

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 1.

УДК: 517.957

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-111-133

**Интегрирование модифицированного уравнения
Кортевега – де Фриза с интегральным источником**

А. Б. Яхшимуратов, М. М. Хасанов

Яхшимуратов Алишер Бекчанович — доктор физико-математических наук, университет Мамуна (г. Хива, Узбекистан).

e-mail: alisher.yakhshi@gmail.com

Хасанов Музаффар Машарипович — доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, Ургенчский государственный университет (г. Ургенч).

e-mail: hmuzaffar@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза с интегральным источником. Показано, что метод обратной спектральной задачи может быть применен для интегрирования модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с интегральным источником. Определена эволюция спектральных данных оператора Дирака с периодическим потенциалом, связанным с решением модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с интегральным источником. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина – Трубовица в классе шесть раз непрерывно дифференцируемых периодических функций. Показано, что построенное решение действительно удовлетворяет рассматриваемому уравнению.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза, самосогласованный источник, оператор Дирака, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина – Трубовица, формулы следов.

Библиография: 32 названий.

Для цитирования:

Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с интегральным источником // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 111–133.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 517.957

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-111-133

**Integration of the modified Korteweg-de Vries equation
with an integral source**

A. B. Yakhshimuratov, M. M. Khasanov

Yaxshimuratov Alisher Bekchanovich — doctor of physical and mathematical sciences, Mamun University (Khiva, Uzbekistan).

e-mail: alisher.yakhshi@gmail.com

Khasanov Muzaffar Masharipovich — doctor of philosophy (PhD) in physical and mathematical sciences, Urgench State University (Urgench).

e-mail: hmuzaffar@mail.ru

Abstract

In this paper, we consider the modified Korteweg–de Vries equation with an integral source. It is shown that the inverse spectral problem method can be applied to integrate the modified Korteweg–de Vries equation with an integral source. The evolution of the spectral data of the Dirac operator with a periodic potential associated with the solution of the modified Korteweg–de Vries equation with an integral source is determined. The solvability of the Cauchy problem for the infinite system of Dubrovin–Trubowitz differential equations in the class of six times continuously differentiable periodic functions is proved. It is shown that the constructed solution, indeed, satisfies the equation under consideration.

Keywords: Modified Korteweg-de Vries equation, self-consistent source, Dirac operator, inverse spectral problem, Dubrovin-Trubowitz system of equations, trace formulas.

Bibliography: 32 titles.

For citation:

Yakhshimuratov, A. B., Khasanov, M. M. 2026, “Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with an integral source”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 111–133.

1. Введение

Одним из представителей класса вполне интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, имеющий большое прикладное значение, является модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза (мКдФ). Полная интегрируемость этого уравнения методом обратной задачи, в классе быстроубывающих функций, впервые была установлена в работе М.Вадати (см. [1]). Исследованию уравнения мКдФ в классе конечнозонных функций посвящены работы [2, 3, 4].

В работе [5] В.К.Мельникова с помощью метода обратной задачи рассеяния было проинтегрировано уравнение КдФ с самосогласованным источником, в классе быстроубывающих функций.

В работе J.Leon, A.Latif [6] приводится физическая задача, описываемая с помощью уравнения с самосогласованным источником.

В работах [7, 8] изучены интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения с нагруженным членом в классе периодических функций.

В работах [9, 10, 11, 12] использован метод (G'/G) -разложения для интегрирования нагруженного уравнения Кортевега – де Фриза (КдФ), нагруженного модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза (мКдФ), нагруженного уравнения Бюргерса и нагруженного нелинейного уравнения Дегаспериса – Просеси.

В работах [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25] рассмотрены различные нелинейные уравнения отрицательного порядка с самосогласованным источником.

Рассмотрим следующее уравнение мКдФ с интегральным источником

$$q_t = 6q^2q_x - q_{xxx} + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t) (\psi_1^+ \psi_1^- - \psi_2^+ \psi_2^-) d\lambda, \quad t > 0, \quad x \in R, \quad (1)$$

с начальным условием

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad (2)$$

в классе действительных π -периодических по x функций

$$q(x, t) \in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

Здесь $\beta(\lambda, t)$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику

$$\beta(\lambda, t) = O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \pm\infty,$$

$\psi^\pm = (\psi_1^\pm(x, \lambda, t), \psi_2^\pm(x, \lambda, t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^\pm(0, \lambda, t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in R, \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Через $s(x, \lambda, t) = (s_1(x, \lambda, t), s_2(x, \lambda, t))^T$ обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0, \lambda, t) = (0, 1)^T$.

Цель данной работы дать процедуру построения решения $(q(x, t), \psi^+(x, \lambda, t), \psi^-(x, \lambda, t))$ задачи (1)-(2), в рамках обратной спектральной задачи для уравнения Дирака (4).

2. Спектральная теория для оператора Дирака с периодическим коэффициентом

В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическими коэффициентами (см. [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]).

Рассмотрим систему уравнений Дирака на всей прямой

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in R, \quad (5)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные непрерывные функции из класса $C^1(R)$, имеющие период π , а λ комплексный параметр.

Обозначим через $c(x, \lambda) = (c_1(x, \lambda), c_2(x, \lambda))^T$ и $s(x, \lambda) = (s_1(x, \lambda), s_2(x, \lambda))^T$ решения уравнения (5) удовлетворяющие начальным условиям $c(0, \lambda) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda) = (0, 1)^T$.

Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi, \lambda) + s_2(\pi, \lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла для оператора Дирака (5). Следующее утверждение составляет содержание теоремы Флоке: при $\Delta^2(\lambda) - 4 \neq 0$, уравнение (5) имеет два линейно независимых решения имеющие вид: $\psi^\pm(x, \lambda) = \rho_\pm^{\frac{x}{\pi}} \cdot p^\pm(x, \lambda)$, где $p^\pm(x, \lambda)$ – π -периодические вектор-функции по x , и $\rho_\pm = (\Delta(\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4})/2$; при $\Delta(\lambda) = 2$, уравнение (5) имеет решение с периодом π ; при $\Delta(\lambda) = -2$, уравнение (5) имеет решение с антипериодом π . Если положить $\psi_1^\pm(0, \lambda) = 1$, то

$$\psi^\pm(x, \lambda) = c(x, \lambda) + \frac{s_2(\pi, \lambda) - c_1(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi, \lambda)} s(x, \lambda).$$

Эти решения принято называть решениями Флоке.

Спектр оператора (5) состоит из следующего множества

$$E = \{\lambda \in R : -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\} = R \setminus \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}.$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in Z$ называются лакунами.

Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda) = 0$ обозначим через ξ_n , $n \in Z$. Числа ξ_n , $n \in Z$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (5) и выполняются соотношения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$.

Числа $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$ и знаки $\sigma_n = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (5). Спектральные параметры ξ_n , σ_n , $n \in Z$ и границы спектра λ_n , $n \in Z$ называются спектральными данными задачи (5). Нахождение спектральных данных задачи (5) называется прямой задачей, а восстановление коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Если в задаче (5), вместо $p(x)$ и $q(x)$ рассмотреть $p(x + \tau)$ и $q(x + \tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ : $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in Z$, а спектральные параметры зависят от параметра τ : $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in Z$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) h_n(\xi) [2\xi_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k)], n \in Z,$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ – меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина-Трубовица, а также следующие формулы следов

$$p(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau) \right),$$

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) h_n(\xi(\tau))$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

Нетрудно доказываются следующие лемма и теоремы.

ЛЕММА 1. *Выполняются следующие равенства*

$$\frac{\partial}{\partial \tau} s_1(\pi, \lambda, \tau) = 2q(\tau)s_1(\pi, \lambda, \tau) - (\lambda + p(\tau))[s_2(\pi, \lambda, \tau) - c_1(\pi, \lambda, \tau)],$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} c_2(\pi, \lambda, \tau) = -(\lambda - p(\tau))[s_2(\pi, \lambda, \tau) - c_1(\pi, \lambda, \tau)] - 2q(\tau)c_2(\pi, \lambda, \tau),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (s_2(\pi, \lambda, \tau) - c_1(\pi, \lambda, \tau)) = 2(\lambda - p(\tau))s_1(\pi, \lambda, \tau) + 2(\lambda + p(\tau))c_2(\pi, \lambda, \tau).$$

Здесь через $c(x, \lambda, \tau)$ и $s(x, \lambda, \tau)$ обозначены решения системы Дирака с коэффициентами $p(x + \tau)$ и $q(x + \tau)$, удовлетворяющие начальным условиям $c(0, \lambda, \tau) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau) = (0, 1)^T$.

ТЕОРЕМА 1. *Если число λ является собственным значением граничной задачи*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in (0, \pi), \quad (6)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0, \quad (7)$$

где $q(x)$ действительная непрерывная функция, и ему соответствует собственная вектор-функция $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, то $(-\lambda)$ тоже является собственным значением этой задачи, и ему соответствует собственная вектор-функция $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ -y_2(x) \end{pmatrix}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эта теорема верна и при других граничных условиях, например, при граничных условиях Неймана $y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi) = 0$, при периодических граничных условиях $y_1(0) = y_1(\pi), \quad y_2(0) = y_2(\pi)$, при антипериодических граничных условиях $y_1(0) = -y_1(\pi), \quad y_2(0) = -y_2(\pi)$.

Обозначим через $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ решения уравнения (6), удовлетворяющие следующим начальным условиям $c(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $s(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что $\begin{pmatrix} c_1(x, -\lambda) \\ -c_2(x, -\lambda) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -s_1(x, -\lambda) \\ s_2(x, -\lambda) \end{pmatrix}$ также являются решениями уравнения (6). Так, как $\begin{pmatrix} c_1(0, -\lambda) \\ -c_2(0, -\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -s_1(0, -\lambda) \\ s_2(0, -\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, из теоремы единственности решения задачи Коши, получим, что

$$\begin{pmatrix} c_1(x, -\lambda) \\ -c_2(x, -\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(x, \lambda) \\ c_2(x, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -s_1(x, -\lambda) \\ s_2(x, -\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1(x, \lambda) \\ s_2(x, \lambda) \end{pmatrix},$$

в частности, $\Delta(-\lambda) = c_1(\pi, -\lambda) + s_2(\pi, -\lambda) = c_1(\pi, \lambda) + s_2(\pi, \lambda) = \Delta(\lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обозначим через $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ все собственные значения задачи (6)+(7). Так как они расположены симметрично относительно нуля, мы можем их нумеровать следующим образом $\xi_{-n} = -\xi_n, n \geq 0$. Кроме того, $\xi_0 = 0$ всегда является собственным значением и ему соответствует собственная вектор-функция $\begin{pmatrix} 0 \\ \exp\{-\int_0^x q(t)dt\} \end{pmatrix}$. Кроме, этого выполняется следующее равенство

$$\begin{aligned} \sigma_{-n} &= \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_{-n}) - c_1(\pi, \xi_{-n})\} = \text{sign}\{s_2(\pi, -\xi_n) - c_1(\pi, -\xi_n)\} = \\ &= \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\} = \sigma_n. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Если в уравнении (6), коэффициент $q(x)$ является действительной непрерывно-дифференцируемой функцией, то компоненты решения $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ этого уравнения удовлетворяют следующим уравнениям

$$\begin{aligned} -y_1'' + [q^2(x) + q'(x)]y_1 &= \lambda^2 y_1, \\ -y_2'' + [q^2(x) - q'(x)]y_2 &= \lambda^2 y_2. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\begin{pmatrix} y_{n,1}(x) \\ y_{n,2}(x) \end{pmatrix}$ является собственной вектор-функцией задачи (6)+(7), соответствующей собственному значению ξ_n , и $\xi_n \neq 0$, то $y_{n,1}(x)$ является собственной функцией следующей граничной задачи

$$\begin{aligned} -y_1'' + [q^2(x) + q'(x)]y_1 &= \mu y_1, \\ y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) &= 0, \end{aligned}$$

соответствующей собственному значению ξ_n^2 .

Покажем равномерную сходимость интеграла участвующего в уравнении (1). Для этого воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} s_1(\pi, \lambda, t)[\psi_1^+(\tau, \lambda, t)\psi_1^-(\tau, \lambda, t) - \psi_2^-(\tau, \lambda, t)\psi_2^+(\tau, \lambda, t)] = \\ = s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau), \end{aligned} \quad (8)$$

где $c(x, \lambda, t, \tau)$ и $s(x, \lambda, t, \tau)$ – решения системы Дирака с коэффициентами $p(x+\tau, t)$ и $q(x+\tau, t)$, удовлетворяющие начальным условиям $c(0, \lambda, t, \tau) = 1$, $c'(0, \lambda, t, \tau) = 0$ и $s(0, \lambda, t, \tau) = 0$, $s'(0, \lambda, t, \tau) = 1$.

Из асимптотических формул для решений $c(x, \lambda, t, \tau)$ и $s(x, \lambda, t, \tau)$ следует оценка $s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, при $\lambda \rightarrow \pm\infty$.

Эта оценка и равенство (8) обеспечивают равномерную сходимость интеграла участвующего в уравнении (1).

3. Эволюция спектральных параметров

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(q(x, t), \psi^+(x, \lambda, t), \psi^-(x, \lambda, t))$ является решением задачи (1)-(3). Тогда спектр оператора (4) не зависит от параметра t , а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n \in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(t) &= 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi) \{-2\xi_n[q^2(0, t) + q_x(0, t)] - 4\xi_n^3 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda\}, \quad n \in Z. \end{aligned} \quad (9)$$

Знаки $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \in Z, \quad (10)$$

где ξ_n^0, σ_n^0 , $n \in Z$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентами $p_0(x) = 0$ и $q_0(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если мы вместо $q(x, t)$ рассмотрим $q(x + \tau, t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ , t , а собственные

значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ , t : $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$. В этом случае, система (9) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_n}{\partial t} = & 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{-2\xi_n [q^2(\tau, t) + q_x(\tau, t)] - 4\xi_n^3 + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda\}, n \in Z. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$s_1(\pi, \lambda, t, \tau) = \pi \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{a_k}, \quad a_k = \begin{cases} k, k \neq 0 \\ 1, k = 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Учитывая формулы следов

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right) \quad (13)$$

систему (11) можно переписать в замкнутой форме.

СЛЕДСТВИЕ 3. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого, сначала найдем спектральные данные λ_n , $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$, соответствующие коэффициенту $q_0(x + \tau)$. Далее, решаем задачу Коши

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z$$

для системы уравнений Дубровина-Трубовица (11). После этого по формуле следов

$$q(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \quad (14)$$

определяем $q(x, t)$.

Покажем, что функция $q(\tau, t)$, построенная с помощью системы уравнений Дубровина-Трубовица (11) и формулы следов (14), действительно удовлетворяет уравнению мКдФ с интегральным самосогласованным источником (1). При этом мы также будем использовать систему уравнений Дубровина-Трубовица

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \cdot 2\xi_n h_n(\xi) \quad (15)$$

и формулы следов (13) и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k(\tau, t) \right) = p(\tau, t) \equiv 0. \quad (16)$$

Дифференцируя формулу следов (14) по t имеем

$$q_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial t} \right). \quad (17)$$

Из равенств (11) и (15) находим, что

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(q^2 + q_\tau) \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} + 4\xi_n^2 \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} - \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda \right\} \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau}.$$

Подставляя это выражение в равенство (17) получим, что

$$\begin{aligned}
q_t &= 2(q^2 + q_\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \tau} + \\
&+ 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \xi_m^2 \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) - \\
&- \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_m^2 - \lambda^2} d\lambda \right\} \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right). \quad (18)
\end{aligned}$$

Учитывая, равенство

$$q_\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \tau},$$

полученное дифференцированием формулы следов (14) по τ , равенство (18) перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned}
q_t &= 2q^2 q_\tau + 2q_\tau^2 + 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \xi_m^2 \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \frac{s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_m^2 - \lambda^2} \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\} d\lambda. \quad (19)
\end{aligned}$$

Используя тождество $\frac{1}{\xi_m^2 - \lambda^2} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{\xi_m - \lambda} - \frac{1}{\xi_m + \lambda} \right)$, из равенства (19) получим, что

$$\begin{aligned}
q_t &= 2q^2 q_\tau + 2q_\tau^2 + 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \xi_m^2 \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t) \frac{1}{2\lambda} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \frac{s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_m - \lambda} \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\} d\lambda - \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t) \frac{1}{2\lambda} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \frac{s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_m + \lambda} \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\} d\lambda.
\end{aligned}$$

В последнем равенстве сделаем замену $\lambda \mapsto -\lambda$. Учитывая $s_1(\pi, -\lambda, t, \tau) = -s_1(\pi, \lambda, t, \tau)$ имеем

$$\begin{aligned}
q_t &= 2q^2 q_\tau + 2q_\tau^2 + 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \xi_m^2 \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t) \frac{1}{2\lambda} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \frac{s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_m - \lambda} \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\} d\lambda - \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} \beta(-\lambda, t) \frac{1}{2\lambda} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \frac{s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_m - \lambda} \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\} d\lambda. \quad (20)
\end{aligned}$$

Пользуясь теоремой Миттаг-Лефлера выводим, что

$$s_2(\pi, \lambda, t, \tau) - c_1(\pi, \lambda, t, \tau) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sigma_n s_1(\pi, \lambda, t, \tau) h_n(\xi)}{\lambda - \xi_n}. \quad (21)$$

В силу третьего равенства леммы 1 имеем

$$2\lambda(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)) = \frac{\partial}{\partial \tau}(s_2(\pi, \lambda, t, \tau) - c_1(\pi, \lambda, t, \tau)). \quad (22)$$

Из (21) и (22) получим

$$\begin{aligned} 2\lambda(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)) &= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{s_1(\pi, \lambda, t, \tau) h_n(\xi)}{\lambda - \xi_n} \right) = \\ &= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n \left\{ h_n(\xi) \frac{\dot{s}_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\lambda - \xi_n} + \frac{s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\lambda - \xi_n} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \frac{d\xi_m}{d\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_1(\pi, \lambda, t, \tau) h_n(\xi)}{(\lambda - \xi_n)^2} \frac{d\xi_n}{d\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из формулы (12) находим, что

$$\dot{s}_1(\pi, \lambda, t, \tau) = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_m(\tau)}{d\tau} \frac{1}{a_m} \prod_{k=-\infty, k \neq m}^{\infty} \frac{\xi_k(\tau) - \lambda}{a_k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_m(\tau) - \lambda} \frac{d\xi_m(\tau)}{d\tau}.$$

Подставляя это выражение в равенство (23) получим следующее тождество

$$\begin{aligned} \lambda(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)) &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n \frac{s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\lambda - \xi_n} \left\{ \sum_{m=-\infty, m \neq n}^{\infty} \left(\frac{h_n(\xi)}{\xi_m - \lambda} + \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right) \frac{d\xi_m}{d\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{h_n(\xi)}{\xi_n - \lambda} + \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right) \frac{d\xi_n}{d\tau} - \frac{h_n(\xi)}{\xi_n - \lambda} \frac{d\xi_n}{d\tau} \right\}. \end{aligned}$$

Так как при $m \neq n$ имеем $h_n(\xi) = (\xi_n - \xi_m) \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m}$, отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} \lambda(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)) &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sigma_n s_1(\pi, \lambda, t, \tau) \left\{ \sum_{m=-\infty, m \neq n}^{\infty} \frac{1}{\xi_m - \lambda} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \frac{d\xi_m}{d\tau} + \frac{1}{\xi_n - \lambda} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_n} \frac{d\xi_n}{d\tau} \right\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sigma_n s_1(\pi, \lambda, t, \tau) \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi_m - \lambda} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \frac{d\xi_m}{d\tau} \right\}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sigma_n s_1(\pi, \lambda, t, \tau) \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi_m - \lambda} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \frac{d\xi_m}{d\tau} \right\} = \lambda(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)). \quad (24)$$

Подставляя это выражение в равенство (20), сделав замену переменных $\lambda \mapsto -\lambda$ в последнем интеграле, учитывая $s_1(\pi, -\lambda, t, \tau) = -s_1(\pi, \lambda, t, \tau)$ и $c_2(\pi, -\lambda, t, \tau) = -c_2(\pi, \lambda, t, \tau)$ имеем

$$q_t - 2q^2 q_\tau - 2q_\tau^2 = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \xi_m^2 \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t)(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau))d\lambda. \quad (25)$$

Теперь дифференцируем по τ формулу следов (13):

$$2qq_\tau + q_{\tau\tau} = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau}.$$

Если подставить сюда выражение (15), то это равенство примет вид

$$2qq_\tau + q_{\tau\tau} = -4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \cdot \xi_n^2 h_n(\xi).$$

Дифференцируя ещё раз по τ это тождество, имеем

$$\begin{aligned} & 2q_\tau^2 + 2qq_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} = \\ & = -4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 4\xi_n^2 h_n^2(\xi) + (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \cdot \xi_n^2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Сложив равенства (25) и (26) находим, что

$$\begin{aligned} & q_t - 2q^2 q_\tau + 2qq_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} = \\ & = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -4\xi_n^2 h_n^2(\xi) + (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty, m \neq n}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot (\xi_m^2 - \xi_n^2) \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\} + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t)(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau))d\lambda. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя выражение $\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} = \frac{h_n(\xi)}{\xi_n - \xi_m}$, ($m \neq n$) в равенство (27) выводим, что

$$\begin{aligned} & q_t - 2q^2 q_\tau + 2qq_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} = \\ & = -4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 4\xi_n^2 h_n^2(\xi) + (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty, m \neq n}^{\infty} h_n(\xi) \cdot (\xi_m + \xi_n) \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\} + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t)(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau))d\lambda. \end{aligned}$$

Перепишем последнее равенство в следующем виде

$$\begin{aligned} & q_t - 2q^2 q_\tau + 2qq_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} = \\ & = -4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 4\xi_n^2 h_n^2(\xi) + (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} - \xi_n \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} + \xi_n \sum_{m=-\infty, m \neq n}^{\infty} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\} + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t)(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau))d\lambda. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя формулы следов (13) и (16) выводим тождества

$$-2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = 2qq_\tau + q_{\tau\tau}, \quad (29)$$

$$\sum_{m=-\infty, m \neq n}^{\infty} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} = -\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau}. \quad (30)$$

Если учитывать формулы (29) и (30), то равенство (28) примет вид

$$\begin{aligned} & q_t - 2q^2 q_\tau + 2qq_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} = \\ & = 2(2qq_\tau + q_{\tau\tau}) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) + \\ & + 8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -2\xi_n^2 h_n^2(\xi) + (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \xi_n \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} \right\} + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t) (s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)) d\lambda. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения (14) и (15) находим, что

$$\begin{aligned} q_t - 2q^2 q_\tau + 2qq_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} &= 2q(2qq_\tau + q_{\tau\tau}) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t) (s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)) d\lambda. \end{aligned}$$

Значит, выполняется тождество

$$q_t = 6q^2 q_\tau - q_{\tau\tau\tau} + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t) (s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)) d\lambda.$$

Учитывая равенство (8), и обозначив τ через x получим (1).

Исследуем существование и единственность решения задачи Коши (9), (10) для системы Дубровина-Трубовица в случае, когда $q_0(x) \in C^6(R)$ и $\beta(\lambda, t)$ не зависит от t .

Рассмотрим систему Дубровина-Трубовица

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot g_n(\xi) \cdot f_n(\xi), n \in Z \quad (31)$$

с начальными условиями

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, n \in Z. \quad (32)$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_n(\xi) &= -\xi_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2) - 4\xi_n^3 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda) s_1(\pi, \lambda, t)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda, \\ f_n(\xi) &= \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_n - \xi_k)^2}}. \end{aligned}$$

В целях дальнейшего упрощения системы уравнений Дубровина-Трубовица (31) сделаем замену переменных

$$\xi_n = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(t), n \in Z. \quad (33)$$

Используя это, получим равенства

$$\dot{\xi}_n = (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin 2x_n \cdot \dot{x}_n,$$

$$\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} = \frac{1}{2}(\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) |\sin 2x_n|.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (31) получим равенство

$$\dot{x}_n = (-1)^n \sigma_n(t) \operatorname{sign}\{\sin x_n \cos x_n\} \cdot g_n(\xi) \cdot f_n(\xi), n \in Z. \quad (34)$$

Знак $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны при этом выражение $\sin x_n(t) \cos x_n(t)$ так же меняет знак на противоположный. Учитывая это и выбирая начальные условия в виде:

$$x_n(0) = x_n^0 = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_n^0 - \lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}}}, n \in Z, \quad (35)$$

получим равенство $\sigma_n(t) \operatorname{sign}\{\sin x_n(t) \cos x_n(t)\} = \sigma_n(0)$. Поэтому уравнение (34) примет следующий вид:

$$\dot{x}_n = (-1)^n \sigma_n(0) \cdot g_n(\xi) \cdot f_n(\xi), n \in Z.$$

Если подставить в правую часть этой системы выражения (33), то замена переменных полностью выполняется:

$$\begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= H_n(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \quad n \in Z, \\ H_n(x) &= (-1)^n \sigma_n(0) \cdot g_n(\xi) \cdot f_n(\xi). \end{aligned} \quad (36)$$

В этом случае, для изучения задачи Коши (36), (35) введем банахово пространство:

$$K = \left\{ x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) : \|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|n|+1)^5} |x_n| < \infty \right\},$$

и обозначим $H = (\dots, H_{-1}, H_0, H_1, \dots)$. Напишем систему уравнений Дубровина-Трубовица (36) в виде одного уравнения в банаховом пространстве K :

$$\frac{dx}{dt} = H(x). \quad (37)$$

Начальные условия можно переписать в виде

$$x(t) \big|_{t=0} = x^0, x^0 \in K. \quad (38)$$

Известно, что ([31], стр. 181) для того чтобы задача Коши $y' = F(y)$, $y(0) = y^0$ в банаховом пространстве K имела единственное решение достаточно выполнение условия Липшица для функции $F(y)$, т.е.

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \operatorname{const} \|x - y\|, \forall x, y \in K.$$

Поэтому докажем, что функция $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве K .

Из условия $q_0(x) \in C^6(R)$ следует, что $q_0^2(x) + q_0'(x) \in C^5(R)$, в силу следствия 1 теоремы 2 и асимптотики (см. [32], стр.75) собственных значений оператора Штурма-Лиувилля получим следующие асимптотики

$$\lambda_{2n-1} = n + \sum_{p=1}^5 \frac{c_p}{n^p} + \frac{\varepsilon_n^-}{n^6}, \lambda_{2n} = n + \sum_{p=1}^5 \frac{c_p}{n^p} + \frac{\varepsilon_n^+}{n^6}, \quad (39)$$

где c_p , $p = 1, 2, 3, 4, 5$ постоянные числа и $\{\varepsilon_n^\pm\} \in l_2$. Отсюда, учитывая $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, получим, что $\inf_{k \neq n} |\xi_n - \xi_k| \geq a > 0$.

Теперь, пользуясь этим неравенством, оценим функции $|f_n(\xi)|$ и $\left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right|$.

ЛЕММА 2. *Справедлива оценка*

$$C_1 \leq |f_n(\xi)| \leq C_2, n \in Z,$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ не зависят от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую последовательность

$$f_n^2 = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2} = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right) \left(1 + \frac{\lambda_{2k} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right)$$

и оценим её сверху:

$$\begin{aligned} f_n^2 &= \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \left|1 + \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right| \left|1 + \frac{\lambda_{2k} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right| \leq \\ &\leq \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \left(1 + \left|\frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right|\right) \left(1 + \left|\frac{\lambda_{2k} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right|\right) \leq \\ &\leq \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a}\right)^2 \leq \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a}\right)^2 = C_2^2, \end{aligned} \quad (40)$$

где константа $C_2 > 0$ не зависит от n .

Теперь оценим $|f_n(\xi)|$ снизу. Для этого введём множество индексов

$$M = \left\{k \in Z : \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a} \geq 1\right\}.$$

Это множество имеет конечное число элементов. Рассмотрим бесконечные произведения

$$A_n = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \quad \text{и} \quad B_n = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}.$$

Ясно, что $f_n^2 = A_n \cdot B_n$. Перепишем A_n в следующем виде $A_n = A_{n,1} \cdot A_{n,2} \cdot A_{n,3}$. Здесь

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= \prod_{\substack{k=-\infty, k \neq n \\ k \notin M}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}, A_{n,2} = \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \in M}}^{n-1} \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}, A_{n,3} = \\ &= \prod_{\substack{k=n+1, \\ k \in M}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}. \end{aligned}$$

Если $k \neq n$ и $k \notin M$, то имеем

$$1 - \left| \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n} \right| \geq 1 - \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a} > 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |A_{n,1}| &= \prod_{\substack{k=-\infty, k \neq n \\ k \notin M}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \right| = \prod_{\substack{k=-\infty, k \neq n \\ k \notin M}}^{\infty} \left| 1 + \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n} \right| \geq \\ &\geq \prod_{\substack{k=-\infty, k \neq n \\ k \notin M}}^{\infty} \left(1 - \left| \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n} \right| \right) \geq \\ &\geq \prod_{\substack{k=-\infty, k \neq n \\ k \notin M}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a} \right) > \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \notin M}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a} \right) = C'_1. \end{aligned}$$

Если $k \leq n-1$ и $k \in M$, то

$$\begin{aligned} |A_{n,2}| &= \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \in M}}^{n-1} \left| \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \right| = \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \in M}}^{n-1} \frac{\xi_n - \lambda_{2k-1}}{\xi_n - \xi_k} = \\ &= \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \in M}}^{n-1} \left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_n - \xi_k} \right) > 1. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $k \geq n+1$ и $k \in M$. Введём обозначение $\Delta = \max_{k \in Z} (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1})$, и рассмотрим два случая.

1-случай. Пусть $k \geq n+1$, $k \in M$, $|\xi_k - \xi_n| \leq 2\Delta$. Тогда

$$\prod_{\substack{k=n+1, \\ k \in M^*}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \right| > \prod_{\substack{k=n+1, \\ k \in M^*}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \lambda'_{2k-1}}{2\Delta} \geq \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \in M}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \lambda'_{2k-1}}{2\Delta}.$$

Здесь $M^* = \{k \in M : |\xi_k - \xi_n| < 2\Delta\}$, число λ'_{2k-1} выбирается из условий

$$\max\{\lambda_{2k-2}, \lambda_{2k-1} - 2\Delta\} < \lambda'_{2k-1} < \lambda_{2k-1}.$$

2-случай. Пусть $k \geq n+1$, $k \in M$, $|\xi_k - \xi_n| > 2\Delta$. Тогда из-за того, что

$$\begin{aligned} \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_k - \xi_n} &< \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{2\Delta} < \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{2\Delta} < \frac{1}{2}, \\ -\frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_k - \xi_n} &> -\frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_k - \xi_n} > \frac{1}{2}, \quad \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

получим оценку

$$\prod_{\substack{k=n+1, \\ k \in M^{**}}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \right| > \prod_{\substack{k=n+1, \\ k \in M^{**}}}^{\infty} \frac{1}{2} > \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \in M}}^{\infty} \frac{1}{2},$$

где $M^{**} = \{k \in M : |\xi_k - \xi_n| > 2\Delta\}$.

Значит,

$$|A_{n,3}| = \prod_{\substack{k=n+1, \\ k \in M}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \right| > \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \in M}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \lambda'_{2k-1}}{4\Delta} = C''_1.$$

Используя полученные неравенства, выводим оценку

$$|A_n| = |A_{n,1}| \cdot |A_{n,2}| \cdot |A_{n,3}| > C'_1 C''_1 = C_{1,1}. \quad (41)$$

Аналогичным образом, выводится следующая оценка:

$$|B_n| > C_{1,2}. \quad (42)$$

Умножая оценки (41) и (42), извлекая квадратный корень, получим неравенство $C_1 \leq |f_n(\xi)|$. Здесь $C_1 = \sqrt{C_{1,1} \cdot C_{1,2}} > 0$. \square

ЛЕММА 3. *Справедлива оценка*

$$\left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \leq C_3, \quad (43)$$

где константа $C_3 > 0$ не зависит от n и от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m \neq n$, то

$$\frac{\partial f_n}{\partial \xi_m} = \frac{f_n}{\xi_n - \xi_m}.$$

Отсюда, в случае $m \neq n$ получим оценку:

$$\left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| = \frac{|f_n(\xi)|}{|\xi_n - \xi_m|} \leq \frac{C_2}{a}. \quad (44)$$

Теперь оценим функцию $\left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right|$. Используем равенство $f_n^2 = A_n \cdot B_n$, где

$$A_n = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\xi_n - \lambda_{2k-1}}{\xi_n - \xi_k} \quad \text{и} \quad B_n = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\xi_n - \lambda_{2k}}{\xi_n - \xi_k}.$$

Дифференцируя тождество

$$\ln A_n = \ln \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_n - \xi_k} \right) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_n - \xi_k} \right),$$

получим равенство

$$\frac{\partial A_n}{\partial \xi_n} = A_n \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{(\xi_n - \lambda_{2k-1})(\xi_n - \xi_k)}.$$

Из этого равенства, учитывая неравенство $|A_n| \leq C_2$, выводим оценку:

$$\left| \frac{\partial A_n}{\partial \xi_n} \right| \leq |A_n| \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{|\lambda_{2k-1} - \xi_k|}{|\xi_n - \lambda_{2k-1}| |\xi_n - \xi_k|} \leq C_2 \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a^2} \leq \tilde{C}_1.$$

Аналогичным образом, используя неравенство $|B_n| \leq C_2$, получим

$$\left| \frac{\partial B_n}{\partial \xi_n} \right| \leq \tilde{C}_1.$$

Из полученных неравенств следует оценка

$$\left| \frac{\partial f_n^2}{\partial \xi_n} \right| \leq \left| \frac{\partial A_n}{\partial \xi_n} \right| |B_n| + \left| \frac{\partial B_n}{\partial \xi_n} \right| |A_n| \leq \tilde{C}_2.$$

Отсюда получим

$$|f_n(\xi)| \left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right| \leq \tilde{C}_3.$$

Используя оценку $C_1 \leq |f_n(\xi)|$ из леммы 2, выводим неравенства

$$C_1 \cdot \left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right| \leq |f_n(\xi)| \left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right| \leq \tilde{C}_3,$$

т.е.

$$\left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right| \leq \frac{\tilde{C}_3}{C_1}. \quad (45)$$

Наконец, из оценок (44) и (45) выводим (43). \square

ЛЕММА 4. *Имеет место оценка*

$$|g_n(\xi)| \leq C_4 |n|^3, \quad (46)$$

где константа $C_4 > 0$ не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя асимптотики (39) и условие $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$, нетрудно получить следующие оценки

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2) \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(\lambda_{2k}^2 - \xi_k^2) - (\xi_k^2 - \lambda_{2k-1}^2)] \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(\lambda_{2k}^2 - \xi_k^2) + (\xi_k^2 - \lambda_{2k-1}^2)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1})(\lambda_{2k} + \lambda_{2k-1}) \sim \\ & \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(\varepsilon_n^+ - \varepsilon_n^-)}{n^2} < \tilde{C}_3, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda) s_1(\pi, \lambda, t)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (48)$$

$$\xi_n = n + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \frac{\gamma_n}{n^3}, \{\gamma_n\} \in l_2. \quad (49)$$

Отсюда выводим оценку (46). \square

ЛЕММА 5. *Имеет место оценка*

$$\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \leq C_5 |m| |n|, \quad (50)$$

где константа $C_5 > 0$ не зависит от n и от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m \neq n$, то

$$\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} = 4\xi_n \xi_m,$$

поэтому используя асимптотику (48), получим, что

$$\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \leq C'_5 |m| |n|, \quad (51)$$

где константа $C'_5 > 0$ не зависит от n и от m .

Теперь оценим функцию $\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right|$. Легко видеть, что

$$\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_n} = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2) - 8\xi_n^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n^2 + \lambda^2}{(\xi_n^2 - \lambda^2)^2} \beta(\lambda) s_1(\pi, \lambda, t) d\lambda.$$

Используя асимптотику (49), имеем

$$\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right| \leq C''_5 |n|^2, \quad (52)$$

где константа $C''_5 > 0$ не зависит от n .

Из оценок (51) и (52) выводим (50). \square

Используя доказанные выше леммы, оценим производную функции $F_n(\xi) = g_n(\xi) f_n(\xi)$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| &\leq \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} f_n(\xi) + \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m} g_n(\xi) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| |f_n(\xi)| + \left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| |g_n(\xi)| \leq \\ &\leq C_2 C_5 |m| |n| + C_3 C_4 |n|^3 \leq C_6 (|m| + 1) |n|^3, \end{aligned}$$

где постоянная $C_6 > 0$ не зависит от n и m .

ЛЕММА 6. *Вектор-функция $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве K , т.е. существует константа $L = \text{const} > 0$, такая, что для произвольных элементов $x, y \in K$ выполняется следующее неравенство*

$$\|H(x) - H(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя выражение $H_n(x) = (-1)^n \sigma_n(0) F_n(\xi)$, получим равенство $|H_n(x) - H_n(y)| = |F_n(\xi) - F_n(\eta)|$. Теперь применим теорему Лагранжа о конечном приращении к функции $\varphi(t) = F_n(\xi + t(\eta - \xi))$ на отрезке $t \in [0, 1]$. Тогда получим равенство $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$, т.е.

$$F_n(\xi) - F_n(\eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial \xi_m} \cdot (\xi_m - \eta_m),$$

где $\theta = \xi + t^*(\eta - \xi)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |H_n(x) - H_n(y)| &= |F_n(\xi) - F_n(\eta)| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial \xi_m} \right| |\xi_m - \eta_m| \leq \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_6 (|m| + 1) |n|^3 |\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}| |\sin^2 x_m - \sin^2 y_m| \leq \\ &\leq C_6 |n|^3 \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (|m| + 1) |\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}| \cdot |x_m - y_m| \leq \\ &\leq C_6 |n|^3 \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (|m| + 1) \cdot \frac{C'_6}{(|m| + 1)^6} |x_m - y_m| = \\ &= C_6 C'_6 |n|^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|m| + 1)^5} |x_m - y_m| = C_7 |n|^3 \|x - y\|. \end{aligned}$$

Здесь использованы асимптотики (39) и равенства

$$\xi_k = \lambda_{2k-1} + (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}) \sin^2 x_k \quad \text{и} \quad \eta_k = \lambda_{2k-1} + (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}) \sin^2 y_k.$$

Теперь оценим норму $\|H(x) - H(y)\|$:

$$\begin{aligned} \|H(x) - H(y)\| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|n| + 1)^5} |H_n(x) - H_n(y)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|n| + 1)^5} C_7 |n|^3 \|x - y\| = \\ &= \left\{ C_7 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|^3}{(|n| + 1)^5} \right\} \|x - y\| = L \|x - y\|, \end{aligned}$$

где $L = C_7 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|^3}{(|n| + 1)^5}$, т.е. условие Липшица выполняется.

Значит, решение задачи Коши (37)+(38), следовательно, и задачи Коши (31)+(32), для всех $t > 0$ существует и единственно. \square

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 32, P. 1681.
2. Итс А. Р. Точное интегрирование в римановых - функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега - де Фриза // Дисс. канд. физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ. 1977.

3. Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза // Теорет. мат. физ.. 1975. Т. 23, № 1. С. 51–68.
4. Смирнов А. О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза // Мат. сб.. 1994. Т. 185, № 8. С. 103–114.
5. Mel'nikov V. K. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source // Phys. Lett. A. 1988. V. 128. P. 488–492.
6. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // J.Phys. A: Math. Gen. - Bristol (UK). 1990. V. 23. P. 1385–1403.
7. Матёкубов М. М. Интегрирование уравнения типа Кортевега–де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций // Изв. ИМИ УдГУ. 2024. Т. 64. С. 60–69. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-64-05>
8. Khasanov M. M. Modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2781, Issue 1. P. 020009,1-020009,5. <https://doi.org/10.1063/5.0145265>.
9. Уразбоев Г. У., Балтаева И. И., Рахимов И. Д. Обобщённый метод (G'/G) - расширения для нагруженного уравнения Кортевега – де Фриза // Сиб. журн. индустр. матем.. 2021. Т. 24, №. 4. P. 139–147. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.410>.
10. Baltaeva I. I., Rakhimov I. D., Khasanov M. M. Exact Traveling Wave Solutions of the Loaded Modified Korteweg-de Vries Equation // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 85–95. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.85>.
11. Urazboev G. U., Khasanov M. M., Rakhimov I. D. Generalized (G'/G) - Expansion Method and Its Applications to the Loaded Burgers Equation // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2023. Vol. 13, No 2. P. 248–257. <https://doi.org/10.59849/2218-6816.2023.2.248>
12. Xasanov M. M., Ganjaev O. Y. A Generalized Direct Methods for the Loaded Nonlinear Degasperis-Procesi Equation // AIP Conference Proceedings, (International Scientific and Practical Conference on Actual Problems of Mathematical Modeling and Information Technology). 2024. Vol. 3147, Issue 1. P. 030006,1-020006,6. <https://doi.org/10.1063/5.0210105>.
13. Уразбоев Г. У., Балтаева И. И., Исмоилов О. Б. Интегрирование уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка методом обратной задачи рассеяния // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 523–533. <https://doi.10.35634/vm230309>
14. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М. Интегрирование уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 228–239. <https://doi.org/10.35634/vm220205>
15. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Балтаева И. И. Интегрирование уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка с источником специального вида // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 44. С. 31–43. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.31>

16. Хасанов М. М., Рахимов И. Д. Интегрирование уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 2. С. 266–275. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275>.
17. Уразбоев Г. У., Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка в классе периодических функций // Теорет. и матем. физика. 2023. Т. 217, №. 2. С. 317–328. <https://doi.org/10.4213/tmf10580>
18. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с нагруженным членом в классе периодических функций // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 12. С. 1703–1712. <https://doi.org/10.31857/S0374064124120094>
19. Хасанов М. М., Рахимов И. Д., Азимов Д. Б. Интегрирование нагруженного нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических функций // Вестник Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2024. Т. 50. С. 51–65. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51>
20. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с интегральным источником // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2024. Т. 63. С. 80–90. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-63-06>
21. Urazboev G. U., Xasanov M. M., Ganjaev O. Y. Integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions // International Journal of Applied Mathematics. 2024. Vol. 37. P. 37–46. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.4>
22. Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Atanazarova Sh. E. Soliton Solutions of the Negative Order Modified Korteweg – de Vries Equation // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 63– 77. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.63>.
23. Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Babadjanova A. K. Soliton solutions of the negative-order nonlinear Schrödinger equation // Theor Math Phys. 2024. Vol. 219. P. 761–769. <https://doi.org/10.1134/S0040577924050052>
24. Уразбоев Г. У., Балтаева И. И., Исмоилов О. Б. Теория рассеяния для нагруженного уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка // Чебышевский сборник. 2024. Vol. 25. PP. 169–180. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-2-169-180>.
25. Urazboev G. U., Khasanov M. M., Babadjanova A. K. Integration of the Negative Order Nonlinear Schrödinger Equation in the Class of Periodic Functions // Lobachevskii J Math. 2024. Vol. 45. P. 5305–5312. <https://doi.org/10.1134/S1995080224606106>.
26. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
27. Мисюра Т. В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I. // Теория функций, функц. анализ и их прил. 1978. Т. 30. С. 90–101.
28. Хасанов А. Б., Ибрагимов А. М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // Узб. мат. журнал. 2001. Т. 3. С. 48–55.
29. Djakov P. V., Mityagin V. S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators // Russian Math. Surveys. 2006. Vol. 61(4). P. 663–766.

30. Currie S., Roth T., Watson B. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // Proceedings of the Edinburgh mathematical society. 2017. V. 60. P. 615–633.
31. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма - Лиувилля. - М.: Наука, 1984. 240 с.
32. Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. - Киев: Наукова думка, 1977. - 332 с.

REFERENCES

1. Wadati, M. 1972, "The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation", *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 32, pp. 1681.
2. Its, A.R. 1977, "Exact integration in Riemannian functions of the nonlinear Schrödinger equation and the modified Korteweg-de Vries equation, *Diss. Cand. of Phys. and Mathematics, L.: LSU*. (in Russian).
3. Smirnov, A.O. 1994, "Elliptic solutions of the nonlinear Schrödinger equation and the modified Korteweg-de Vries equation", *Mat. sb.*, vol. 185, pp. 103–114. (in Russian)
4. Mel'nikov, V.K. 1988, "Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source", *Phys. Lett. A*, vol. 128, pp. 488-492.
5. Leon, J. & Latifi, A. 1990, "Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves", *J.Phys. A: Math. Gen. - Bristol (UK)*, vol. 23. pp. 1385–1403.
6. Its, A.R. & Matveev, V.B. 1975, "Finite-gap Schrödinger operators and N-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation", *Teoret. mat. Phys.*, vol. 23, no. 1, pp. 51–68.
7. Matyoqubov, M.M. 2024, "Integration of the Korteweg–de Vries type equations with a loaded term in the class of periodic functions", *Izv. IMI UdGU*, vol. 64, pp. 60–69. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-64-05>
8. Khasanov, M.M. 2023, "Modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source", *AIP Conference Proceedings*, vol. 2781, Issue 1, pp. 020009,1-020009,5. <https://doi.org/10.1063/5.0145265>.
9. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Rakhimov, I.D. 2021, "A generalized (G'/G) - expansion method for the loaded Korteweg–de Vries equation", *Sib. Zh. Ind. Mat.*, vol. 24:4, pp. 139–147, <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.410>.
10. Baltaeva, I.I., Rakhimov, I.D. & Khasanov, M.M. 2022, "Exact Traveling Wave Solutions of the Loaded Modified Korteweg-de Vries Equation", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 41, pp. 85–95. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.85>.
11. Urazboev, G.U., Khasanov, M.M. & Rakhimov, I.D. 2023, "Generalized (G'/G) - Expansion Method and Its Applications to the Loaded Burgers Equation", *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 13, No 2, pp. 248–257. <https://doi.org/10.59849/2218-6816.2023.2.248>
12. Xasanov, M.M. & Ganjaev, O.Y. 2024, "A Generalized Direct Methods for the Loaded Nonlinear Degasperis-Procesi Equation", *AIP Conference Proceedings, (International Scientific and Practical Conference on Actual Problems of Mathematical Modeling and Information Technology*, vol. 3147, Issue 1, pp. 030006,1-020006, 6. <https://doi.org/10.1063/5.0210105>.

13. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Ismoilov, O.B. 2023, “Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, vol. 33:3, pp. 523–533. <https://doi.org/10.35634/vm230309>
14. Urazboev, G.U. & Hasanov, M.M. 2022, “Integration of the negative order Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, vol. 32:2, pp. 228–239. <https://doi.org/10.35634/vm220205>
15. Urazboev, G.U., Khasanov, M.M. & Baltaeva, I.I. 2023, “Integration of the Negative Order Korteweg-de Vries Equation with a Special Source”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 44, pp. 31–43. (in Russian). <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.31>
16. Khasanov, M.M. & Rakhimov, I.D. 2023, “Integration of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, pp. 266–275. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275>
17. Urazboev, G.U., Yakhshimuratov, A.B. & Khasanov, M.M. 2023, “Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation in a class of periodic functions”, *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 217:2, pp. 317–328. <https://doi.org/10.4213/tmf10580>
18. Urazboev, G.U., Khasanov, M.M. & Ismoilov, O.B. 2024, “Integration of the negative order modified Korteweg–de Vries equation with a loaded term in the class of periodic functions”, *Differencial'nye uravneniya*, vol. 60, pp. 1703–1712. doi:10.1134/S1234567823601468
19. Khasanov, M.M., Rakhimov, I.D. & Azimov, D.B. 2024, “Integration of the Loaded Negative Order Nonlinear Schrödinger Equation in the Class of Periodic Functions”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 50, pp. 51–65. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51>
20. Urazboev, G.U., Khasanov, M.M. & Ismoilov, O.B. 2024, “Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation with an integral source”, *Izv. IMI UdGU*, vol. 63, pp. 80–90. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-63-06>
21. Urazboev, G.U., Xasanov, M.M. & Ganjaev, O.Y. 2024, “Integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions”, *International Journal of Applied Mathematics*, vol. 37, no. 1, pp. 37–46. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.4>
22. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Atanazarova, Sh.E. 2024, “Soliton Solutions of the Negative Order Modified Korteweg – de Vries Equation”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 47, pp. 63–77. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.63>
23. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Babadjanova, A.K. 2024, “Soliton solutions of the negative-order nonlinear Schrödinger equation”, *Theor. Math. Phys.*, vol. 219, pp. 761–769. <https://doi.org/10.1134/S0040577924050052>
24. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Ismoilov, O.B. 2024, “Scattering theory for the loaded negative order Korteweg–de Vries equation”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25:2, pp. 169–180. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-2-169-180>
25. Urazboev, G.U., Khasanov, M.M. & Babadjanova, A.K. 2024, “Integration of the Negative Order Nonlinear Schrödinger Equation in the Class of Periodic Functions”, *Lobachevskii J Math*, vol. 45, pp. 5305–5312. <https://doi.org/10.1134/S1995080224606106>

26. Levitan, B.M. & Sargsyan, I.S. 1988, “Sturm-Liouville and Dirac operators“, *M.: Nauka*. (in Russian)
27. Misjura, T.V. 1978, “Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications (V. A. Marchenko, ed.)”, *Publishing House of Kharkiv State University named after A. M. Gorky, Kharkiv*, pp. 90–101.
28. Khasanov, A.B. & Ibragimov, A.M. 2001, “On the inverse problem for the Dirac operator with periodic potential”, *Uzbek Mat. J.*, pp. 48–55. (in Russian)
29. Djakov, P.B. & Mityagin, B.S. 2006, “Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators”, *Russian Math. Surveys*, vol. 61:4, pp. 663–766.
30. Currie, S., Roth, T. & Watson, B. 2017, “Borg’s periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials”, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 60, pp. 615–633.
31. Levitan, B.M. 1984. “Inverse Sturm-Liouville problems”, *M.: Nauka*, p. 240 (in Russian)
32. Marchenko, V.A. 1977, “Sturm-Liouville operators and their applications”, *Kiev: Naukova Dumka*, p. 332. (in Russian)

Получено: 24.07.2025

Принято в печать: 12.02.2026