

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 1.

УДК: 539.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-153-165

Анализ сходимости метода спектральных элементов на примере задачи Лэмба в сравнении с аналитическим решением¹

В. А. Левин, А. В. Вершинин, К. М. Зингерман, Е. М. Уханов

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Вершинин Анатолий Викторович — доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: verish1984@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Уханов Евгений Михайлович — студент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: evgenii.ukhanov@math.msu.ru

Аннотация

Выполнен анализ сходимости метода спектральных элементов (одной из современных модификаций метода конечных элементов) для динамической задачи теории упругости посредством сравнения численного решения с аналитическим решением задачи Лэмба — задачи о динамическом воздействии на границу полуплоскости или полупространства сосредоточенной или распределенной нагрузкой, меняющейся по некоторому временному закону. В статье рассматривается воздействие на границу нагрузкой, меняющейся по временному закону Берлаге. Расчеты выполнены с использованием отечественного прочностного программного пакета «Фидесис». Приводятся графики распределения напряжений для исследуемого материала. Исследована зависимость погрешности численного решения от порядка элементов при фиксированном количестве точек на длину волны Рэлея.

Ключевые слова: задача Лэмба, закон Берлаге, метод конечных элементов, метод спектральных элементов, погрешность численного решения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Левин В. А., Вершинин А. В., Зингерман К. М., Уханов Е. М. Анализ сходимости метода спектральных элементов на примере задачи Лэмба в сравнении с аналитическим решением // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 153–165.

¹Работа выполнена в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00110).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 1.

UDC: 539.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-153-165

Convergence analysis of the spectral element method on the example of the Lamb problem in comparison with the analytical solution

V. A. Levin, A. V. Vershinin, K. M. Zingerman, E. M. Ukhanov

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Vershinin Anatoliy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: versh1984@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tver State University (Tver).

e-mail: Zingerman@rambler.ru

Ukhanov Evgeny Mikhailovich — student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: evgenii.ukhanov@math.msu.ru

Abstract

The convergence analysis of the spectral element method (one of the modern modifications of the finite element method) for the dynamic problem of elasticity theory is performed by comparing the numerical solution with the analytical solution of the Lamb problem — the problem of dynamic action on the boundary of a half-plane or half-space by a concentrated or distributed load changing according to some time law. The article considers the effect on the boundary of a load changing according to the Berlage time law. The calculations are performed using the domestic strength software package “Fidesys”. Stress distribution graphs for the material under study are given. The dependence of the error of the numerical solution on the order of elements for a fixed number of points per Rayleigh wavelength is investigated.

Keywords: Lamb’s problem, Berlage’s law, finite element method, spectral element method, numerical solution error.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Levin, V. A., Vershinin, A. V., Zingerman, K. M., Ukhanov, E. M. 2026, “Convergence analysis of the spectral element method on the example of the Lamb problem in comparison with the analytical solution”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 153–165.

1. Введение

Задача Лэмба — это задача о динамическом воздействии сосредоточенной силы на границу полупространства или полуплоскости, меняющейся по времени (**внешняя задача Лэмба**), и аналогичная задача с силой, меняющейся во времени и приложенной внутри упругого полупространства или полуплоскости (**внутренняя задача Лэмба**). Внутренняя и внешняя задачи Лэмба представляют огромный интерес для геофизики. Причиной этого стало то, что данная задача широко используется при моделировании различных волновых процессов, сопровождающих, например, взрывы или землетрясения.

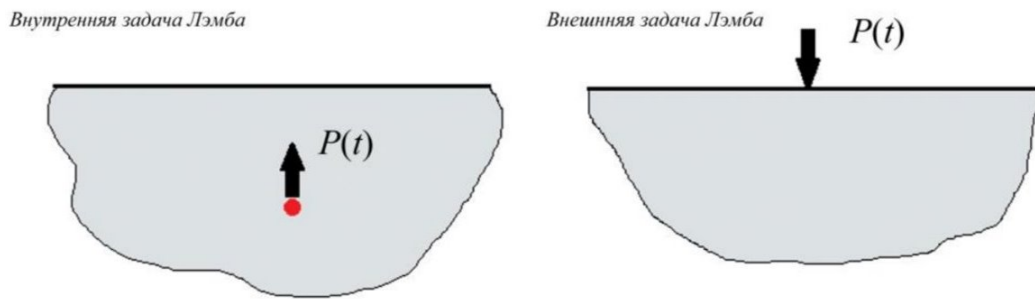


Рис. 1: Внутренняя и внешняя задачи Лэмба

Теория, необходимая для объяснения сейсмических данных, принадлежит одной из двух категорий: изучаются либо асимптотические приближения для волн, распространяющихся в реалистических моделях Земли, либо точные решения для крайне идеализированных сред. В 1904 г. **У. Ю. Лэмб (Lamb W.E., 1904)** [1, 2] дал точное решение задачи второго типа. Работы Лэмба [1, 2] содержали большинство важных для моделирования распространения сейсмических волн в упругой среде элементов.

В данной задаче источник действует как импульс, приложенный в точке свободной поверхности твердого полупространства по нормали к ней. При таком воздействии будут наблюдаться три волновых фронта — это волна Рэлея, а также продольная и поперечная волны [3].

Волны Рэлея образуются при динамическом воздействии на поверхности упругих тел [4].

В [5] показано, что можно вычислять интегральные представления, полученные Лэмбом, считая, что частота не действительная величина, а комплексная. Ранее с использованием этой теории был решён ряд задач данного класса, а в 1984 году с помощью похожей техники В.Б. Поручиков [6] получил формулы для определения смещения на расстоянии x от точки приложения силы, если сила является дельта-импульсом по времени [7,8].

Аналитическое решение задачи Лэмба может быть полезно для верификации программного обеспечения для решения динамических задач теории упругости с помощью численных методов.

В данной статье выполнен анализ сходимости метода спектральных элементов (одной из современных модификаций метода конечных элементов) для динамической задачи теории упругости посредством сравнения численного решения с аналитическим решением задачи Лэмба. В статье рассматривается воздействие на границу нагрузкой, меняющейся по временному закону Берлаге. Расчеты выполнены с использованием отечественного прочностного программного пакета «Фидесис». Приводятся графики распределения напряжений для исследуемого материала. Исследована зависимость погрешности численного решения от порядка элементов при фиксированном количестве точек на длину волны Рэлея.

2. Математическая постановка задачи

Рассматривается упругая изотропная полуплоскость со свободной границей. Изучается решение внешней задачи Лэмба.

Постановка задачи: необходимо найти поле перемещений $u(x, y, t)$ на некотором расстоянии от источника сейсмической нагрузки — силы P . Сосредоточенная сила P приложена в центре свободной полуплоскости. Поле перемещений в полуплоскости удовлетворяет уравнению движения

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \mu \Delta u + P(x, y, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где ρ — это плотность, t — время, x и y — осевая и радиальная цилиндрические координаты частицы, λ и μ — параметры Ламе (модули упругости), $P(x, y, t)$ — нагрузка (рис. 2).

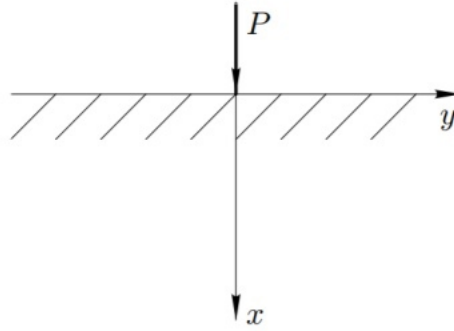


Рис. 2: Постановка задачи

Поле перемещений удовлетворяет однородным начальным условиям

$$u(x, y, t) = 0 \text{ и } \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = 0 \text{ при } t = t_0$$

и граничным условиям на границе полуплоскости:

$$\sigma \cdot \nu = (\lambda (\operatorname{div} u) \nu + 2\mu \operatorname{sym}(\nabla u) \cdot \nu) = P,$$

где ν — нормаль к границе полуплоскости, совпадающая по направлению с осью x .

Динамическое воздействие на границу упругой полуплоскости или полупространства сосредоточенной или распределенной нагрузкой, меняющейся по временному закону Берлаге:

$$f(t) = A \cdot \frac{\omega_1^2 \cdot e^{-\omega_1 t}}{4} \left(\sin(\omega_0 t) \left(\frac{-t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^3} \right) - \cos(\omega_0 t) \sqrt{3} \left(\frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} \right) \right)$$

Где: $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$ и $\omega_0 = 2\pi\omega$, A — амплитуда, ω — частота, $f(t)$ — модуль вектора силы P .

На рис. 3 приведена зависимость силы от времени для случая $A = 10^8$, $\omega = 10$.

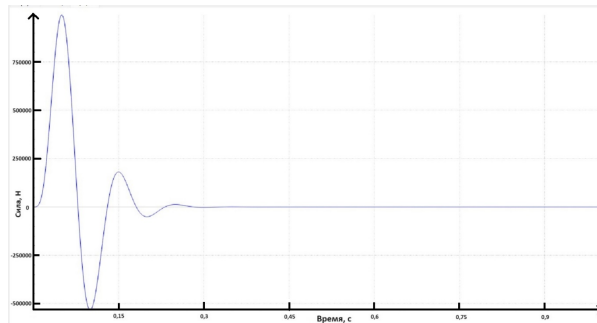


Рис. 3: График зависимости от времени силы, меняющейся по закону Берлаге

3. Аналитическое решение

Согласно [3] перемещение может быть представлено в виде

$$u = \nabla\varphi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \psi)$$

с потенциалами φ и ψ , удовлетворяющими уравнениям

$$\ddot{\varphi} = \frac{\Phi}{\rho} + \alpha^2 \nabla^2 \varphi \text{ и } \ddot{\psi} = \frac{\Psi}{\rho} + \beta^2 \nabla^2 \psi, \quad (1)$$

где α и β — скорости объемных волн, ρ — плотность, φ — потенциал Р-волн, ψ — потенциал SV-волн, Φ и Ψ — потенциалы объемной силы f .

Компоненты вектора перемещений:

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\psi}{y}, \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Согласно [8], [10] аналитическое решение задачи Лэмба на границе полуплоскости в асимптотической форме имеет следующий вид:

$$u_x \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -2iQ \cdot e^{\frac{i\pi}{4}} \left(\frac{2}{C_R} \left(\frac{1}{C_R^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) e^{i\omega \left(\frac{y}{C_R} - t \right)} e^{-\omega \left(\frac{1}{C_R^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{i\omega t} d\omega \quad (3)$$

$$u_y \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -2iQ \cdot e^{\frac{i\pi}{4}} \left(\frac{2}{C_R^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) e^{i\omega \left(\frac{y}{C_R} - t \right)} e^{-\omega \left(\frac{1}{C_R^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{i\omega t} d\omega$$

$$\text{Здесь } Q = A \left(\frac{2\pi\omega}{yC_R} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\omega}{\beta^2 R \left(\frac{1}{C_R} \right)}, \quad R \left(\frac{1}{C_R} \right) = \frac{4 \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{C_R^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{C_R^2} \right)^{1/2}}{C_R^2} + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{C_R^2} \right)^2.$$

В математическом пакете РТС Mathcad Prime 3.1 получены графики компонент векторов перемещения и скорости. Расчеты выполнены для материала со следующими свойствами: модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^8$ (Па), коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 1900$ $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$.

На рис. 4 и 5 приведены графики для горизонтальных компонент векторов перемещения и скорости в точке $(-96.6451, 0, 0)$. Из графиков видно, что перемещения и скорости равны нулю до момента прихода продольной волны, которая вызывает скачкообразные перемещения. Далее прибывает поперечная волна. Пересечение продольной волны со свободной поверхностью полуплоскости вызывает волну Рэлея, которая оказывает наибольшее влияние. После прохождения рэлеевской волны устанавливается статическое распределение перемещений поверхности.

Из графиков можно видеть, что сначала в данной точке возникают колебания, связанные с распространением **объемных волн** (Р- и S-волны) а затем — колебания, связанные с распространением **волны Рэлея**.

4. Численное решение задачи и сравнение с аналитическим решением

Результаты численного решения получены с помощью программного обеспечения САЕ Fidesys. Расчет распространения волн в программе происходил на основе метода спектральных элементов, который дает более быструю сходимость и высокую точность по сравнению с методом конечных элементов [11, 12, 13]. Сетка для геометрической модели, характеристики

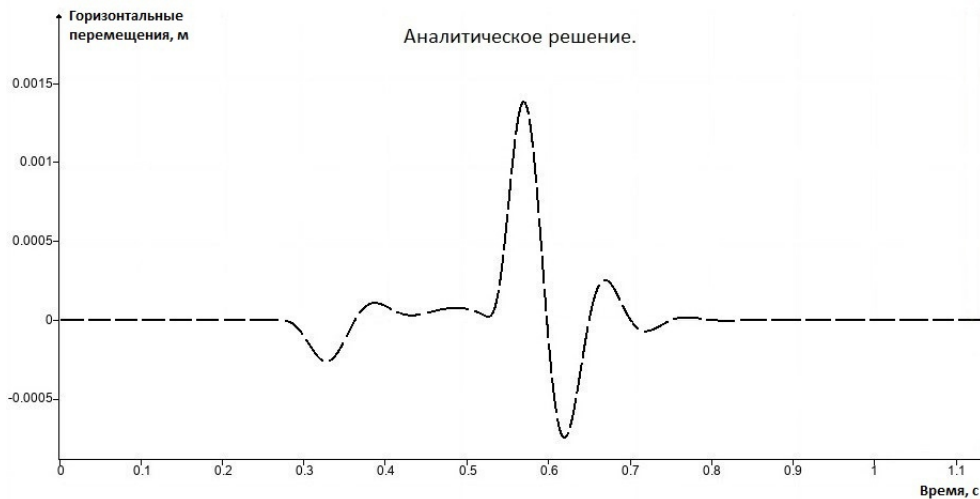


Рис. 4: График изменения горизонтальной компоненты перемещения на поверхности полуплоскости от времени t .

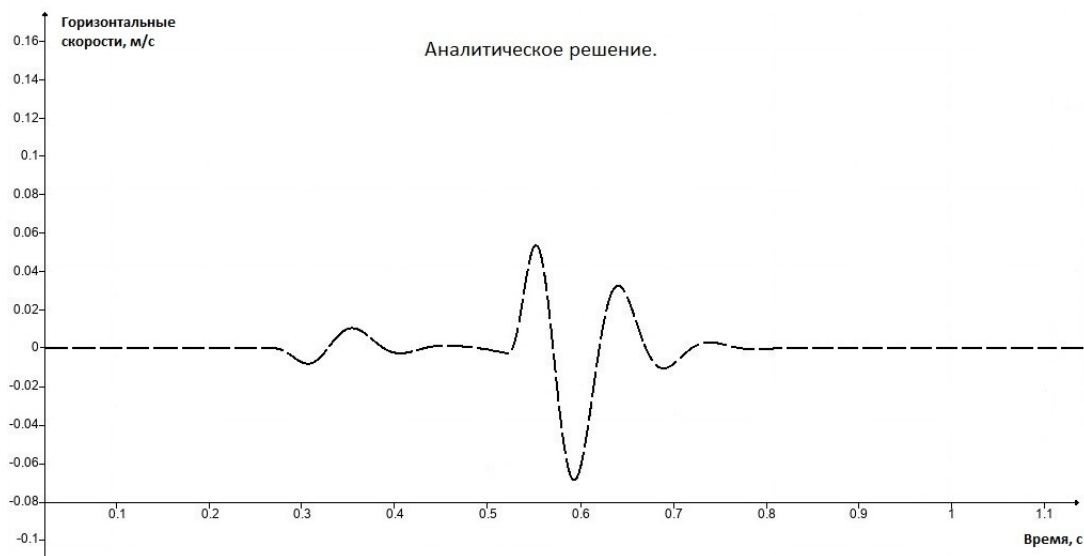


Рис. 5: График изменения горизонтальной компоненты скорости на поверхности полуплоскости от времени t .

которой представлены ниже, строилась на основе метода конечных элементов, а далее при помощи алгоритма, реализованного в САЕ Fidesys [14, 15], преобразовывалась в сетку спектральных элементов необходимого порядка.

Свойства материала те же, которые использовались в предыдущем параграфе при расчетах для аналитического решения. Линейные размеры модели: ширина 1000 м, высота — опционально.

Максимальное время наблюдения — 3 секунды. Максимальное число шагов — 15000. Расчёты, как и вычисления для аналитического решения, приведенные выше, выполнены для точки $(-96.6451, 0, 0)$.

Ниже, на рисунке 7 представлен результат распределения напряжений в модели (в момент времени $t = 1.7$ с):

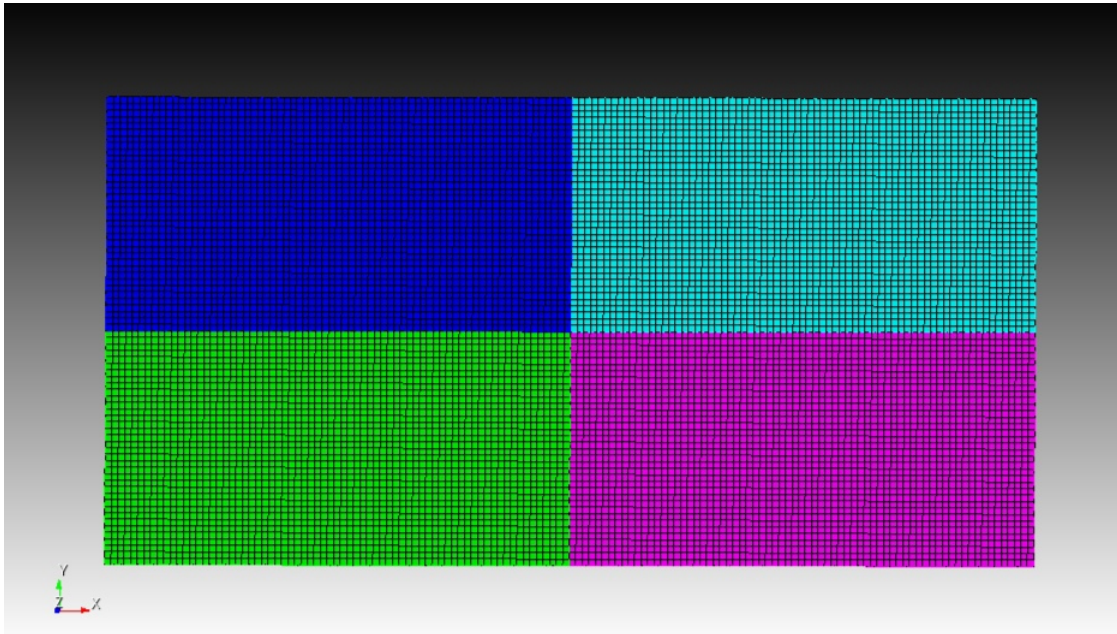


Рис. 6: Сетка модели

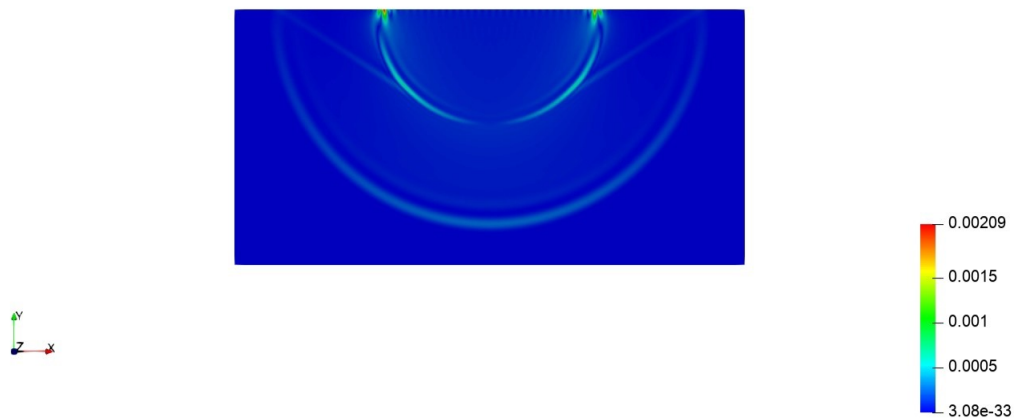


Рис. 7: Распределение напряжений в модели в вертикальном сечении

На рисунке 7 видно, что продольная волна распространяется быстрее поперечной волны. На границе полуплоскости распространяется волна Рэлея.

На рисунке 8 изображена поверхность, в которую переходит граница упругого полупространства при распространении волны, в момент времени $t = 1.7$ с.

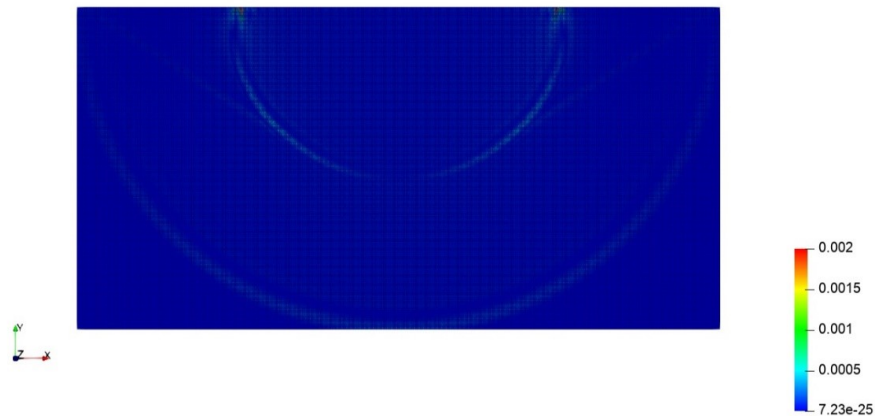


Рис. 8: Поверхность модели

Далее приведены результаты сравнения численного и аналитического решения задачи Лэмба.

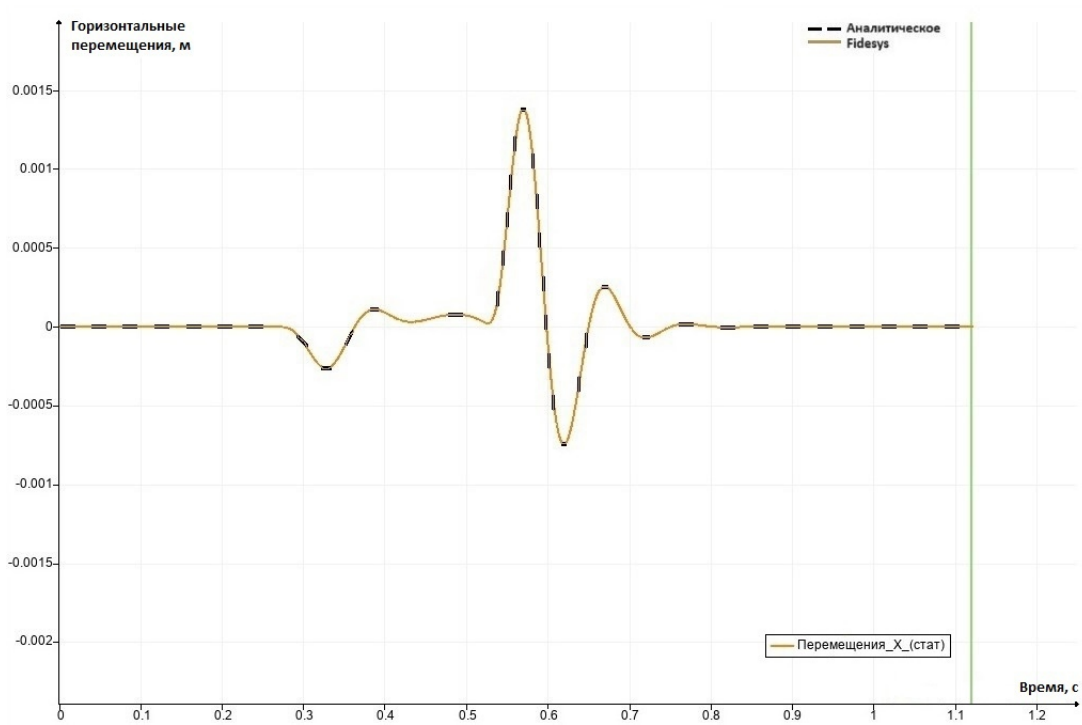


Рис. 9: Зависимость горизонтальной компоненты вектора перемещения от времени. Сплошная линия — численное решение, штриховая — аналитическое решение

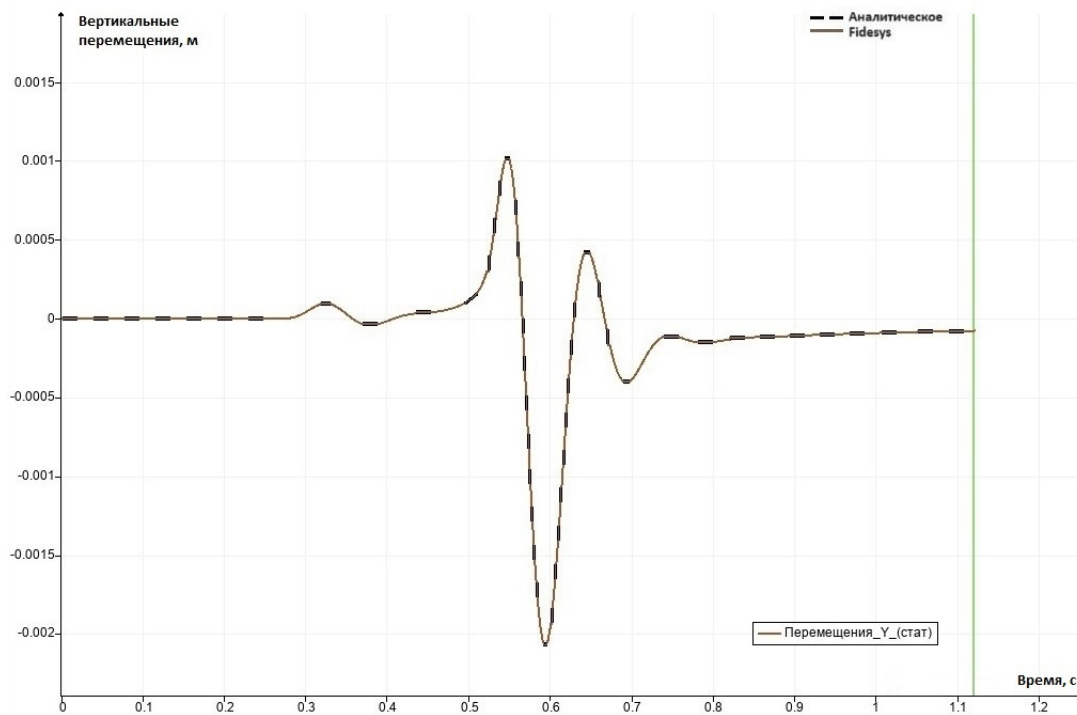


Рис. 10: Зависимость вертикальной компоненты вектора перемещения от времени. Сплошная линия — численное решение, штриховая — аналитическое решение

Проведено сравнение графиков перемещений и скоростей, полученных в математическом пакете PTC Mathcad 3.1 с помощью аналитической формулы, с результатами расчета в программном комплексе Fidesys. Наблюдается практически полное совпадение аналитического решения и конечноэлементного решения во всем исследовавшемся временном диапазоне. Для оценки сходимости решения, реализованного МСЭ в САЕ Fidesys, проведено сравнение результатов, полученных на 3, 6 и 9 порядках. Все расчеты проводились на одинаковых параметрах разбиения сетки.

С повышением порядка элемента решение сходится к аналитическому. На рисунке выделяется решение задачи Лэмба в САЕ Fidesys методом конечных элементов (3 порядок), для которого используемое разбиение сетки недостаточно: требуется измельчить сетку, что потребует, в свою очередь, больше расчетного времени. Следовательно, удобнее и выгоднее применять МСЭ как достаточно точный, современный и менее загруженный по вычислительному времени численный метод.

Отметим, что на основе разработанного алгоритма (скрипта) для программы САЕ Fidesys становится возможным провести численные расчеты для многослойных сред, для которых построение аналитического решения затруднительно.

Количественные оценки разницы аналитического и численного решений выполнены по формуле

$$\text{Ошибка} = \frac{\max |V_{\text{числ.}}(t) - V_{\text{анал.}}(t)|}{\max |V_{\text{анал.}}(t)|} \cdot 100\%.$$

Для элементов третьего порядка погрешность составила 47 %, для элементов шестого порядка — 0.43 %, для элементов десятого порядка — 0.3 %.

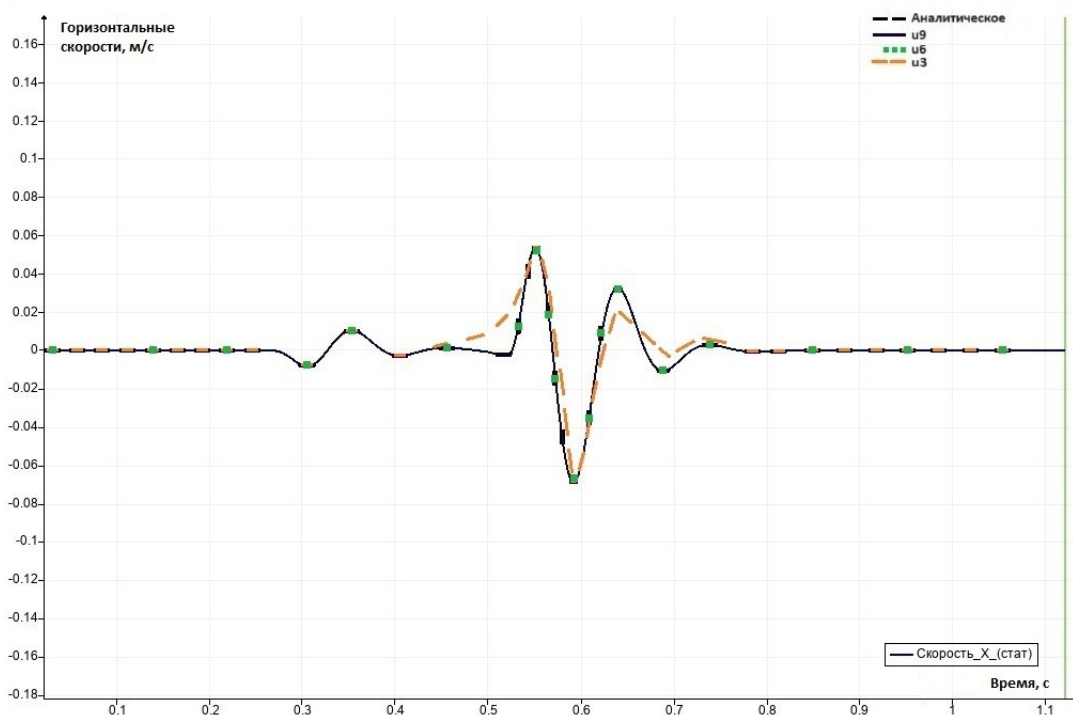


Рис. 11: Оценка сходимости метода спектральных элементов в системе CAE Fidesys для горизонтальной компоненты скорости.

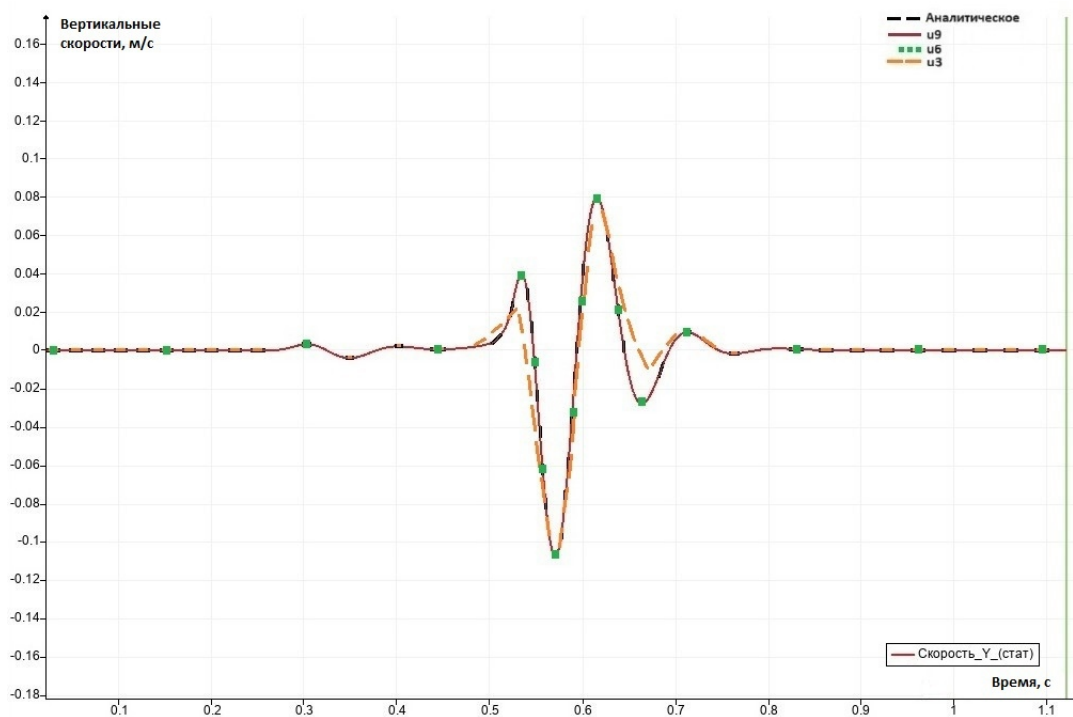


Рис. 12: Оценка сходимости метода спектральных элементов в системе CAE Fidesys для вертикальной компоненты скорости.

Далее была исследована зависимость числа узлов (элементов), необходимых для достижения заданной точности, от порядка элементов. Результаты расчетов содержат-

ся в таблице 1. Приведена зависимость числа узлов/элементов на длину волны, необходимых для достижения погрешности в 1%, от порядка МСЭ и от размера элемента.

Таблица 1. Зависимость числа узлов/элементов на длину волны, необходимых для достижения погрешности в 1%, от порядка МСЭ и от размера элемента

Порядок	Размер элемента	Число элементов на длину волны (EPW)	Число точек на длину волны (PPW)	Погрешность (%)
1	0,35	51,4	51,4	0,97
2	1	18	36	0,96
3	2,1	8,5	26	0,95
4	4	4,5	18	0,95
5	9	2	10	0,93
6	15	1,2	7,2	0,93
7	24	0,75	5,2	0,92
8	36	0,5	4	0,9
9	54	0,33	3	0,9

Вывод: с увеличением порядка уменьшается число узлов в сетке, необходимых для достижения погрешности в 1%.

5. Заключение

Выполнен численный анализ сходимости метода спектральных элементов для задачи Лэмба — динамической задачи теории упругости о колебаниях упругого полупространства под действием точечной силы. Проведено сравнение решения этой задачи методом спектральных элементов с аналитическим решением. Результаты расчетов показали, что разность между численным и аналитическим решением достаточно мала во всем исследовавшемся временном диапазоне.

Проведено детальное сравнение аналитического решения задачи Лэмба с численным решением, полученным с использованием спектральных элементов различного порядка (вплоть до девятого). При численном решении задачи Лэмба с использованием элементов различного порядка удалось получить результаты, погрешность которых не превышает 1%. Проведен анализ зависимости числа точек (узлов сетки) на длину волны Рэлея (points per wavelength — PPW) для различных порядков спектральных элементов на примере задачи Лэмба для достижения погрешности не более 1% в сравнении с аналитическим решением. Показано, что с увеличением порядка элементов это число (PPW) резко уменьшается, что свидетельствует о преимуществе использования спектральных элементов высоких порядков в задачах полно-волнового моделирования.

Результаты статьи могут быть обобщены на случай упругопластических материалов и наложения больших деформаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lamb H. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. 1904, vol. 203, pp. 1–42.
2. Lamb H. On waves due to a travelling disturbance, with an application to waves in superposed fluids. Philosophical Magazine, 1916, vol. 13, pp. 386–399, 539–548.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.2 М.: Наука, 1970г стр. 404-409
4. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы: Том.1 — М.: Мир, 1983. — 520 с.
5. Перегудов Д.В. Двумерная задача Лэмба. Метод Каньяра // Вычислительная сейсмология. 2000. Вып. 31. С. 120–137.

6. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М. : Наука, 1986. П. МИР, Москва, 1983 г., 360 стр., УДК: 53+55
7. Братов В. А., Кузнецов С. В., Морозов Н. Ф.. Задачи Лэмба и родственные проблемы динамики // Прикладная математика и механика. 2022. Том 86, номер 4, страницы 451–469. doi: 10.31857/S003282352204004X
8. Kausel, E. 2012 “Lamb’s Problem at Its Simplest.” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 469 (2149): 20120462–20120462. doi: 10.1098/rspa.2012.0462
9. Strutt J.W. (Lord Rayleigh), On wave propagating along the plane surface of an elastic solid. *Proc. London Math. Soc.*, 1885, vol. 17, pp. 4–11.
10. Gulizzi, Vincenzo; Saye, Robert. « Modeling wave propagation in elastic solids via high-order accurate implicit-mesh discontinuous Galerkin methods» // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 395 (2022) 114971. DOI:10.1016/j.cma.2022.114971.
11. Левин В.А., Вершинин А.В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Том 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. Под общ. ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2015. 544 с.
12. Lee E. H. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. *Journal of Applied Mechanics*. 1969. Vol. 36. Issue 1. P. 1-6.
13. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Krapivin, K.Y., 2023. "Numerical solution of stress concentration problems in elastic-plastic bodies under the superposition of finite deformations". *Advanced Structured Materials*. V. 198. P. 305–323. doi: 10.1007/978-3-031-43210-1_18.
14. Komatitsch D., Vilotte J. P. The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 88:2 (1998), 368–392.
15. Konovalov D. Vershinin A., Zingerman K., Levin V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // *Modeling and Simulation in Engineering*. 2017 (2017), art. id. 1797561.

REFERENCES

1. Lamb, H. 1904, “On the propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, vol. 203, pp. 1–42.
2. Lamb, H. 1916, “On Waves due to a Travelling Disturbance, with an Application to Waves in Super-posed Fluids”, *Philosophical Magazine*, vol. 31, pp. 386–399, 539–548.
3. Sedov, L.I. 1970, *Continuum Mechanics, Vol. 2*, Nauka, Moscow, pp. 404-409.
4. Aki, K. & Richards, P.G. 1983, *Quantitative Seismology: Theory and Methods, Vol. 1*, Mir Publ., Moscow, 520 p.
5. Peregudov, D.V. 2000, “The two-dimensional Lamb problem. Kanyar’s method”, *Computational Seismology*, no. 31, pp. 120–137.
6. Poruchikov, V.B. 1986, *Metody dinamicheskoy teorii uprugosti* [Methods of the Dynamic Theory of Elasticity], Nauka Publ., Moscow.

7. Bratov, V.A., Kuznetsov, S.V. & Morozov, N.F. 2022, “Lamb’s problems and related problems of dynamics”, *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 86, no. 4, pp. 451–469. doi: 10.31857/S003282352204004X.
8. Kausel, E. 2012, “Lamb’s Problem at Its Simplest”, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 469, no. 2149, doi: 10.1098/rspa.2012.0462.
9. Strutt, J.W. (Lord Rayleigh) 1885, “On wave propagating along the plane surface of an elastic solid”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 17, pp. 4–11.
10. Gulizzi, V. & Saye, R. 2022, “Modeling wave propagation in elastic solids via high-order accurate implicit-mesh discontinuous Galerkin methods”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 395, art. id. 114971, doi: 10.1016/j.cma.2022.114971.
11. Levin, V.A. & Vershinin, A.V. (eds.) 2015, *Nonlinear Computational Strength Mechanics. Vol. 2. Numerical Methods. Parallel computing* [Nelinejnaya vy’chislitel’naya mekhanika prochnosti. Tom 2. Chislenny’e metody’. Parallelnyy’e vy’chisleniya na E’VM.], Fizmatlit, Moscow, 544 p.
12. Lee, E.H. 1969, “Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 36, no. 1, pp. 1–6.
13. Levin, V.A., Zingerman, K.M. & Krapivin, K.Y. 2023, “Numerical solution of stress concentration problems in elastic-plastic bodies under the superposition of finite deformations”, *Advanced Structured Materials*, vol. 198, pp. 305–323, doi: 10.1007/978-3-031-43210-1_18.
14. Komatitsch, D. & Vilotte, J.P. 1998, “The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 88, no. 2, pp. 368–392, doi: 10.1785/BSSA0880020368.
15. Konovalov, D., Vershinin, A., Zingerman, K. & Levin, V. 2017, “The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes”, *Modeling and Simulation in Engineering*, vol. 2017, art. id. 1797561, doi: 10.1155/2017/1797561.

Получено: 09.07.2025

Принято в печать: 12.02.2026