

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 1.

УДК: 512.558

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-139-147

Ретрактные решетки¹

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров

Вечтомов Евгений Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров).

e-mail: vecht@mail.ru

Петров Андрей Александрович — кандидат физико-математических наук, Вятский государственный университет (г. Киров).

e-mail: andreipetrow@mail.ru

Аннотация

Изучаются ретрактные и слабо ретрактные решетки — решетки, все конгруэнции на которых порождаются ретракциями или слабыми ретракциями соответственно. Ретракцией (слабой ретракцией) решетки называется любой ее идемпотентный решеточный (полурешеточный) эндоморфизм.

Получены структурные свойства ретрактных и слабо ретрактных решеток (параграф 2).

Доказано, что класс всех ретрактных решеток замкнут относительно гомоморфных образов (теорема 1), конечных прямых произведений (теорема 2), прямых сумм (теорема 4) и перехода к двойственным решеткам (замечание 13), но не замкнут относительно взятия подрешеток (предложение 1) и ординальных сумм (пример 12). Пример 11 показывает, что конечные произведения цепей суть ретрактные решетки. А более широкий класс слабо ретрактных решеток замкнут относительно гомоморфных образов, конечных прямых произведений, прямых сумм и ординальных сумм (теорема 3).

В параграфе 3 рассмотрены предварительные результаты о ретракциях прямого произведения m -элементной и n -элементной цепей (предложение 2, примеры 13 и 14). Поставлена проблема нахождения числа ретракций такого произведения.

Параграф 4 содержит формулировки результатов первого автора о строении ретрактных полурешеток, дополняющих полученные утверждения о ретрактных и слабо ретрактных решетках.

Сделаны поясняющие замечания.

Ключевые слова: решетка, ретракция, ретрактная решетка, слабо ретрактная решетка.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

Вечтомов Е. М., Петров А. А. Ретрактные решетки // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 139–147.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-00117).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 512.558

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-139-147

Retract lattices

E. M. Vechtomov, A. A. Petrov

Vechtomov Evgenii Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Vyatka State University (Kirov).

e-mail: vecht@mail.ru

Petrov Andrey Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Vyatka State University (Kirov).

e-mail: andreipetro@mail.ru

Abstract

In this article we study retract and weakly retract lattices — lattices whose congruences are generated by retractions or weakly retractions, respectively. A retraction (weak retraction) of a lattice is any idempotent lattice (semilattice) endomorphism.

We have obtained the structural properties of retract and weakly retract lattices (section 2).

It is proved that the class of all retract lattices is closed under homomorphic images (Theorem 1), finite direct products (Theorem 2), direct sums (Theorem 4), and passage to dual lattices (Remark 13), but not under taking sublattices (Proposition 1) and ordinal sums (Example 12). Example 11 shows that the finite products of chains are retract lattices. A wider class of weakly retract lattices is closed under homomorphic images, finite direct products, direct sums, and ordinal sums (Theorem 3).

In section 3, preliminary results are presented on the retractions of the direct product of an m -element and an n -element chain (Proposition 2, Examples 13 and 14). The problem of finding the number of retractions of such a product is posed.

Section 4 contains the first author's results on the structure of retract semilattices, which complement the results on retract and weakly retract lattices.

Explanatory notes are made.

Keywords: lattice, retraction, retract lattice, weakly retract lattice.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

Vechtomov, E. M., Petrov, A. A. 2026, "Retract lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 139–147.

1. Введение. Предварительные сведения

Статья посвящена теории решеток, точнее, исследованию двух классов решеток — ретрактных решеток и слабо ретрактных решеток, определяемых в терминах ретракций. Ретракция e полурешетки X — это произвольный идемпотентный полурешеточный гомоморфизм $X \rightarrow X$. Заметим, что полурешетку X вместе с ретракцией e можно отождествить с полумодулем X над одноэлементным полукольцом $\{e\}$ [2].

Основные результаты статьи были анонсированы в докладе авторов «О ретрактных решетках» на XXIV Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 110-летию со дня рождения академика Юрия Владимировича Линника и

110-летию со дня рождения профессора Андрея Борисовича Шидловского и 80-летию со дня рождения профессора Геннадия Ивановича Архипова, состоявшейся в Туле 14–17 мая 2025 года.

Введем необходимые понятия.

Полурешеткой называется идемпотентная коммутативная полугруппа. Если в полурешетке $\langle X, + \rangle$ задать бинарное отношение \leq формулой: $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$ для любых $a, b \in X$, то получим упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$, в котором $a + b = \sup\{a, b\}$ для всех $a, b \in X$, называемое *верхней полурешеткой*.

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle X, +, \cdot \rangle$, для которой $\langle X, + \rangle$ и $\langle X, \cdot \rangle$ — полурешетки и операции сложения $+$ и умножения \cdot связаны законами поглощения $x + xy = x$ и $x(x + y) = x$. При этом соответствующая полурешетке $\langle X, + \rangle$ верхняя полурешетка $\langle X, \leq \rangle$ удовлетворяет равенству $a \cdot b = \inf\{a, b\}$ для любых $a, b \in X$. Решетка называется *решеткой с нулем*, если она обладает аддитивно нейтральным (равносильно, мультипликативно поглощающим, наименьшим) элементом 0 .

Напомним, что подмножество Y упорядоченного множества $\langle X, \leq \rangle$ называется *выпуклым*, если $z \in Y$ для любых $x, y \in Y$ и $z \in X$, таких, что $x \leq z \leq y$. Элементы x и y из $\langle X, \leq \rangle$ называются *сравнимыми*, если $x \leq y$ или $y \leq x$, в противном случае — *несравнимыми*. *Цепь* — это упорядоченное множество, любые два элемента которого сравнимые. Выпуклые подмножества цепи называются ее *промежутками*.

Отношение эквивалентности ρ на решетке (полурешетке) X называется *конгруэнцией* на X , если arb и cpd влекут $(a + c)\rho(b + d)$ и $(ac)\rho(bd)$ (только $(a + c)\rho(b + d)$) для любых $a, b, c, d \in X$ (достаточно считать $c = d$). Классы $a/\rho = \{x \in X : x\rho a\}$, $a \in X$, конгруэнции ρ на решетке X образуют *фактор-решетку* X/ρ . Ясно также, что каждый класс a/ρ является выпуклой подрешеткой решетки X .

Сведения по теории решеток содержатся в доступных книгах [3, 4].

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Когда мы говорим о решетке $\langle X, +, \cdot \rangle$ как полурешетке, то имеем в виду ее аддитивную полурешетку $\langle X, + \rangle$.

Ретракцией (*слабой ретракцией*) решетки X назовем любой решеточный (полурешеточный) гомоморфизм $e : X \rightarrow X$, такой, что $e(e(x)) = e(x)$ для всех $x \in X$. Каждая ретракция (слабая ретракция) e решетки X порождает конгруэнцию $\rho(e)$ на решетке (полурешетке) X по правилу

$$x\rho(e)y \text{ означает } ex = ey \text{ при любых } x, y \in X.$$

Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 1. Пусть e — ретракция (слабая ретракция) решетки X . Тогда отношение $\rho(e)$ будет конгруэнцией на решетке (полурешетке) X , каждый класс которой $a/\rho(e)$, $a \in X$, представляет собой выпуклую подрешетку (подполурешетку) решетки X и $(a/\rho(e)) \cap eX = \{ea\}$.

Конгруэнция ρ на решетке X называется *ретрактной* (*слабо ретрактной*), если $\rho = \rho(e)$ для некоторой ретракции (слабой ретракции) e решетки X , в противном случае — *неретрактной*. Саму решетку назовем *ретрактной* (*слабо ретрактной*), если все конгруэнции на ней ретрактные (слабо ретрактные), в противном случае — *неретрактной* (*слабо неретрактной*). Ясно, что ретрактные решетки являются слабо ретрактными.

ЛЕММА 2. Конгруэнция ρ на решетке X является ретрактной (слабо ретрактной) тогда и только тогда, когда существует подрешетка (подполурешетка) Y в X , пересекающаяся с каждым классом a/ρ ровно по одному элементу, то есть $|Y \cap (a/\rho)| = 1$ для любого элемента $a \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\rho = \rho(e)$ для ретракции (слабой ретракции) e решетки X , то можно взять $Y = eX$ в силу леммы 1. Если Y удовлетворяет достаточному условию леммы, то $Y = eX$ для ретракции (слабой ретракции) e решетки X , такой, что $ea \in Y \cap (a/\rho)$ для всех $a \in X$. Имеем $\rho = \rho(e)$, при этом $Y \cong X/\rho$.

Рассмотрим прямое произведение $A \times B$ решеток A и B . Пусть e_1 и e_2 — ретракции (слабые ретракции) решеток A и B , соответственно. Тогда отображение $e_1 \times e_2 : A \times B \rightarrow A \times B$, определенное формулой

$$(e_1 \times e_2)((a, b)) = (e_1 a, e_2 b) \text{ при } a \in A \text{ и } b \in B,$$

является ретракцией (слабой ретракцией) решетки $A \times B$.

ЛЕММА 3. [3, с. 43, теорема 13] Произвольная конгруэнция ρ на решетке $A \times B$ имеет вид $\rho = \rho_1 \times \rho_2$, где ρ_1 (ρ_2) — конгруэнция на решетке A (B) и $(a_1, b_1)(\rho_1 \times \rho_2)(a_2, b_2)$ означает $a_1 \rho_1 a_2$ и $b_1 \rho_2 b_2$ для любых $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$.

2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. Гомоморфные образы, равносильно, фактор-решетки, ретрактных (слабо ретрактных) решеток являются ретрактными (слабо ретрактными) решетками.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны ретрактная решетка A , гомоморфизм $\alpha : A \rightarrow B$ решетки A на решетку B и конгруэнция ρ на решетке B . Для произвольных элементов $x, y \in A$ положим: $x \sigma y \Leftrightarrow \alpha(x) \rho \alpha(y)$. Получаем конгруэнцию σ на полурешетке A . Согласно лемме 2 в каждом классе конгруэнции σ можно взять по одному элементу так, чтобы они составили подрешетку Y решетки A . Тогда, снова в силу леммы 2, подрешетка $\alpha(Y)$ решетки B обосновывает ретрактность конгруэнции ρ .

ТЕОРЕМА 2. Прямое произведение конечного числа решеток будет ретрактной (слабо ретрактной) решеткой тогда и только тогда, когда все сомножители являются ретрактными (слабо ретрактными) решетками.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из теоремы 1.

Доказательство обратного утверждения проведем для ретрактных решеток; для слабо ретрактных решеток доказательство аналогично. В силу индукции по числу сомножителей достаточно рассмотреть прямое произведение $A = A_1 \times A_2$ двух ретрактных решеток A_1 и A_2 . Возьмем произвольную конгруэнцию ρ на решетке A . По лемме 3 $\rho = \rho_1 \times \rho_2$. Для номера $i = 1, 2$ на ретрактной решетке A_i существует такая ретракция e_i , что $\rho_i = \rho(e_i)$. Тогда, очевидно, отображение $e = e_1 \times e_2 : A \rightarrow A$, $e((a_1, a_2)) = (e_1 a_1, e_2 a_2)$ для любых $a_i \in A_i$ при $i = 1, 2$, будет ретракцией решетки A , порождающей конгруэнцию $\rho : \rho = \rho(e)$.

ПРИМЕР 11. Прямое произведение конечного числа произвольных цепей является ретрактной решеткой. В силу теоремы 2 достаточно показать, что всякая цепь A будет ретрактной решеткой. Возьмем любую конгруэнцию ρ на A . Классы конгруэнции ρ являются промежутками цепи A . В теореме 1 [2] указаны все ретракции, порождающие конгруэнцию ρ , что влечет ретрактность конгруэнции ρ . Значит, A — ретрактная решетка.

Пусть I — цепь и $(A_i)_{i \in I}$ — семейство решеток. Рассмотрим дизъюнктивное объединение $\Sigma(A_i)_{i \in I}$ семейства $(A_i)_{i \in I}$ со следующей операцией сложения $+$ и умножения \cdot . Для любых элементов $a \in A_i$ и $b \in A_j$ положим: $a + b$ и $a \cdot b$ — сумма и произведение этих элементов в решетке A_i при $i = j$ и $a + b = b + a = b$ и $a \cdot b = b \cdot a = a$ при $i < j$. Получаем решетку $A \equiv \langle \Sigma(A_i)_{i \in I}, +, \cdot \rangle$, называемую *ординальной суммой* решеток A_i ($i \in I$) [4, с. 15].

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы ординальная сумма произвольного семейства решеток являлась слабо ретрактной решеткой, необходимо и достаточно, чтобы все ее слагаемые были слабо ретрактными решетками.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \Sigma(A_i)_{i \in I}$ — ординальная сумма решеток.

Необходимость. Предположим, что X — слабо ретрактная решетка и σ — конгруэнция на решетке A_i ($i \in I$). Расширим конгруэнцию σ до конгруэнции ρ на решетке X , полагая:

$$a/\rho = a/\sigma, \text{ если } a \in A_i;$$

$$a/\rho = \cup A_j \text{ по всем индексам } j < i, \text{ если } a \in A_k \text{ при } k < i;$$

$$a/\rho = \cup A_j \text{ по всем индексам } j > i, \text{ если } a \in A_k \text{ при } k > i.$$

Возьмем подполурешетку Y решетки X из формулировки леммы 2. Подполурешетка $Y \cap A_i$ решетки A_i удовлетворяет достаточному условию леммы 2 (при A_i вместо X). Поэтому решетка A_i будет слабо ретрактной.

Достаточность. Допустим, что все решетки A_i ($i \in I$) слабо ретрактные и ρ — конгруэнция на решетке X . Согласно лемме 2 каждая решетка A_i ($i \in I$) имеет подполурешетку Y_i , соответствующую конгруэнции $\rho \cap (A_i \times A_i)$ на A_i . Рассмотрим произвольный класс K конгруэнции ρ . По лемме 1 K является выпуклой подполурешеткой в X .

Возможны следующие взаимоисключающие случаи:

$$1) \exists i \in I K \subset A_i;$$

$$2) \exists i \in I (K \cap A_i \neq \emptyset \ \& \ A_i \setminus K \neq \emptyset \ \& \ \exists j \in I (j > i \ \& \ K \setminus A_j \neq \emptyset));$$

$$3) \exists i \in I (K \cap A_i \neq \emptyset \ \& \ A_i \setminus K \neq \emptyset \ \& \ \exists j \in I (j < i \ \& \ K \setminus A_j \neq \emptyset));$$

$$4) \forall i \in I (K \cap A_i = \emptyset \vee A_i \subseteq K).$$

В случаях 1)–3) берем единственный элемент $a_K \in K \cap Y_i$.

В случае 4) берем произвольный элемент $a_K \in K$.

В результате получаем подполурешетку $Y = \{a_K : K \in X/\rho\}$ решетки X , порождающую конгруэнцию ρ .

ПРИМЕР 12. Пусть $A = B$ — прямое произведение двух двухэлементных цепей и C — их ординальная сумма при условии $A < B$. Допустим, что a — наибольший элемент решетки A , b — наименьший элемент решетки B . На 8-элементной дистрибутивной решетке C рассмотрим конгруэнцию ρ с 7 классами $\{a, b\}$, $\{x\}$ при $x \in C \setminus \{a, b\}$. Поскольку 7-элементные подмножества $C \setminus \{a\}$ и $C \setminus \{b\}$ не являются подрешетками решетки C , то решеточная конгруэнция ρ неретрактная. Но конгруэнция ρ будет ретрактной конгруэнцией (верхней) полурешетки C , так как $C \setminus \{b\}$ есть подполурешетка полурешетки C . Легко видеть, что неретрактная решетка C является слабо ретрактной решеткой.

Пример 12 доказывает существование слабо ретрактных конечных дистрибутивных решеток, не являющихся ретрактными решетками. Он показывает, что ординальная сумма двух ретрактных решеток может не являться ретрактной решеткой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Подрешетки ретрактных решеток не обязаны быть ретрактными решетками.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — прямое произведение n экземпляров двухэлементной цепи при натуральном числе $n \geq 5$. По теореме 2 решетка A является ретрактной. Легко видеть, что A содержит подрешетку, изоморфную неретрактной решетке из примера 12.

Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — непустое семейство решеток A_i с нулем 0. Выделим в прямом произведении $\Pi(A_i)_{i \in I}$ подрешетку $\oplus(A_i)_{i \in I}$, состоящую в точности из тех элементов-функций $f \in \Pi(A_i)_{i \in I}$, которые имеют конечное множество ненулевых координат. То есть $\oplus(A_i)_{i \in I} = \{f \in \Pi(A_i)_{i \in I} : \text{supp } f \text{ — конечное множество}\}$, где $\text{supp } f = \{i \in I : f(i) \neq 0\}$. Множество $\text{supp } f$ называется *носителем* $f : I \rightarrow \cup(A_i)_{i \in I}$, $f(i) \in A_i$ для всех индексов $i \in I$. Решетка $\oplus(A_i)_{i \in I}$ называется *прямой суммой* (семейства) решеток с нулем A_i ($i \in I$).

Предположим, что ρ_i — конгруэнция на решетке A_i для любого $i \in I$. Обозначим через $\times(\rho_i)_{i \in I}$ бинарное отношение на $\oplus(A_i)_{i \in I}$, означающее:

$$\forall f, g \in \oplus(A_i)_{i \in I} (f \times(\rho_i)_{i \in I} g \Leftrightarrow \forall i \in I f(i) \rho_i g(i)).$$

Легко видеть, что бинарное отношение $\times(\rho_i)_{i \in I}$ на прямой сумме $\oplus(A_i)_{i \in I}$ будет конгруэнцией на решетке $\oplus(A_i)_{i \in I}$.

ЛЕММА 4. *Конгруэнции на прямой сумме $\oplus(A_i)_{i \in I}$ решеток с нулем A_i суть в точности конгруэнции вида $\times(\rho_i)_{i \in I}$ по всевозможным конгруэнциям ρ_i на A_i при $i \in I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже знаем, что $\times(\rho_i)_{i \in I}$ являются конгруэнциями на прямой сумме $\oplus(A_i)_{i \in I}$.

Возьмем произвольную конгруэнцию ρ на решетке $\oplus(A_i)_{i \in I}$ и некоторый индекс $j \in I$. Для любых $a, b \in A_j$ положим

$$a \rho_j b \Leftrightarrow \exists f, g \in \oplus(A_i)_{i \in I} (f \rho g \ \& \ f(j) = a \ \& \ g(j) = b).$$

Очевидно, бинарное отношение ρ_j на решетке A_j является конгруэнцией на ней. При этом $\rho \subseteq \times(\rho_i)_{i \in I}$. Обратно, пусть $f \times(\rho_i)_{i \in I} g$ для $f, g \in \oplus(A_i)_{i \in I}$. Множество $K = \text{supp } f \cup \text{supp } g$ конечно и $f = g = 0$ на множестве $I \setminus K$. Фиксируем индекс $j \in K$. Имеем $f(j) \rho_j g(j)$, то есть $f_j \rho_j g_j$ для некоторых $f_j, g_j \in \oplus(A_i)_{i \in I}$, таких, что $f_j(j) = f(j)$ и $g_j(j) = g(j)$. Возьмем функцию $h_j \in \oplus(A_i)_{i \in I}$, равную 0 на $I \setminus \{j\}$ и $h_j(j) = f(j) + g(j)$. Тогда $(f h_j) \rho (g h_j)$. Суммируя эти соотношения по всем индексам $j \in K$, получаем $f \rho g$.

ТЕОРЕМА 4. *Прямая сумма решеток с нулем является ретрактной (слабо ретрактной) решеткой тогда и только тогда, когда все ее слагаемые будут ретрактными (слабо ретрактными) решетками.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана прямая сумма $A = \oplus(A_i)_{i \in I}$ решеток A_i с нулем. Каждая решетка A_i ($i \in I$) является гомоморфным образом решетки A при проектировании $A \rightarrow A_i$, $f \mapsto f(i)$ для всех $f \in A$. Поэтому по предложению 1 если решетка A ретрактная (слабо ретрактная), то такими же будут решетки A_i для всех $i \in I$.

Обратно, допустим, что все решетки A_i ($i \in I$) ретрактные (слабо ретрактные). Рассмотрим произвольную конгруэнцию ρ на решетке A . По лемме 4 $\rho = \times(\rho_i)_{i \in I}$ для подходящих конгруэнций ρ_i на решетках A_i по всем индексам $i \in I$. Имеем $\rho_i = \rho(e_i)$ для ретракции (слабой ретракции) e_i решетки A_i для любого $i \in I$. Зададим $e = \times(e_i)_{i \in I}$ формулой: $e(f)(i) = e_i(f(i))$ для всех $f \in A$ и $i \in I$. В результате, как легко видеть, получаем ретракцию (слабую ретракцию) e решетки A , причем такую, что $\rho = \rho(e)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Поскольку любая решетка и двойственная к ней решетка имеют одни и те же конгруэнции и ретракции, то ретрактность произвольной решетки равносильна ретрактности двойственной решетки.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Итак, класс всех ретрактных решеток замкнут относительно гомоморфных образов, конечных прямых произведений, прямых сумм и перехода к двойственным решеткам, но не замкнут относительно взятия подрешеток и ординальных сумм. А более широкий класс слабо ретрактных решеток замкнут относительно гомоморфных образов, конечных прямых произведений, прямых сумм и ординальных сумм.

3. О ретракциях прямого произведения двух конечных цепей

Предположим, что конгруэнция ρ_1 (ρ_2) на решетке A (B) индуцируется некоторой ретракцией e_1 (e_2) решетки A (B): $\rho_1 = \rho(e_1)$ и $\rho_2 = \rho(e_2)$. Легко видеть, что ретракция $e_1 \times e_2$ порождает исходную конгруэнцию ρ , то есть $\rho = \rho(e_1 \times e_2)$. Заметим, что конгруэнция ρ может индуцироваться ретракцией решетки $A \times B$, отличной от ретракций вида $e_1 \times e_2$. Ретракции вида $e_1 \times e_2$ будем называть *каноническими ретракциями*, в противном случае — *неканоническими*.

Итак, для ретрактных решеток A и B и любой ретракции e решетки $A \times B$ имеем $\rho(e) = \rho(e_1 \times e_2)$ для подходящих ретракций e_1 и e_2 решеток A и B , соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A, B — произвольные решетки. Для того чтобы ретракция e решетки $A \times B$ была канонической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее утверждение: если $\rho(e) = \rho_1 \times \rho_2$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $e((a_1, b_1)) = (a_1, b_1)$ и $e((a_2, b_2)) = (a_2, b_2)$, то $a_1 \rho_1 a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ и $b_1 \rho_2 b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Допустим, что $e = e_1 \times e_2$ для ретракции e_1 на решетке A и ретракции e_2 на решетке B и выполняется условие из указанного в формулировке утверждения. Тогда $\rho_1 = \rho(e_1)$, $a_1 = e_1(a_1)$, $a_2 = e_1(a_2)$, стало быть, $a_1 \rho_1 a_2 \Leftrightarrow e_1(a_1) = e_1(a_2)$. Аналогично, $b_1 \rho_2 b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$.

Достаточность. Пусть верно утверждение из формулировки данного предложения. Для любых $a \in A$ и $b \in B$ положим $e_1(a) = p_1(e((a, b)))$ и $e_2(b) = p_2(e((a, b)))$, где $p_1((x, y)) = x$ и $p_2((x, y)) = y$ для всех $x \in A$ и $y \in B$. Покажем, что значение $e_1(a)$ не зависит от второй координаты b пары (a, b) . Возьмем пару (a, c) , где $c \in B$. Поскольку $e((a, b))\rho(a, b)$ и $e((a, c))\rho(a, c)$, то $p_1(e((a, b)))\rho_1 a p_1(e((a, c)))$. Поэтому $p_1(e((a, b))) = p_1(e((a, c)))$. Аналогично доказывается, что значение $e_2(b)$ не зависит от первой координаты пары (a, b) . Легко видеть, что отображения e_1 и e_2 служат ретракциями решеток A и B , соответственно. Равенство $e = e_1 \times e_2$ очевидно.

Пусть C_n есть n -элементная цепь для натурального числа n .

ПРИМЕР 13. Найдем все ретракции решетки $C_2 \times C_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, где $C_2 = \{0, 1\}$ при $0 < 1$. Цепь C_2 имеет 3 ретракции: константные $A \rightarrow \{0\}$, $A \rightarrow \{1\}$ и тождественную, и 2 конгруэнции: отношение равенства и одноклассовую. Поэтому решетка $C_2 \times C_2$ обладает 9 каноническими ретракциями и 4 конгруэнциями. Одноклассовая конгруэнция на решетке $C_2 \times C_2$ порождается 4 ретракциями, отношение равенства — только тождественной ретракцией, каждая из 2 двухклассовых конгруэнций — 2 каноническими ретракциями. Возьмем на решетке $C_2 \times C_2$ конгруэнцию ρ с двумя классами $\{0, 1\} \times \{0\}$ и $\{0, 1\} \times \{1\}$. И рассмотрим отображение $e : C_2 \times C_2 \rightarrow C_2 \times C_2$, переводящее класс $C_2 \times \{0\}$ в элемент $(0, 0)$, а класс $C_2 \times \{1\}$ — в элемент $(1, 1)$. По предложению 2 e будет неканонической ретракцией решетки $C_2 \times C_2$, порождающей конгруэнцию ρ . Аналогично, двойственная к e неканоническая ретракция порождает конгруэнцию с двумя классами $\{0\} \times C_2$ и $\{1\} \times C_2$. Таким образом, решетка $C_2 \times C_2$ имеет 11 ретракций, включая 2 неканонические ретракции.

ПРИМЕР 14. В статье [5] получена формула для числа всех ретрактов прямого произведения $C_m \times C_n$ при любых натуральных числах m и n . В частности, число (непустых) ретрактов решетки $C_2 \times C_2$ равно 10, в то время как число ее ретракций равно 11. Отметим, что ретракт решетки может быть образом ее различных ретракций. Число ретрактов решетки $C_3 \times C_3$ равно 71 (см. [5]). Опираясь на предложение 2, нами найдены 34 неканонические ретракции этой решетки. Учитывая 64 канонические ретракции, всего получаем 98 ретракций решетки $C_3 \times C_3$.

ЗАДАЧА 1. Найти число всех ретракций решетки $C_m \times C_n$. Отметим, что число ретракций n -элементной цепи равно числу Фибоначчи F_{2n} с номером $2n$ [6, р. 228]. Поэтому число всех канонических ретракций решетки $C_m \times C_n$ равно $F_{2m} \cdot F_{2n}$.

4. Добавление

В докладе [1] описаны все ретрактные полурешетки. Полурешетка названа нами *ретрактной*, если все конгруэнции на ней порождаются ее ретракциями. Заметим, что решетки, являющиеся ретрактными полурешетками, будут слабо ретрактными решетками, но не наоборот.

Элемент t полурешетки A называется *разложимым*, если $t = x + y$ для некоторых несравнимых элементов x, y из A . Полурешетка A обладает свойством $(*)$, если A имеет наибольший элемент t , такой, что t разложимый и $x + y = t$ для любых несравнимых элементов $x, y \in A$.

ТЕОРЕМА 5. [1, теорема 1] *Для того чтобы полурешетка была ретрактной, необходимо и достаточно, чтобы она была изоморфна ординальной сумме полурешеток со свойством $(*)$ и цепей.*

Кроме того, в указанной работе [1] отмечены следующие свойства класса ретрактных полурешеток.

(1) *Прямое произведение $A \times B$ двух неоднородных полурешеток A и B является ретрактной полурешеткой тогда и только тогда, когда A и B — двухэлементные цепи.*

(2) *Гомоморфные образы ретрактных полурешеток являются ретрактными полурешетками.*

(3) *Всякая полурешетка (конечная полурешетка) изоморфно вкладывается в некоторую неретрактную полурешетку (конечную неретрактную полурешетку).*

(4) *Подполурешетки ретрактных полурешеток являются ретрактными полурешетками.*

(5) *Для того чтобы ординальная сумма семейства полурешеток являлась ретрактной полурешеткой, необходимо и достаточно, чтобы все ее слагаемые были ретрактными полурешетками.*

Теорема 5 и утверждения (1), (4) и (5) показывают, что свойства ретрактных полурешеток кардинально отличаются от свойств ретрактных решеток.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вечтомов Е. М. Ретрактные полурешетки // Алгебра и динамические системы: тезисы докладов Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения В. А. Белоногова. Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, 2025. С. 18–21.
2. Вечтомов Е. М., Петров А. А. О полумодулях над тривиальным полукольцом // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26. Вып. 3. С. 85–94.
3. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
4. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. 2-е изд. М.: Наука, 1982. 160 с.
5. Czédli G. Lattices of retracts of direct products of two finite chains and notes on retracts of lattices // Algebra Universalis. 2022. V. 83, Issue 3. №34.
6. Howie J.M. Products of idempotents in certain semigroups of transformations // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1971. V. 17. Issue 3. P. 223–236.

REFERENCES

1. Vechtomov E. M. 2025, “Retract semilattices”, *Algebra and Dynamic Systems: abstracts of the international conference dedicated to the 90th anniversary of V. A. Belonogov*, Nalchik: Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, pp. 18–21.
2. Vechtomov E. M., Petrov A. A. 2025, “About semimodules over the trivial semiring”, *Chebyshevskii Sbornik*, V. 26, Issue 3, pp. 85–94.
3. Grätzer G. “General Lattice Theory”, *Moscow: Mir*, 1982. 456 p.
4. Skornyakov L. A. “Elements of theory of structures. 2nd ed.”, *Moscow: Nauka*, 1982. 160 p.
5. Czédli G. 2022, “Lattices of retracts of direct products of two finite chains and notes on retracts of lattices”, *Algebra Universalis*, V. 83, Issue 3, №34.
6. Howie J. M. 1971, “Products of idempotents in certain semigroups of transformations”, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, V. 17, Issue 3, pp. 223–236.

Получено: 25.11.2025

Принято в печать: 12.02.2026