available at: http://www.clairaut.com/jeanibernoulli.html [Accessed 18 February 2026].

17. Clairaut, A.C. 1731, *Élémens d’algèbre*, David fils, Paris, Available at: https://archive.org/details/chepfl-lipr-AXA20 [Accessed 18 February 2026].

18. Clairaut, A.C. 1741, *Élémens de Géométrie*, David fils, Paris.

19. Euler, L. 1862, *Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica anno MDCCCXLIV detecta*, Vol. 1, edited by P.H. Fuss & N. Fuss, Typis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, St. Petersburg.

20. Gessner, J. 1752, *Dissertatio physica de petrificatorum differentiis et varia origine*, Ex officina Gessneriana, Zurich, Available at: https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/150146 [Accessed 18 February 2026].

21. Graf, J.H. 1889, *Der Mathematiker Johann Samuel König und das Princip der kleinsten Aktion*, Buchdruckerei K. J. Wyss, Bern, Available at: https://www.math.rug.nl/bernoulli/uploads/Geschiedenis/konigraf.pdf [Accessed 18 February 2026].

22. Fagnano dei Toschi, G.C. 1750, *Produzioni matematiche*, 2 vols, Stamperia Gavelliana, Pesaro, Vol. 1 Available at: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6962477, Vol. 2 Available at: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE7059372 [Accessed 18 February 2026].

23. Hermann, J. 1716, *Phoronomia, sive De viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo*, Rudolf & Gerard Wetstein, Amsterdam, Available at: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE7570777 [Accessed 18 February 2026]; English translation: Bruce, I. (trans.) 2016, *Hermann's Phoronomia*, Available at: https://www.17centurymaths.com/contents/hermanphoronomia.htm [Accessed 18 February 2026].

24. Leibniz, G.W. 1684, “Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus”, *Acta Eruditorum*, October, pp. 467–473, Available at: https://archive.org/details/s1id13206500/page/472/mode/2up [Accessed 18 February 2026].

25. L'Hospital, G.-F.-A. 1696, *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Imprimerie royale, Paris, Available at: https://archive.org/details/libria_353620 [Accessed 18 February 2026].

26. L'Hospital, G.-F.-A. 1776 (1707), *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminés qu'indéterminés*, Chez Moutard, Paris, Available at: https://archive.org/details/traitanalytiqu00lhos [Accessed 18 February 2026].

27. Montmort, P.R. de 1708, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Chez J. Quillau, Paris, Available at: https://archive.org/details/ldpd_6444894_000 [Accessed 18 February 2026].

28. Pepe, L. 2023, “La formazione filosofica e scientifica di Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano”, Preprint, Available at: http://dm.unife.it/comunicare-la-matematica/filemat/pdf/FAGNANO.pdf [Accessed 18 February 2026].

29. Reynaud, C.-R. 1708, *Analyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les problèmes de mathématiques*, 2 vols, Quillau, Paris.

30. Reynaud, C.-R. 1739, *La science du calcul des grandeurs en général, ou Les Élémens Des Mathématiques*, Quillau, Paris.

31. Varignon, P. 1687, *Projet d'une nouvelle mécanique*, Edme Martin, veuve, Paris, Available at: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6566991 [Accessed 18 February 2026].

Получено: 01.09.2025
Принято в печать: 12.02.2026