

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 512.55

СУЩЕСТВЕННО БЭРОВЫ МОДУЛИ

Ч. Х. Н. Нян (г. Казань)

Аннотация

Понятия риккартового и бэрового кольца возникли в теории линейных операторов гильбертова пространства. Бэровы кольца были введены И. Капланским в 1955 году, риккартовы кольца были введены С. Маэда в 1960 году. В последнее время активно изучаются модульные аналоги этих понятий.

В настоящей работе вводятся и изучаются понятия существенно бэровых модулей, существенно квазибэровых модулей и дуальных к ним модулей. Показано, что прямое слагаемое существенно бэрового модуля является существенно бэровым модулем. Также установлено, что каждый свободный модуль над существенно квазибэровым справа кольцом является существенно квазибэровым модулем и каждый конечно порожденный свободный модуль над дуально существенно квазибэровым справа кольцом является дуально существенно квазибэровым модулем. Если M — CS-риккартовый модуль и M —SSIP-CS-модуль, то M — существенно бэровый модуль. Обратное верно, если $\text{Soc}M \leq^e M$. Если M — d-CS-риккартовый модуль и M —SSSP-d-CS-модуль, то M — дуально существенно бэровый модуль. Обратное верно, если $\text{Rad}M \ll M$. Если R — полуартиново справа кольцо, то M — существенно бэровый модуль в точности тогда, когда M — CS-риккартовый модуль и M —SSIP-CS-модуль. Если R — правое тах - кольцо, то M — дуально существенно бэровый модуль в точности тогда, когда M — d-CS-риккартовый модуль и M —SSSP-d-CS-модуль. Если M — проективный модуль и $\mathcal{P}(M) = 0$, то M — квазибэровый модуль тогда и только тогда, когда каждый вполне инвариантный подмодуль модуля M является существенным подмодулем в некотором вполне инвариантном прямом слагаемом модуля M , тогда и только тогда, когда M — строго существенно квазибэровый модуль. Описаны квазибэровы проективные модули, у которых пересечение всех 2 - первичных подмодулей равно нулю. Из полученных результатов в качестве следствий выводятся известные факты, связанные с бэровыми и дуально бэровыми модулями.

Ключевые слова: существенно бэровы модули, дуально существенно бэровы модули, CS-риккартовы модули, d-CS-риккартовы модули, SIP-CS-модули, SSP-d-CS-модули.

Библиография: 34 названия.

ESSENTIALLY BAER MODULES

T. H. N. Nhan

Abstract

The concepts Rickart rings and Baer rings have their roots in the theory of linear operators in Hilbert space. The concept of Baer rings was introduced by I. Kaplansky in 1955 and the concept of Rickart rings was introduced by Maeda in 1960. In recent years, many authors have been actively studied the module theoretic analogue of these rings.

In this paper, we introduce the concept of essentially Baer modules, essentially quasi-Baer modules and study their properties. We prove that, every direct summand of an essentially Baer module is also an essentially Baer module. We also prove that, every free module over essentially quasi-Baer ring is an essentially quasi-Baer module and each finitely generated free module over dual essentially quasi-Baer ring is a dually essentially quasi-Baer module; if M is CS-Rickart and M has the SSIP-CS then M is essentially Baer. The converse is true if $\text{Soc}M \leq M$; if M is d-CS-Rickart and M has the SSSP-d-CS then M is dual essentially Baer. The converse is true if $\text{Rad}M \ll M$; if R is a right semi-artinian ring, then M is an essentially Baer module if and only if M is CS-Rickart and M has the SSIP-CS; if R is a right max ring, then M is a dual essentially Baer module if and only if M is d-CS-Rickart and M has the SSSP-d-CS; if M be a projective module and $\mathcal{P}(M) = 0$, then M is a quasi-Baer module if and only if every fully invariant submodule of M is essential in a fully invariant direct summand of M , if and only if the right annihilator in M of every ideal of S is essential in a fully invariant direct summand of M . We also give some characterizations of projective quasi-Baer modules. The presented results yield the known results related to Baer modules and dual Baer modules.

Keywords: Essentially Baer modules, dual essentially Baer modules, CS-Rickart modules, d-CS-Rickart modules, SIP-CS modules, SSP-d-CS modules.

Bibliography: 34 titles.

1. Введение

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули - правым унитарными.

Кольцо R называется *риккартовым справа кольцом* (или *правым р.р.-кольцом*), если каждый главный правый идеал кольца R является проективным правым R -модулем. Понятие правого р.р.-кольца было введено Маэда в работе [23]. Модуль M называется *риккартовым модулем*, если для каждого $\varphi \in S = \text{End}_R(M)$ имеет место равенство $\text{Ker}\varphi = eM$, где $e^2 = e \in S$. Понятие риккартового модуля является модульным аналогом понятия риккартового справа кольца и это понятие было введено в работе [20]. Модуль M называется

d -риккартовым модулем (или дуально риккартовым модулем), если для каждого $\varphi \in S = \text{End}_R(M)$ имеет место равенство $\text{Im}\varphi = eM$, где $e^2 = e \in S$. Понятие d -риккартового модуля было впервые рассмотрено в работе [21].

Кольцо R называется правым ACS-кольцом, если правый аннулятор любого элемента из кольца R является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля R_R . ACS-кольца изучались в работах [24], [34]. Модульным аналогом понятия правого ACS-кольца является понятие CS-риккартового модуля. Согласно [1], модуль M называется CS-риккартовым модулем (соответственно строго CS-риккартовым модулем), если $\text{Ker}\varphi$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом (соответственно в некотором вполне инвариантном прямом слагаемом) модуля M для каждого $\varphi \in S = \text{End}_R(M)$. Напомним, что подмодуль N модуля M называется вполне инвариантным, если $f(N) \subseteq N$ для любого $f \in \text{End}_R(M)$. Говорят, что подмодуль N модуля M лежит над прямым слагаемым модуля M , если существуют такие подмодули N_1 и N_2 модуля M , что $N_1 \oplus N_2 = M$, $N_1 \subset N$ и $N_2 \cap N$ мал в N . Модуль M называется d -CS-риккартовым модулем (соответственно строго d -CS-риккартовым модулем), если $\text{Im}\varphi$ лежит над прямым слагаемым (соответственно вполне инвариантным прямым слагаемым) модуля M для каждого $\varphi \in S = \text{End}_R(M)$.

Пусть N — произвольный правый R -модуль. Модуль M называется N -CS-риккартовым, если $\text{Ker}\varphi$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M для каждого $\varphi \in \text{End}_R(M, N)$. Модуль M называется N - d -CS-риккартовым, если $\text{Im}\varphi$ лежит над прямым слагаемым модуля N для каждого $\varphi \in \text{End}_R(M, N)$.

Кольцо R называется бэровым, если правый аннулятор каждого подмножества кольца R порождается идемпотентом. Кольцо R называется квазибэровым, если правый аннулятор каждого идеала кольца R порождается идемпотентом. Понятия бэрового кольца и квазибэрового кольца были введены соответственно в работах [17] и [11]. Модуль M называется бэровым модулем (соответственно строго бэровым модулем), если $r_M(I)$ является прямым слагаемым (соответственно вполне инвариантным прямым слагаемым) модуля M для каждого левого идеала I в S . Модуль M называется дуально бэровым модулем, если $\sum_{\varphi \in I} \text{Im}\varphi$ является прямым слагаемым модуля M для каждого правого идеала I кольца S . Бэровы и квазибэровы модули были изучены в работах [27], [28]. Дуально бэровы модули были рассмотрены в работе [30].

Модуль M называется SSP-модулем (соответственно SIP-модулем), если сумма (соответственно пересечение) двух прямых слагаемых модуля M является прямым слагаемым модуля M . Изучение SIP-модулей и SSP-модулей было начато И. Капланским и Л. Фуксом. И. Капланским было показано, что каждый свободный модуль над областью главных идеалов является SIP-модулем [16]. Л. Фуксом в монографии [13] была поставлена задача об описании абелевых групп, являющихся SIP-модулями над кольцом целых чисел. SSP-модули и SIP-модули изучались также в [2], [14], [15], [31]. Согласно [20, предложение 2.16] (соответственно [21, Предложение 2.11]) каждый риккартовый (соответ-

ственно дуально риккартовый) модуль является SIP-модулем (соответственно SSP-модулем).

Модуль M называется *SIP-CS-модулем* (соответственно *SSIP-d-CS-модулем*), если для каждого семейства $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ подмодулей модуля M , где $\mathcal{I}$ — конечное множество (соответственно произвольное множество) индексов, у которого подмодуль A_i является существенным подмодулем в прямом слагаемом модуля M для каждого $i \in \mathcal{I}$, подмодуль $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$ является существенным подмодулем в прямом слагаемом модуля M . Модуль M называется *SSP-d-CS-модулем* (соответственно *SSSP-d-CS-модулем*), если для каждого семейства $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ подмодулей модуля M , где $\mathcal{I}$ — конечное множество (соответственно произвольное множество) индексов, у которого подмодуль A_i лежит над прямым слагаемым модуля M для каждого $i \in \mathcal{I}$, подмодуль $\sum_{i \in \mathcal{I}} A_i$ лежит над прямым слагаемым модуля M . SIP-CS-модули изучались в работах [18], [19]. SSP-d-CS-модули были рассмотрены в работе [29]. Согласно [1, предложение 1] (соответственно [1, предложение 2]) каждый CS-риккартовый (соответственно d-CS-риккартовый) модуль является SIP-CS-модулем (соответственно SSP-d-CS-модулем).

Кольцо R называется *существенно бэровым справа*, если правый аннулятор каждого подмножества кольца R является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля R_R . Существенно бэровы справа кольца изучались в работах [7], [8]. В настоящей работе вводятся и изучаются понятия существенно бэрового модуля и дуально существенно бэрового модуля. Модуль M называется *существенно бэровым модулем* (соответственно *строго существенно бэровым модулем*), если $r_M(I)$ является существенным в некотором прямом слагаемом (соответственно вполне инвариантным прямым слагаемым) модуля M для каждого левого идеала I в S . Понятие существенно бэрового модуля является модульным аналогом понятия существенно бэрового справа кольца. Модуль M называется *дуально существенно бэровым модулем* (соответственно *строго дуально существенно бэровым модулем*), если $\sum_{\varphi \in I} \text{Im} \varphi$ лежит над прямым слагаемым (соответственно вполне инвариантным прямым слагаемым) модуля M для каждого правого идеала I в S .

Пусть M — правый R -модуль и $S = \text{End}_R(M)$. Через $N \leq^e M$ (соответственно $N \ll M$) будем обозначать тот факт, что N является *существенным* (*малым*) подмодулем в M . Если A — подмножества модуля M (соответственно кольца S), то через $r_S(A)$ (соответственно $r_M(A)$) будем обозначать множество вида $\{s \in S \mid sA = 0\}$ (соответственно $\{m \in M \mid Am = 0\}$).

2. Существенно бэровы модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (1) Модуль M называется *существенно бэровым модулем* (соответственно *строго существенно бэровым модулем*), если для каждого левого идеала I кольца S подмодуль $r_M(I)$ является *существенным* в некотором прямом слагаемом (соответственно вполне инвариантным прямым

слагаемом) модуля M .

(2) Модуль M называется дуально существенно бэровым модулем (соответственно строго дуально существенно бэровым модулем), если для каждого правого идеала I кольца S подмодуль $\sum_{\varphi \in I} \text{Im} \varphi$ лежит над прямым слагаемым (соответственно вполне инвариантным прямым слагаемым) модуля M .

Напомним, что модуль M называется $\mathcal{K}$ -несингулярным модулем, если ядро каждого ненулевого гомоморфизма $\varphi \in \text{End}_R(M)$ не является существенным в M . Дуально, модуль M называется $\mathcal{T}$ -некосингулярным модулем, если образ каждого ненулевого гомоморфизма $\varphi \in \text{End}_R(M)$ не является малым в M .

PROPOSITION 1. Пусть M — правый R -модуль.

(1) Следующие условия равносильны:

- (a) M — бэровый модуль.
- (b) M — $\mathcal{K}$ -несингулярный существенно бэровый модуль.

(2) Следующие условия равносильны:

- (a) M — дуально бэровый модуль.
- (b) M — $\mathcal{T}$ -некосингулярный дуально существенно бэровый модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(1) Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) очевидна.

(a) $\Rightarrow$ (b). Пусть M — $\mathcal{K}$ -несингулярный существенно бэровый модуль. Для каждого левого идеала I кольца $S = \text{End}_R(M)$ существует $e = e^2 \in S = \text{End}_R(M)$ такой, что $r_M(I) \leq^e eM$. Тогда $\ell_S(r_M(I)) \supseteq \ell_S(eM) = S(1 - e)$. Допустим, что существует $\psi \in \ell_S(r_M(I)) \setminus S(1 - e)$. Поскольку $S = Se \oplus S(1 - e)$, то $\psi = s_1e \oplus s_2(1 - e)$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$ и $s_1e \neq 0$. Тогда $s_1e = \psi - s_2(1 - e) \in \ell_S(r_M(I)) \cap Se$. Таким образом, $s_1e(r_M(I) \oplus (1 - e)M) = 0$ и $r_M(I) \oplus (1 - e)M \leq^e M$. Поскольку M является $\mathcal{K}$ -несингулярным модулем, то $s_1e = 0$. Получили противоречие. Тогда $\ell_S(r_M(I)) = S(1 - e)$. Таким образом, $r_M(I) = r_M(\ell_S(r_M(I))) = r_M(S(1 - e)) = eM$, и следовательно, M — бэровый модуль.

(2) Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) очевидна.

(b) $\Rightarrow$ (a). Пусть M — $\mathcal{T}$ -некосингулярный дуально существенно бэровый модуль. Тогда для каждого правого идеала I кольца S подмодуль $\sum_{\varphi \in I} \text{Im} \varphi$ лежит над прямым слагаемым eM , где $e^2 = e \in S$. Согласно [30, Лемма 2.11] имеет место равенство $D(\sum_{\varphi \in I} \text{Im} \varphi) = eS$, и следовательно, M — дуально бэровый модуль. $\square$

Кольцо R называется абелевым кольцом, если каждый идемпотент является центральным. Модуль M называется абелевым модулем, если $S = \text{End}_R(M)$ является абелевым кольцом (см. [3]).

ЛЕММА 1. *Модуль M является абелевым модулем, тогда и только тогда, когда каждое прямое слагаемое модуля M является вполне инвариантным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M абелев модуль и eM — прямое слагаемое модуля M , где $e^2 = e \in S$. Поскольку S — абелевое кольцо и $fe = ef$ для каждого $f \in S$, то $f(eM) \subset eM$. Следовательно, eM является вполне инвариантным прямым слагаемым модуля M . Допустим, что каждое прямое слагаемое модуля M является вполне инвариантным. Для каждого $e^2 = e \in S$ имеет место включение, что $SeM \subset eM$ и $S(1 - e)M \subset (1 - e)M$. Тогда согласно [6, Лемма 1.9] e и $1 - e$ являются левыми полуцентральных идемпотентами и из [6, Лемма 2.1] следует, что идемпотент e централен. Следовательно, M — абелевый модуль. $\square$

PROPOSITION 2. *Пусть M — правый R -модуль.*

(1) *Следующие условия равносильны:*

- (a) M — строго существенно бэровый модуль.
- (b) M — абелевый существенно бэровый модуль.

(2) *Следующие условия равносильны:*

- (a) M — строго дуально существенно бэровый модуль.
- (b) M — абелевый дуально существенно бэровый модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Импликация (b) $\Rightarrow$ (a) очевидна.

(a) $\Rightarrow$ (b). Поскольку M — строго существенно бэровый модуль, то M — существенно бэровый и M — строго CS-риккартовый модуль. Пусть eM — прямое слагаемое модуля M , где $e^2 = e \in S = \text{End}_R(M)$. Тогда $eM = \text{Ker}(1 - e)$ является существенным подмодулем в некотором вполне инвариантном прямом слагаемом модуля M и, следовательно, подмодуль eM вполне инвариантен. Поскольку каждое прямое слагаемое модуля M является вполне инвариантным, то согласно лемме 1 модуль M является абелевым.

(2) Импликация (b) $\Rightarrow$ (a) очевидна.

(a) $\Rightarrow$ (b). Поскольку M — строго дуально существенно бэровый модуль, то M — дуально существенно бэровый и M — строго d-CS-риккартовый модуль. Пусть eM — прямое слагаемое модуля M , где $e^2 = e \in S = \text{End}_R(M)$. Тогда $eM = \text{Im } e$ лежит над вполне инвариантным прямым слагаемым модуля M и, следовательно, подмодуль eM — вполне инвариантен. Поскольку каждое прямое слагаемое модуля M является вполне инвариантным, то согласно лемме 1 модуль M является абелевым. $\square$

Из доказательства предыдущей теоремы мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть M — правый R -модуль.*

(1) ([4, Следствие 3.6]) *Следующие условия равносильны:*

- (a) M — строго CS -риккартовый модуль.
- (b) M — абелевый CS -риккартовый модуль.

(2) Следующие условия равносильны:

- (a) M — строго d - CS -риккартовый модуль.
- (b) M — абелевый d - CS -риккартовый модуль.

Напомним, что модуль M называется $SSIP$ -модулем (соответственно $SSSP$ -модулем), если для любого семейства прямых слагаемых $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ модуля M , подмодуль $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$ (соответственно $\sum_{i \in \mathcal{I}} A_i$) является прямым слагаемым модуля M (см. [20], [21], [27], [30]). В работах [27], [30] были установлены следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M — правый R -модуль.

(1) [27, Предложение 2.22] Следующие условия равносильны:

- (a) M — бэровый модуль.
- (b) M — риккартовый модуль и M — $SSIP$ модуль.

(2) [30, Теорема 2.1] Следующие условия равносильны:

- (a) M — дуально бэровый модуль.
- (b) M — дуально риккартовый модуль и M — $SSSP$ модуль.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для существенно бэровых и дуально существенно бэровых модулей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M — правый R -модуль. Имеют место следующие утверждения:

- (1) Если M — CS -риккартовый модуль и M — $SSIP$ - CS -модуль, то M — существенно бэровый модуль. Обратное верно, если $\text{Soc}M \leq^e M$.
- (2) Если M — d - CS -риккартовый модуль и M — $SSSP$ - d - CS -модуль, то M — дуально существенно бэровый модуль. Обратное верно, если $\text{Rad}M \ll M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть M — CS -риккартовый $SSIP$ - CS модуль и I — левый идеал кольца $S = \text{End}_R(M)$. Для каждого $\varphi \in I$ имеем $\text{Ker}\varphi \leq^e P_\varphi \leq_\oplus M$. Так как M — $SSIP$ - CS -модуль, то $r_M(I) = \bigcap_{\varphi \in I} \text{Ker}\varphi$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M . Таким образом, M — существенно бэровый модуль.

Обратно, допустим, что M — существенно бэровый и $\text{Soc}M \leq^e M$. Сначала покажем, что если $A_i \leq^e B_i$ для каждого $i \in \mathcal{I}$, то $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i \leq^e \bigcap_{i \in \mathcal{I}} B_i$. Допустим, что $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i \subset \bigcap_{i \in \mathcal{I}} B_i$, но $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$ не является существенным подмодулем

в $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} B_i$. Существует $0 \neq N \subset \bigcap_{i \in \mathcal{I}} B_i$ такой, что $N \cap \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = 0$. Поскольку $\text{Soc} M \leq^e M$, то существует простой модуль P такой, что $P \subset N \subset \bigcap_{i \in \mathcal{I}} B_i$. Так как, $A_i \leq^e B_i$ для каждого $i \in \mathcal{I}$, то $\text{Soc} A_i = \text{Soc} B_i$. Тогда $P \subset \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \text{Soc} B_i = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \text{Soc} A_i$, что противоречит равенству $N \cap \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = 0$.

Допустим, что $A_i \leq^e e_i M$, где $e_i^2 = e_i \in S$ для каждого $i \in \mathcal{I}$. Согласно вышеизложенному имеем $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i \leq^e \bigcap_{i \in \mathcal{I}} e_i M$. Рассмотрим левый идеал $I = \sum_{i \in \mathcal{I}} S(1 - e_i)$ кольца S . Несложно заметить, что $r_M(I) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} e_i M$. Так как M — существенно бэровый модуль, то подмодуль $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} e_i M$ является существенным в некотором прямом слагаемом модуля M . Следовательно, подмодуль $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$ также является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M . Таким образом, M — SSIP-CS-модуль.

(2) Пусть M — d-CS-риккартов модуль и M — SSSP-d-CS-модуль. Подмодуль $\text{Im} \varphi$ лежит над прямым слагаемым модуля M для каждого $\varphi \in I$, где $I \leq S_S$. Так как M — SSSP-d-CS-модуль, то $\sum_{\varphi \in I} \text{Im} \varphi$ лежит над прямым слагаемым модуля M . Таким образом, M — дуально существенно бэровый модуль.

Обратно, допустим, что M — дуально существенно бэровый модуль и $\text{Rad} M \ll M$. Допустим, что A_i лежит над прямым слагаемым $e_i M$ модуля M , где $e_i^2 = e_i \in S$ для каждого $i \in \mathcal{I}$. Согласно [12, 22.1], существует $S_i \ll M$ такой, что $A_i = e_i M + S_i$ для каждого $i \in \mathcal{I}$. Тогда $\sum_{i \in \mathcal{I}} A_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i M + \sum_{i \in \mathcal{I}} S_i$. Поскольку M — дуально существенно бэровый модуль, то подмодуль $\sum_{i \in \mathcal{I}} e_i M = \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{Im} e_i$ лежит над прямым слагаемым P модуля M . Следовательно, существует $S_0 \ll M$ такой, что $\sum_{i \in \mathcal{I}} e_i M = P + S_0$. Тогда $\sum_{i \in \mathcal{I}} A_i = P + S_0 + \sum_{i \in \mathcal{I}} S_i$, где $S_0 + \sum_{i \in \mathcal{I}} S_i \subset \text{Rad} M \ll M$. Таким образом, согласно [12, 22.1], $\sum_{i \in \mathcal{I}} A_i$ лежит над прямым слагаемым P модуля M . $\square$

Напомним, что кольцо R называется *полуартиновым справа кольцом*, если каждый ненулевой правый R -модуль имеет ненулевую цоколь. Кольцо R называется *правым тах кольцом*, если каждый ненулевой правый R -модуль имеет максимальный подмодуль.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть M — правый R -модуль.

(1) Если R — полуартиново справа кольцо, то следующие условия равносильны:

- (a) M — существенно бэровый модуль.
- (b) M — CS-риккартовый модуль и M — SSIP-CS-модуль.

(2) Если R — правое тах - кольцо, то следующие условия равносильны:

- (a) M — дуально существенно бэровый модуль.
- (b) M — d-CS-риккартовый модуль и M — SSSP-d-CS-модуль.

ТЕОРЕМА 3. Имеют место следующие утверждения:

(1) Каждое прямое слагаемое существенно бэрового модуля является существенно бэровым модулем.

- (2) Каждое прямое слагаемое дуально существенно бэрового модуля является дуально существенно бэровым модулем.
- (3) Каждое прямое слагаемое строго существенно бэрового модуля является строго существенно бэровым модулем.
- (4) Каждое прямое слагаемое строго дуально существенно бэрового модуля является строго дуально существенно бэровым модулем.
- (5) [4, Предложение 3.7] Каждое прямое слагаемое строго CS -риккартового модуля является строго CS -риккартовым модулем.
- (6) Каждое прямое слагаемое строго d - CS -риккартового модуля является строго d - CS -риккартовым модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Допустим, что $M = M_1 \oplus M_2$ — существенно бэровый модуль и $S = \text{End}_R(M)$. Покажем, что M_1 является также существенно бэровым модулем. Кольцо S имеет следующее матричное представление

$$S = \begin{pmatrix} \text{End}_R(M_1) & \text{Hom}_R(M_2, M_1) \\ \text{Hom}_R(M_1, M_2) & \text{End}_R(M_2) \end{pmatrix}.$$

Пусть I — левый идеал кольца $\text{End}_R(M_1)$ и

$$I' = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i g_i \mid f_i \in \text{Hom}_R(M_1, M_2), g_i \in I, \forall i = \overline{1, n}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Тогда

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I' & 0 \end{pmatrix}$$

является левым идеалом кольца S . Для любого $m_1 + m_2 \in M$ где $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, элемент $m_1 + m_2$ принадлежит подмодулю $r_M(\bar{I})$ тогда и только тогда, когда $m_1 \in r_{M_1}(I)$. Следовательно $r_M(\bar{I}) = r_{M_1}(I) \oplus M_2$.

Поскольку M — существенно бэровый модуль, существует прямое слагаемое P модуля M такое, что $r_M(\bar{I}) \leq^e P$. Поскольку $r_M(\bar{I}) = r_{M_1}(I) \oplus M_2$ и $P = (P \cap M_1) \oplus M_2$, то $r_{M_1}(I) \leq^e P \cap M_1$. Так как P является прямым слагаемым модуля M , то $P \cap M_1$ — прямое слагаемое модуля M_1 . Следовательно M_1 — существенно бэровый модуль.

(2) Допустим, что $M = M_1 \oplus M_2$ — дуально существенно бэровым модулем и $S = \text{End}_R(M)$. Покажем, что M_2 является также дуально существенно бэровым модулем. Кольцо S имеет следующее матричное представление

$$S = \begin{pmatrix} \text{End}_R(M_1) & \text{Hom}_R(M_2, M_1) \\ \text{Hom}_R(M_1, M_2) & \text{End}_R(M_2) \end{pmatrix}.$$

Пусть J — правый идеал кольца $\text{End}_R(M_2)$ и

$$J' = \left\{ \sum_{i=1}^n g_i f_i \mid f_i \in \text{Hom}_R(M_1, M_2), g_i \in J, \forall i = \overline{1, n}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Тогда

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J' & J \end{pmatrix}.$$

является правым идеалом кольца S и $\sum_{\varphi \in \bar{J}} \text{Im} \varphi = \sum_{\psi \in J} \text{Im} \psi$. Поскольку M — дуально существенно бэровый модуль, $\sum_{\varphi \in \bar{J}} \text{Im} \varphi$ лежит над прямым слагаемым модуля M . Тогда существует разложение $M = P \oplus P'$ такой, что $P \subset \sum_{\varphi \in \bar{J}} \text{Im} \varphi = \sum_{\psi \in J} \text{Im} \psi$ и $(\sum_{\psi \in J} \text{Im} \psi) \cap P' \ll P'$. Поскольку $M_2 = P \oplus (M_2 \cap P')$, $M_2 \cap P'$ является прямым слагаемым модуля M_2 . Так как $(\sum_{\psi \in J} \text{Im} \psi) \cap P' \ll M$ и $M_2 \cap P'$ является прямым слагаемым модуля M , следует $(\sum_{\psi \in J'} \text{Im} \psi) \cap P' \ll M_2 \cap P'$. Следовательно M_2 — дуально существенно бэровый модуль.

(3) и (4) следует из (1), (2), предложения 2 и того факта, что каждое прямое слагаемое абелева модуля является также абелевым модулем.

(6) следует из [1, Лемма 1], следствия 1 и тот факт, что каждое прямое слагаемое абелева модуля является также абелевым модулем. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. ([27, Theorem 2.17], [30, Corollary 2.5]) *Имеют место следующие утверждения:*

- (1) *Каждое прямое слагаемое бэрового модуля является бэровым модулем.*
- (2) *Каждое прямое слагаемое дуально бэрового модуля является дуально бэровым модулем.*

3. Существенно квазибэровы модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (1) *Модуль M называется существенно квазибэровым модулем (соответственно строго существенно квазибэровым модулем), если $r_M(I)$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом (соответственно вполне инвариантном прямом слагаемом) модуля M для каждого идеала I кольца S .*

(2) *Модуль M называется дуально существенно квазибэровым модулем (соответственно строго дуально существенно квазибэровым модулем), если $\sum_{\varphi \in I} \text{Im} \varphi$ лежит над прямым слагаемым (соответственно вполне инвариантным прямым слагаемым) модуля M для каждого идеала I кольца S .*

PROPOSITION 3. *Пусть M — правый R -модуль, у которого каждый существенный подмодуль является существенным расширением вполне инвариантного подмодуля модуля M . Тогда следующие условия равносильны:*

(1) M — квазибэровский модуль.

(2) M — $\mathcal{K}$ -несингулярный существенно квазибэровский модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Поскольку M — квазибэровский модуль, то M — существенно квазибэровский модуль. Допустим, что $\varphi \in S$ такой, что $r_M(\varphi) = \text{Ker} \varphi \leq^e M$. По предположению существует вполне инвариантный подмодуль N модуля M такой, что $N \leq^e r_M(\varphi)$. Тогда $\varphi S(N) = \varphi(N) = 0$ и, следовательно, $N \subset r_M(\varphi S) = r_M(\langle \varphi \rangle) = eM$, где $e^2 = e \in S$. Следовательно, $eM \leq^e M$ и $e = 1$, $\varphi = 0$. Таким образом, M — $\mathcal{K}$ -несингулярный модуль.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть M — $\mathcal{K}$ -несингулярный существенно квазибэровский модуль. Для каждого идеала I кольца $S = \text{End}_R(M)$ существует $e = e^2 \in S = \text{End}_R(M)$ такой, что $r_M(I) \leq^e eM$. Тогда $\ell_S(r_M(I)) \supseteq \ell_S(eM) = S(1 - e)$. Допустим, что существует $\psi \in \ell_S(r_M(I)) \setminus S(1 - e)$. Поскольку $S = Se \oplus S(1 - e)$, то $\psi = s_1e \oplus s_2(1 - e)$ и $s_1e \neq 0$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$. Тогда $s_1e = \psi - s_2(1 - e) \in \ell_S(r_M(I)) \cap Se$. Следовательно, $s_1e(r_M(I) \oplus (1 - e)M) = 0$. Поскольку M — $\mathcal{K}$ -несингулярный модуль и $r_M(I) \oplus (1 - e)M \leq^e M$, то $s_1e = 0$, что противоречит выбору элемента ψ . Тогда $\ell_S(r_M(I)) = S(1 - e)$. Таким образом, $r_M(I) = r_M(\ell_S(r_M(I))) = r_M(S(1 - e)) = eM$, и следовательно, M — квазибэровский модуль. $\square$

Согласно [22] модуль M называется *IFP-модулем*, если $r_M(\varphi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля M для всех $\varphi \in S$. Согласно [32], модуль M называется *полукоммутативным*, если для каждого $\varphi \in S$ и $m \in M$ из равенства $\varphi(m) = 0$ следует $\varphi S(m) = 0$; модуль M называется *редуцируемым*, если для каждого $\varphi \in S$ и $m \in M$ из равенства $\varphi(m) = 0$ следует $\text{Im} \varphi \cap S(m) = 0$; модуль M называется *симметричным*, если для каждого $a, b \in R$ и $m \in M$ из равенства $tab = 0$ следует $tba = 0$. Имеют место следующие включения.

$\{\text{редуцируемые модули}\} \subset \{\text{симметричные модули}\} \subset \{\text{полукоммутативные модули}\} \subset \{\text{IFP-модули}\}$.

PROPOSITION 4. Пусть M — IFP-модуль. Следующие условия равносильны:

(1) M — существенно бэровский модуль.

(2) M — существенно квазибэровский модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — существенно квазибэровский модуль и I — левый идеал кольца S . Для любого $\varphi \in I$ выполнено включение $r_M(\varphi S) \subset r_M(\varphi)$. Так как $r_M(\varphi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля M , то $Sr_M(\varphi) \subset r_M(\varphi)$ для каждого $\varphi \in I$ и, следовательно, $r_M(IS) = r_M(I)$ и, следовательно, M — существенно бэровский модуль. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ — прямая сумма правых R -модулей и выполнены условия $\text{Hom}(M_i, M_j) = 0$, $\forall i \neq j$. Тогда имеют место утверждения

- (1) Если M_i — существенно квазибэровский модуль для каждого $i \in \mathcal{I}$, то M — существенно квазибэровский модуль.
- (2) Если M_i — дуально существенно квазибэровский модуль для каждого $i \in \mathcal{I}$ и $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$, то M — дуально существенно квазибэровский модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S = \text{End}_R(M)$ и I — идеал кольца S . Так как $\text{Hom}(M_i, M_j) = 0$ ($\forall i \neq j$), то $S = \prod_{i \in \mathcal{I}} S_i$, где $S_i = \text{End}_R(M_i)$ ($i \in \mathcal{I}$). Так как I — идеал кольца S , то $I = \prod_{i \in \mathcal{I}} I_i$, где $I_i \leq S_i$.

(1) Для каждого $i \in \mathcal{I}$ существует идемпотент $e_i \in S_i$ такой, что $r_{M_i}(I_i) \leq^e e_i M_i$. Тогда $r_M(I) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} r_{M_i}(I_i)$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$.

(2) Для каждого $i \in \mathcal{I}$ существует идемпотент $e_i \in S_i$ такой, что $\sum_{\varphi_i \in I_i} \text{Im} \varphi_i$ лежит над прямым слагаемым $e_i M_i$ модуля M_i , $\forall i \in \mathcal{I}$. Тогда $\sum_{\varphi \in I} \text{Im} \varphi = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} (\sum_{\varphi_i \in I_i} \text{Im}(\varphi_i))$ лежит над прямым слагаемым модуля $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$. $\square$

Напомним, что модуль M порождается модулем N , если существует эпиморфизм из прямой суммы изоморфных копий модуля N в модуль M . Модуль M копорождается модулем N , если существует мономорфизм из модуля M в прямое произведение изоморфных копий модуля N .

ЛЕММА 2. Пусть $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ — прямая сумма правых R -модулей, I — идеал кольца, $S = \text{End}_R(M)$ и $\pi_j : \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i \rightarrow M_j$ — естественная проекция для каждого $j \in \mathcal{I}$.

- (1) Если для каждого $i, j \in \mathcal{I}$ модуль M_j копорождается модулем M_i , то имеет место равенство

$$r_M(\pi_i I \pi_i) \cap M_i = r_M(I) \cap M_i.$$

- (2) Если для каждого $i, j \in \mathcal{I}$ модуль M_j порождается модулем M_i , то имеет место равенство

$$\sum_{\varphi_i \in \pi_i I \pi_i} \text{Im}(\varphi_i) = \left(\sum_{\varphi \in I} \text{Im}(\varphi) \right) \cap M_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $t \in r_M(\pi_i I \pi_i) \cap M_i$ и $f \in I$. Для каждого $j \in \mathcal{I}$ существует мономорфизм $\varphi : M_j \rightarrow \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$, где $M_\alpha = M_i \forall \alpha$. Тогда для каждого естественного проекции $\pi'_\alpha : \prod_{\alpha \in A} M_\alpha \rightarrow M_i$ имеет $\pi'_\alpha \varphi \pi_j f(m) = \pi'_\alpha \varphi \pi_j f \pi_i(m) = 0$. Следовательно, $\varphi \pi_j f(m) = 0$. Поскольку φ — мономорфизм, то $\pi_j f(m) = 0$. Следовательно, $f(m) = 0$. Таким образом, $r_M(\pi_i I \pi_i) \cap M_i \subset r_M(I) \cap M_i$. Так как обратное включение очевидно, то $r_M(\pi_i I \pi_i) \cap M_i = r_M(I) \cap M_i$.

(2) Пусть $t \in (\sum_{\varphi \in I} \text{Im}(\varphi)) \cap M_i$. Тогда $t \in \varphi_1(M_{j_1}) + \dots + \varphi_k(M_{j_k})$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in I$, $\mathcal{I}' = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \mathcal{I}$. Так как $t \in M_i$, можно считать, что

$\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \pi_i I$. Для каждого $t \in \mathcal{I}'$ из условия пункта 2 следует существование эпиморфизмов вида $f_t : \bigoplus_{\alpha \in A_t} M_\alpha \rightarrow M_t$, где $M_\alpha = M_i$ для каждого $\alpha \in A_t$. Для каждого $t \in \mathcal{I}'$ и каждого $\beta \in A_t$ пусть $\varepsilon_{t,\beta} : M_i \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A_t} M_\alpha$ — естественное вложение. Тогда

$$m \in \sum_{t \in \mathcal{I}} \sum_{\beta \in A_t} \varphi_t f_t \varepsilon_{t,\beta}(M_i) = \sum_{t \in \mathcal{I}} \sum_{\beta \in A_t} \pi_i \varphi_t f_t \varepsilon_{t,\beta} \pi_i(M_i) \subset \sum_{\varphi \in \pi_i I \pi_i} \text{Im}(\varphi).$$

Таким образом, $(\sum_{\varphi \in I} \text{Im}(\varphi)) \cap M_i \subset \sum_{\varphi \in \pi_i I \pi_i} \text{Im}(\varphi)$. Так как обратное включение очевидно, то $\sum_{\varphi_i \in \pi_i I \pi_i} \text{Im}(\varphi_i) = (\sum_{\varphi \in I} \text{Im}(\varphi)) \cap M_i$. $\square$

ТЕОРЕМА 5. (1) Если $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ — прямая сумма существенно квазибэровых правых R -модулей и M_i является порождающим модулем модуля M_j , $\forall i \neq j$, то M — существенно квазибэровый модуль.

(2) Если $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ — прямая сумма дуально существенно квазибэровых правых R -модулей, $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ и M_i является порождающим модулем модуля M_j , $\forall i \neq j$, то M — дуально существенно квазибэровый модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Поскольку для каждого $i \in \mathcal{I}$ модуль M_i является существенно бэровым, то $r_M(\pi_i I \pi_i) \cap M_i$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M_i . Поскольку $r_M(I) \trianglelefteq M$, то $r_M(I) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} (r_M(I) \cap M_i)$. Тогда согласно лемме 2.(1) $r_M(I) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} (r_M(\pi_i I \pi_i) \cap M_i)$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$.

(2) Поскольку для каждого $i \in \mathcal{I}$ модуль M_i является дуально существенно бэровым, то подмодуль $\sum_{\varphi \in \pi_i I \pi_i} \text{Im} \varphi$ лежит над прямым слагаемым модуля M_i , $\forall i \in \mathcal{I}$. Поскольку $I \trianglelefteq S$, то

$$\sum_{\varphi \in I} \text{Im} \varphi = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\varphi \in I} \text{Im}(\varphi) \right) \cap M_i.$$

Тогда согласно лемме 2.(2) подмодуль $\sum_{\varphi \in I} \text{Im} \varphi = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} (\sum_{\varphi \in \pi_i I \pi_i} \text{Im}(\varphi))$ лежит над прямым слагаемым модуля $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. (1) Каждый свободный модуль над существенно квазибэровым справа кольцом является существенно квазибэровым модулем.

(2) Каждый конечно порожденный свободный модуль над дуально существенно квазибэровым справа кольцом является дуально существенно квазибэровым модулем.

Пусть M — правый R -модуль, $S = \text{End}_R(M)$ и A, B подмодули модуля M . Согласно [26], обозначение $A \times_M B$ называется произведением подмодулей A и B :

$$A \times_M B = \text{Hom}(M, A)B = \sum \{f(B) \mid f \in \text{Hom}(M, A)\}.$$

Вполне инвариантной собственный подмодуль P модуля M называется *вполне первичным подмодулем* модуля M , если из $A \times_M B \leq P$ следует, что либо $A \leq P$, либо $B \leq P$ для любых вполне инвариантных подмодулей A и B модуля M . Модуль M называется *вполне первичным модулем*, если 0 — вполне первичный подмодуль модуля M .

Следующие лемма непосредственно следует из [25, Теорема 2.1].

ЛЕММА 3. Пусть M — вполне первичный модуль. Имеют место следующие утверждения:

- (1) Если A — вполне инвариантный подмодуль модуля M и $A \times_M A = 0$, то $A = 0$,
- (2) Если N — вполне инвариантный подмодуль модуля M , U — подмодуль модуля M и $N \times_M U = 0$, то $U = 0$.

ЛЕММА 4. Пусть M — проективный вполне первичный модуль. Если M — квазибэровский модуль, то каждый вполне инвариантный подмодуль модуля M является существенным подмодулем в некотором вполне инвариантным прямым слагаемым модуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что M является квазибэровым модулем и пусть $X \neq 0$ — вполне инвариантный подмодуль модуля M . Тогда существует идемпотент $e \in S = \text{End}_R(M)$ такой, что $\ell_S(X) = S(1 - e)$ и $X \subset eM$. Пусть Y — подмодуль модуля eM такой, что $X \cap Y = 0$. Тогда $Y \times_M X \subset X \cap Y = 0$. Поскольку M — проективный, то согласно [5, Лемма 2.1] следует равенство $(X \times_M Y) \times_M (X \times_M Y) = X \times_M (Y \times_M X) \times_M Y = 0$. Поскольку $X \times_M Y$ — вполне инвариантный подмодуль модуля M , то из Лемма 3.(1) следует $X \times_M Y = 0$. Так как X — вполне инвариантный подмодуль модуля M , то согласно Лемма 3.(2) следует равенство $X = 0$. Таким образом $X \leq^e eM$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$ — класс всех первичных правых R -модулей. Для произвольного правого R -модуля M введем обозначение

$$\mathcal{P}(M) = \bigcap_{f \in \text{Hom}(M, A), A \in \mathcal{A}} \text{Ker } f.$$

Известно, что для проективного модуля M подмодуль $\mathcal{P}(M)$ совпадает с пересечением всех 2-первичными подмодулями модуля M (см. [5, 3.1. Предложение (iv)]).

ЛЕММА 5. Пусть M — проективный модуль и $\mathcal{P}(M) = 0$. Для идемпотента $e \in S = \text{End}_R(M)$ и любых подмодулей A, B модуля M имеют место следующие утверждения:

- (1) $A \times_M B = 0$ тогда и только тогда, когда $B \times_M A = 0$.
- (2) $e \in S_\ell(S)$ тогда и только тогда, когда $eM \times_M (1 - e)M = 0$.

(3) $e \in S_r(S)$ тогда и только тогда, когда $(1 - e)M \times_M eM = 0$.

(4) $S_\ell(S) = S_r(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как $A \times_M B = 0$, то из проективности модуля M и из [5, Лемма 2.1] следует равенство $(B \times_M A) \times_M (B \times_M A) = B \times_M (A \times_M B) \times_M A = 0$. Тогда согласно [5, Предложение 3.5 (i)] $B \times_M A = 0$.

(2) Так как $e \in S_\ell(S)$ тогда и только тогда, когда $(1 - e)Se = 0$, то условие $e \in S_\ell(S)$ эквивалентно равенству $(1 - e)M \times_M eM = \text{Hom}_R(M, (1 - e)M)eM = 0$.

(3) Доказательство аналогично доказательству пункта (2).

(4) Следует из (1),(2),(3). $\square$

ТЕОРЕМА 6. Пусть M — проективный модуль и $\mathcal{P}(M) = 0$. Следующие условия равносильны:

(1) M — квазибэровый модуль.

(2) Каждый вполне инвариантный подмодуль модуля M является существенным подмодулем в некотором вполне инвариантном прямом слагаемом модуля M .

(3) M — строго существенно квазибэровый модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что M — квазибэровый модуль и $X \neq 0$ — вполне инвариантный подмодуль модуля M . Тогда существует полужидельный слева идемпотент e такой, что $\ell_S(X) = S(1 - e)$ и $X \subset eM$. Замечим, что согласно лемме 5.(4) e — центральный идемпотент. Пусть Y — подмодуль в eM такой, что $X \cap Y = 0$. Тогда $Y \times_M X = \text{Hom}(M, Y)X \subset X \cap Y = 0$. Таким образом, $\text{Hom}(M, Y) \subset \ell_S(X) = S(1 - e) = (1 - e)S$ и, следовательно, $\text{Hom}(M, Y) = 0$. Так как $Y \times_M Y = \text{Hom}(M, Y) \times_M Y = 0$, то $Y = 0$ согласно [5, Предложение 3.5(i)]. Таким образом X является существенным подмодулем в eM .

(2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть I — идеал кольца S . Покажем, что $IM \times_M r_M(I) = 0$. Пусть $\alpha \in \text{Hom}(M, IM)$ и $m \in r_M(I)$. Рассмотрим гомоморфизм $\bigoplus_{f \in I} f : \bigoplus_{f \in I} M_f \rightarrow IM$, где $M_f = M$ для каждого $f \in I$. Поскольку $\bigoplus_{f \in I} f$ — сюръективный гомоморфизм и M — проективный модуль, то существует гомоморфизм $h : M \rightarrow \bigoplus_{f \in I} M_f$ такой, что $\alpha = \bigoplus_{f \in I} f \circ h$. Пусть $\pi_f : \bigoplus_{f \in I} M_f \rightarrow M_f$ — проекция. Поскольку $f\pi_f h \in I$ для каждого $f \in I$, то $\alpha(m) = (\bigoplus_{f \in I} f \circ h)(m) = \sum_{f \in I} f\pi_f h(m) = 0$. Следовательно, $IM \times_M r_M(I) = \text{Hom}(M, IM)r_M(I) = 0$. Тогда согласно [5, Предложение 3.5(ii)] имеет место равенство $IM \cap r_M(I) = 0$. Согласно условию пункта (3) и лемме 5(4) подмодуль $r_M(I)$ существует в подмодуле eM , где $e \in S$ — центральный идемпотент. Несложно заметить, что $IM \cap eM = 0$. Тогда $eM \times_M IM \subset IM \cap eM = 0$. Согласно [5, Лемма 2.1] имеет место равенство $eM \times_M (IM \times_M eM) = (eM \times_M IM) \times_M eM = 0$. Покажем, что $IM \times_M eM \subset (1 - e)M$. Допустим, что $IM \times_M eM \not\subset (1 - e)M$.

Тогда $0 \neq e(IM \times_M eM) \in eM \times_M (IM \times_M eM)$, что противоречит равенству $eM \times_M (IM \times_M eM) = 0$. Таким образом, $IM \times_M eM \subset (1 - e)M$ и, следовательно, $IeM \subset (1 - e)M$. Так как идемпотент e централен, то $Ie = 0$. Тогда $eM \subset r_M(I)$ и, следовательно, $r_M(I) = eM$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5. *Для полупервичного кольца R следующие условия равносильны:*

- (1) R — квазибэровое кольцо.
- (2) Для каждого идеала I кольца R существует такой идемпотент $e \in R$, что I_R существенно в eR_R и $(1 - e)Re = 0$.
- (3) Для каждого идеала I кольца R существует такой идемпотент $e \in R$, что $r(I)$ существенно в eR_R и $(1 - e)Re = 0$.

4. Заключение

В настоящей работе были изучены существенно бэровы, существенно квазибэровы и дуальные к ним модули. Было установлено, что прямое слагаемое (дуально) существенно бэрового модуля является (дуально) существенно бэровым модулем. Показано, что над существенно квазибэровым справа кольцом каждый свободный модуль является существенно квазибэровым.

Выделим задачи, которые планируются рассмотреть в дальнейшем.

1. Является ли прямое слагаемое существенно квазибэрового модуля существенно квазибэровым?
2. Установить условия, при которых прямая сумма существенно бэровых модулей является существенно бэровым модулем.
3. Описать кольца, над которыми каждый (конечнопорожденный) проективный модуль является существенно бэровым модулем.

Автор хотел бы выразить искреннюю благодарность Абызову А. Н. и Ч. К. Куинь за их обширную помощь и неоценимые комментарии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abyzov, A. N. and Nhan, T. H. N. CS-Rickart Modules // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2014. Vol. 35:4. P. 317-326.
2. Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Модули, в которых суммы или пересечения двух прямых слагаемых являются прямыми слагаемыми // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 2. С. 3–11.
3. Agayev, N., Harmanci, A. and Halicioglu, S. On Rickart modules // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 2012. Vol. 38:2. P. 433-445.

4. Al-Saadi, S. A. and Ibrahiem, T. A. Strongly Rickart modules // Journal of Advances in Mathematics. 2014. Vol. 9:4.
5. Bican, L., Jambor, P., Kepka, T. and Nemec, P. Prime and coprime modules // Fundamenta Mathematicae CVII. 1980. P. 33-45.
6. Birkenmeier, G.F., Muller, B.J. and Rizvi, S.T. Modules in which every fully invariant submodules is essential in a direct summand // Comm. Algebra. 2002. Vol. 30:3. P. 1395-1415.
7. Birkenmeier, G.F., Park, J.K. and Rizvi, S.T. A Theory of hulls for rings and modules // Ring and module theory, Trends Math., Birkhäuser. 2010.
8. Birkenmeier, G.F., Park, J.K. and Rizvi, S.T. Extensions of rings and modules // Birkhäuser. 2013.
9. Birkenmeier, G.F. A generalization of FPF rings // Comm. Algebra. 2007. Vol. 17:4. P. 855-884.
10. Brown, K.A. The singular ideals of group rings // Quart. J. Oxford. 1977. Vol. 28. P. 41-60.
11. Clark, W.E. Twisted matrix units semigroup algebras // Duke Math. J. 1967. Vol. 34. P. 417- 424.
12. Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R. Lifting modules. Supplements and Projectivity in Module Theory // Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin. 2006.
13. Fuchs, L. Infinite Abelian Groups // Vol. 1, Academic Press , New York-London. 1970.
14. Garcia, J. L. Properties of Direct Summands of Modules // Comm. Algebra. 1989. Vol. 17:1. P. 73-92.
15. Hausen, J. Modules with the summand intersection property // Comm. Algebra. 1989. Vol. 17:1. P. 135-148.
16. Kaplansky, I. Infinite abelian groups // Univ. of Michigan Press, Ann Arbor. 1969.
17. Kaplansky, I. Rings of Operators // Benjamin, New York. 1968.
18. Karabacak, F. On generalizations of extending modules // Kyungpook Mathematical Journal. 2009. Vol. 49. P. 255-263.
19. Karabacak, F., and Tercan, A. On modules and matrix rings with SIP-extending // Taiwanese J. Math. 2007. Vol. 11 . P. 1037-1044.

20. Lee, G., Rizvi, S. T. and Roman, C. S. Rickart Modules // Comm. Algebra 2010. Vol. 38:11. P. 4005-4027.
21. Lee, G., Rizvi, S. T. and Roman, C. S. Dual Rickart Modules // Comm. Algebra. 2011. Vol. 39:11. P. 4036-4058.
22. Liu, Q., Ouyang, B. Y. and Wu, T. S., Principally quasi-Baer modules // Journal of Mathematical Research and Exposition. 2009. Vol. 29:5. P. 823-830.
23. Maeda, S. On a ring whose principal right ideals generated by idempotents form a lattice // J. Sci. Hiroshima Univ. 1960. Ser. A Vol. 24. P. 509-525.
24. Nicholson, W. K. and Yousif, M. F. Weakly continous and C_2 rings // Comm. Algebra. 2001. Vol. 29:6. P. 2429-2446.
25. Quynh, T. C. On fully prime submodules // Asian-European Journal of Mathematics (accepted).
26. Raggi, F., Rios, J., Rincon, H., Fernandez-Alonso, R. and Signoret, C. Prime and irreducible preradicals // J. Algebra Appl. 2005. Vol. 4:4. P. 451-466.
27. Rizvi, S.T., and Roman, C.S. Baer and quasi-Baer modules // Comm. Algebra. 2004. Vol. 32:1. P. 103-123.
28. Rizvi, S.T., and Roman, C.S. Baer property of modules and applications // Advances in Ring Theory. 2005. P. 225-241.
29. Talebi, Y. and Hamzekolaee, A. R. M. On SSP-lifting modules // East-West Journal of Mathematics. 2013. Vol. 01. P. 1-7.
30. Tütüncü, D.K. and Tribak, R. On dual Baer Modules // Glasgow Math. J. 2010. Vol 52. P. 261-269.
31. Wilson, G. V. Modules with the direct summand intersection property // Comm. Algebra. 1986. Vol. 14. P. 21-38.
32. Ungor, B., Agayev, N., Halicioglu, S. and Harmanci, A. On principally quasi-Baer modules // Albanian J. Math. 2011. Vol. 5:3. P. 165-173.
33. Wisbauer, R. Foundations of module and ring theory. A handbook for study and research // Gordon and Breach Science Publishers, Reading. 1991.
34. Zeng, Q. Some examples of ACS-rings // Vietnam Journal of Mathematics. 2007. Vol. 35:1. P. 11-19.

REFERENCES

1. Abyzov, A. N. & Nhan, T. H. N. 2014, "CS-Rickart Modules", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, Vol. 35, no 4, pp. 317-326.
2. Abyzov, A. N. & Tuganbaev, A. A. 2014, "Modules in which sums or intersections of two direct summands are direct summands", *Fundam. Prikl. Mat.*, Vol. 19, no 2, pp. 3-11.
3. Agayev, N., Harmanci, A. & Halicioglu, S. 2012, "On Rickart modules", *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, Vol. 38, no 2, pp. 433-445.
4. Al-Saadi, S. A. & Ibrahiem, T. A. 2014, "Strongly Rickart modules", *Journal of Advances in Mathematics*, Vol. 9, no 4, pp. 2506-2514.
5. Bican, L., Jambor, P., Kepka, T. & Nemec, P. 1980, "Prime and coprime modules", *Fundamenta Mathematicae CVII*, pp. 33-45.
6. Birkenmeier, G. F., Muller, B. J. & Rizvi, S. T. 2002, "Modules in which every fully invariant submodule is essential in a direct summand", *Comm. Algebra*, Vol. 30, no 3, pp. 1395-1415.
7. Birkenmeier, G. F., Park, J. K. & Rizvi, S. T. 2010, "A Theory of hulls for rings and modules, Ring and module theory", *Trends Math., Birkhäuser*.
8. Birkenmeier, G. F., Park, J. K. & Rizvi, S. T. 2013, "Extensions of rings and modules", *Birkhäuser*.
9. Birkenmeier, G. F. 2007, "A generalization of FPF rings", *Comm. Algebra*, Vol. 17, no 4, pp. 855-884.
10. Brown, K. A. 1977, "The singular ideals of group rings", *Quart. J. Oxford*, Vol. 28, pp. 41-60.
11. Clark, W. E. 1967, "Twisted matrix units semigroup algebras", *Duke Math. J.*, Vol. 34, pp. 417-424.
12. Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. & Wisbauer, R. 2006, "Lifting modules. Supplements and Projectivity in Module Theory", *Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin*.
13. Fuchs, L. 1970, "Infinite Abelian Groups", Vol. 1, *Academic Press, New York-London*.
14. Garcia, J. L. 1989, "Properties of Direct Summands of Modules", *Comm. Algebra*, Vol. 17, no 1, pp. 73-92.

15. Hausen, J. 1989, "Modules with the summand intersection property", *Comm. Algebra*, Vol. 17, no 1, pp. 135-148.
16. Kaplansky, I. 1969, "Infinite abelian groups", *Univ. of Michigan Press, Ann Arbor*.
17. Kaplansky, I. 1968, "Rings of Operators", *Benjamin, New York*.
18. Karabacak, F. 2009, "On generalizations of extending modules", *Kyungpook Mathematical Journal*, Vol. 49, pp. 255-263.
19. Karabacak, F. & Tercan, A. 2007, "On modules and matrix rings with SIP-extending", *Taiwanese J. Math.*, Vol. 11, pp. 1037-1044.
20. Lee, G., Rizvi, S. T. & Roman, C. S. 2010, "Rickart Modules", *Comm. Algebra*, Vol. 38, no 11, pp. 4005-4027.
21. Lee, G., Rizvi, S. T. & Roman, C. S. 2011, "Dual Rickart Modules", *Comm. Algebra*, Vol. 39, no 11, pp. 4036-4058.
22. Liu, Q., Ouyang, B. Y. & Wu, T. S. 2009, "Principally quasi-Baer modules", *Journal of Mathematical Research and Exposition*, Vol. 29, no 5, pp. 823-830.
23. Maeda, S. 1960, "On a ring whose principal right ideals generated by idempotents form a lattice", *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, Vol. 24, pp. 509-525.
24. Nicholson, W. K. & Yousif, M. F. 2001, "Weakly continuous and C_2 rings", *Comm. Algebra*, Vol. 29, no 6, pp. 2429-2446.
25. Quynh, T. C., "On fully prime submodules", *Asian-European Journal of Mathematics* (accepted).
26. Raggi, F., Rios, J., Rincon, H., Fernandez-Alonso, R. & Signoret, C. 2005, "Prime and irreducible preradicals", *J. Algebra Appl.*, Vol. 4, no 4, pp. 451-466.
27. Rizvi, S. T. & Roman, C. S. 2004, "Baer and quasi-Baer modules", *Comm. Algebra*, Vol. 32, no 1, pp. 103-123.
28. Rizvi, S. T. & Roman, C. S. 2005, "Baer property of modules and applications", *Advances in Ring Theory*, pp. 225-241.
29. Talebi, Y. & Hamzekolaee, A. R. M. 2013, "On SSP-lifting modules", *East-West Journal of Mathematics*, Vol. 01, pp. 1-7.
30. Tütüncü, D. K. & Tribak, R. 2010, "On dual Baer Modules", *Glasgow Math. J.*, Vol. 52, pp. 261-269.
31. Wilson, G. V. 1986, "Modules with the direct summand intersection property", *Comm. Algebra*, Vol. 14, pp. 21-38.

-
32. Ungor, B., Agayev, N., Halicioglu, S. & Harmanci, A. 2011, "On principally quasi-Baer modules", *Albanian J. Math.*, Vol. 5, no 3, pp. 165-173.
 33. Wisbauer, R. 1991, "Foundations of module and ring theory. A handbook for study and research", *Gordon and Breach Science Publishers, Reading*.
 34. Zeng, Q. 2007, "Some examples of ACS-rings", *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol. 35, no 1, pp. 11-19.

Казанский (Приволжский) федеральный университет.
Поступило 26.07.2015