ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 514.172.45 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-97-110

# О свободных углах $RR$-многогранников

В. И. Субботин

**Субботин Владимир Иванович** — кандидат физико-математических наук, Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И.Платова; Донской государственный аграрный университет (г. Новочеркасск).
*e-mail: geometry@mail.ru*

**Аннотация**

В статье выведены формулы для свободных углов различного порядка $RR$-многогранников и приложения найденных соотношений к доказательству полноты списка несоставных $RR$-многогранников второго типа с остроугольными ромбическими вершинами. Свободные углы первого порядка — это плоские углы, вершины которых принадлежат ромбическим звёздам $RR$-многогранников. Стороны каждого свободного угла первого порядка являются двумя сторонами смежных ромбов ромбической звезды. Ранее автором была найдена связь острых углов ромбов ромбической вершины со свободными углами первого порядка. Здесь будут установлены связи плоских углов между двумя сторонами правильных многоугольников, подклеенных в свободные углы первого порядка, с острыми углами ромбов. Углы между сторонами правильных граней названы в работе свободными углами второго порядка. Аналогично стороны соседних правильных многоугольников, подклеенных в свободные углы второго порядка, образуют угол, названный свободным углом третьего порядка. Рассмотрены все возможные случаи подклеивания одного или двух одинаковых правильных многоугольников в свободные углы, что позволяет установить полноту списка несоставных $RR$-многогранников с остроугольными ромбическими вершинами и правильными гранями различного типа.

*Ключевые слова:* свободный угол, ромбические вершины, $RR$-многогранник, звезда ромбической вершины

*Библиография:* 28 названий.

**Для цитирования:**
Субботин В. И. О свободных углах $RR$-многогранников // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 97–110.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 514.172.45 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-97-110

# On free angles of $RR$-polyhedra

V. I. Subbotin

**Subbotin Vladimir Ivanovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Platov South Russian State polytechnic university (NPI); Don State Agrarian University (Novocherkassk).
*e-mail: geometry@mail.ru*

**Abstract**

This article derives formulas for free angles of various orders of RR-polytopes and applies the resulting relations to prove the completeness of the list of non-composite RR-polytopes of the second type with acute-angled rhombic vertices. Free angles of the first order are flat angles whose vertices belong to the rhombic stars of the RR-polytopes. The sides of each free angle of the first order are two sides of adjacent rhombi of the rhombic star. Previously, the author found a relationship between the acute angles of the rhombic vertex rhombi and free angles of the first order. Here, we will establish relationships between the flat angles between two sides of regular polygons glued into free angles of the first order and the acute angles of the rhombi. The angles between the sides of regular faces are called free angles of the second order in this article. Similarly, the sides of adjacent regular polygons glued into free angles of the second order form an angle called a free angle of the third order. All possible cases of gluing one or two identical regular polygons into free angles are considered, which makes it possible to establish the completeness of the list of non-composite $RR$-polyhedra with acute-angled rhombic vertices and regular faces of various types.

*Keywords:* free angle, rhombic vertices, $RR$-polyhedron, rhombic vertex star

*Bibliography:* 28 titles.

**For citation:**
Subbotin, V. I. 2026, “On free angles of $RR$-polyhedra”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 97–110.

## 1. Введение

Задача доказательства полноты списка многогранников с условиями правильности граней является важной проблемой современной геометрии, [1]–[9]. Наряду с перечисленными работами отметим статью [10], в которой затронуты близкие вопросы к правильногранным многогранникам, имеющие практическое применение.

После доказательства в работе [12] полноты списка выпуклых правильногранных многогранников в $E^3$, первоначально описанных в [11], встал вопрос о перечислении многогранников, у которых могут быть условные рёбра. Условным ребром при этом был названа диагональ грани многогранника, разбивающая эту грань на два правильных многоугольника. Полный список таких правильногранных многогранников с условными рёбрами приведён в [13], а в [14] приводится список основных работ, относящихся к такому обобщению правильногранности.

Настоящая работа относится к задаче перечисления выпуклых $RR$-многогранников в $E^3$ — таких правильногранных многогранников, у которых имеются ромбические вершины. Вершина $V$ многогранника названа $N$-ромбической, если её гранная звезда составлена из $N$ равных ромбов, сходящихся в в $V$ своими острыми или тупыми углами. Если — острыми, то вершина называется остроугольной, если тупыми — тупоугольной. Предполагается, что вершина $V$ расположена на оси вращения порядка $N$ её гранной, то есть ромбической, звезды. Таким образом, рассматриваются такие $RR$-многогранники, у которых ромбические звёзды симметричны. В дальнейшем будет предполагаться, что ромбические звёзды изолированы, то есть не имеют общих рёбер, но могут иметь общие вершины. Первоначально автором в [15] было доказано существование двух $RR$-многогранников, которые имеют по две ромбических вершины. Полный список всех двадцати четырёх $RR$-многогранников первого типа, то есть таких $RR$-многогранников, у которых все правильные грани одного типа, был завершён в [16].

После полного перечисления [16] всех составных $RR$-многогранников без условных рёбер, включая и $RR$-многогранники второго типа, то есть такие, у которых правильные грани различного типа, возникает вопрос о перечислении несоставных таких многогранников. При этом составным был назван такой $RR$-многогранник, который плоскостями, проходящими через его рёбра, может быть разбит на ромбические пирамиды и правильногранные части. Это определение отличается от определения, данного в [12], так как $RR$-многогранник имеет неправильные (ромбические) грани.

В настоящей работе перечисляются все несоставные остроугольные $RR$-многогранники *с правильными свободными углами.*

Определение 1. *Свободным углом $\beta$ первого порядка, или просто — свободным углом $RR$-многогранника называется плоский угол, вершиной которого является вершина, общая для двух тупых углов двух соседних ромбов $R_1$ и $R_2$ ромбической звезды, а стороны угла $\beta$ являются сторонами $R_1$ и $R_2$.*

После того, как в свободные углы подклеены правильные многоугольники, можно дать следующее определение.

Определение 2. *Свободным углом второго порядка называется плоский угол $x$, вершина которого совпадает с вершиной $S$ острого угла ромба ромбической вершины и с вершинами двух соседних правильных многоугольников $M_1$ и $M_2$, помещённых в свободные углы $\beta$, а стороны угла $x$ являются сторонами многоугольников $M_1$ и $M_2$, сходящихся в вершине $S$.*

Определение 3. *Поместим, если возможно, в свободные углы $x$ правильные многоугольники и пусть два соседних из них будут $P_1$ и $P_2$. Если стороны $P_1$ и $P_2$ образуют угол в их общей вершине, то этот угол, $y$, называется свободным углом третьего порядка.*

Определение 4. *Свободный угол (любого порядка) называется правильным, если в него вставлен либо один правильный многоугольник, либо несколько одинаковых.*

## 2. Вспомогательные утверждения

В следующих вспомогательных утверждениях, представляющих и самостоятельный интерес, доказаны соотношения, которые будут использованы для доказательства основной теоремы статьи о перечислении несоставных $RR$-многогранников второго типа с остроугольными ромбическими вершинами и с правильными свободными углами. Так как речь идёт о несоставных $RR$-многогранниках, а все составные $RR$-многогранники перечислены, то случай, когда в свободные углы подклеивается по одному правильному треугольнику, не рассматривается.

Лемма 1. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) ромбической звезды с величиной новых свободных углов (второго порядка) при условии, что в углы первого порядка вставлены правильные многоугольники.*

Доказательство. Получим выражение, позволяющее находить величину новых свободных углов после того, как в свободные углы между ромбами подклеены правильные многоугольники, отличные от треугольников.

Острые углы ромбов $n$-ромбической звезды обозначим $\alpha$, свободные углы ромбической звезды обозначим $\beta$. Равные двугранные углы при рёбрах, общих для ромбов и правильных многоугольных граней с внутренними углами $\beta$, обозначим $\widehat{\gamma}$. Обозначим $\gamma$ равные плоские углы $MSB$ и $LSC$, а также эквивалентные им, Рис. 1.

Для трёхгранного угла $SMLB$ имеем:

$$\cos\gamma = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}. \qquad (1)$$

С другой стороны, для трёхгранного угла $LVSP$ имеем:

$$-\cos\alpha = -\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем, что

$$\cos\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha. \tag{3}$$

Пусть $x$ — плоский угол $BSC$. Для трёхгранного угла $SBMC$, в котором двугранный угол с ребром $MS$ обозначим $\widehat{\delta}$, имеем:

$$\cos x = \cos\gamma\cos\beta + \sin\gamma\sin\beta\cos\widehat{\delta}. \tag{4}$$

Так как $\widehat{\delta} = \widehat{\gamma} - \hat{\delta_1}$, где $\widehat{\delta_1}$ двугранный угол с ребром $MS$ в трёхгранном угле $SBLM$, то, учитывая равенство

$$\cos\beta = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\widehat{\delta_1} \tag{5}$$

и равенства (1) и (5), для угла $SBLM$ , получим:

$$\widehat{\delta} = \arccos\left(\frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta\sin\alpha}\right) - \arccos\left(\frac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}\right). \tag{6}$$

Учитывая (3) и (6), равенство (4) принимает вид:)

$$\cos x = (2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha)\cos\beta + \sqrt{1 - (2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha)^2}\sin\beta\cos\widehat{\delta}, \tag{7}$$

где

$$\widehat{\delta} = \arccos\left(\frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta\sin\alpha}\right) - \arccos\left(\frac{\cos\beta - (2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha)\cos\alpha}{(\sqrt{1 - (2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha)^2})\sin\alpha}\right). \tag{8}$$

Уравнения (7)–(8) позволяют определить угол $x$, если известен свободный угол $\beta$ и степень $n$ ромбической вершины.

Действительно, если известен угол $\beta$ и $n$, то из формулы

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\pi(n-2)}{2n}} \tag{9}$$

легко найти угол $\alpha$. Подставляя затем углы $\alpha$ и $\beta$ в (7) и (8), можно найти угол $x$.

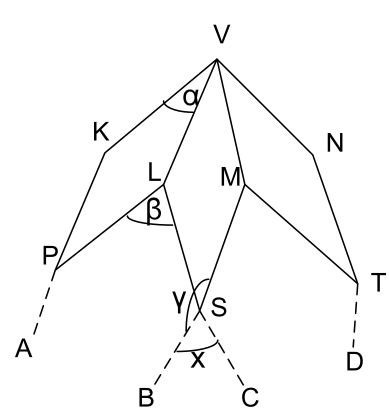


Рис. 1: К доказательству лемм 1 и 2

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) ромбической звезды с величиной новых свободных углов (второго порядка) при условии, что в углы первого порядка вставлены ромбы.*

Доказательство. Пусть теперь в свободный угол подклеен ромб тупым углом $\beta$. В этом случае $\gamma = \pi - \alpha$. Действительно, так как $SB \parallel LP$, то плоские углы равны: $PLV = MSB$, Рис. 1. Равенство (1) принимает вид:

$$-\cos\alpha = -\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}. \tag{10}$$

Отсюда получим:

$$\cos\widehat{\gamma} = \frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}. \tag{11}$$

Равенство (5) принимает вид:

$$-\cos\beta = -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\widehat{\delta_1}, \tag{12}$$

откуда:

$$\cos\widehat{\delta_1} = \frac{-\cos\beta + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}. \tag{13}$$

В случае ромбов равенство (4) принимает вид:

$$\cos x = -\cos\beta(-\cos\alpha) + \sin\alpha\sin\beta\cos\widehat{\delta}. \tag{14}$$

Учитывая (11) и (13), а также равенство $\widehat{\delta} = \widehat{\gamma} - \widehat{\delta_1}$, из (14) находим искомый плоский угол $x$:

$$x = \arccos(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\widehat{\delta}), \tag{15}$$

где

$$\widehat{\delta} = \arccos\left(\frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right) - \arccos\left(\frac{-\cos\beta + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right). \tag{16}$$

При заданном $\beta$ и фиксированном $n$ из (9) найдём $\alpha$. Подставляя найденное $\alpha$ в (15) и (16), найдём угол $x$ как функцию угла $\beta$.

При $n = 5$ и при свободном угле $\beta = \dfrac{2}{3}\pi$ уравнения (15) и (16) дают угол между двумя ромбами $x = \dfrac{2}{3}\pi$.

Лемма 2 доказана

Лемма 3. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) ромбической звезды с величиной новых свободных углов (второго порядка) при условии, что в углы первого порядка вставлены по два правильных треугольника, имеющих общее нефиктивное ребро.*

Доказательство. Рассмотрим третий случай, когда в угол $\beta$ вставлены две правильных треугольных грани с общим неусловным ребром. Снова рассмотрим трёхгранный угол $SMLB$ с вершиной $S$, Рис. 2, а). Так как в этом случае плоский угол $LSB = \dfrac{\pi}{3}$, то уравнение (1) принимает вид:

$$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}. \tag{17}$$

Двугранный угол $\widehat{\gamma}$ между ромбом и правильным треугольником представим как сумму двух углов: $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma_1} + \widehat{\gamma_2}$, где углы $\widehat{\gamma_1}$ и $\widehat{\gamma_2}$ являются двугранными углами в трёхгранных углах $LVSP$ и $LPBS$ соответственно. Рассматривая два последних трёхгранных угла, получаем для них следующие уравнения.

Для угла $LVSP$:

$$-\cos\alpha = -\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos\widehat{\gamma_1}; \tag{18}$$

Для угла $LPBS$:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\beta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\beta\sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\gamma_2}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) получаем соответственно:

$$\cos\widehat{\gamma_1} = \frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}, \tag{20}$$

$$\cos\widehat{\gamma_2} = \frac{1-\cos\beta}{\sqrt{3}\sin\beta}. \tag{21}$$

Так как

$$\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma_1} + \widehat{\gamma_2}$$

, то из (20) и (21) получим:

$$\widehat{\gamma} = \arccos\left(\frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right) + \arccos\left(\frac{1-\cos\beta}{\sqrt{3}\sin\beta}\right). \tag{22}$$

Пусть, как и ранее, $x$ — плоский угол $BSC$. Для трёхгранного угла $SBMC$, в котором двугранный угол с ребром $MS$ обозначим $\widehat{\delta}$, имеем:

$$\cos x = \cos\gamma\cos\frac{\pi}{3} + \sin\gamma\sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\delta}. \tag{23}$$

Угол $\widehat{\delta}$ представим в виде разности: $\widehat{\delta} = \widehat{\gamma} - \widehat{\delta_1}$, где $\widehat{\delta_1}$ двугранный угол с ребром $MS$ в трёхгранном угле $SBLM$, для которого справедливо равенство:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\widehat{\delta_1},$$

то есть:

$$\widehat{\delta_1} = \arccos\left(\frac{\frac{1}{2} - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}\right). \tag{24}$$

Уравнение (23) принимает вид

$$\cos x = \frac{1}{2}\cos\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\cos(\widehat{\gamma} - \widehat{\delta_1}), \tag{25}$$

где $\widehat{\gamma}$ находим из (22), $\widehat{\delta_1}$ — из (24), а $\cos\gamma$ и $\sin\gamma$ из (17).

Таким образом, правая часть уравнения для нового свободного угла $x$ между парами треугольников будет зависеть только от углов $\alpha$ и $\beta$. Как и ранее, учитывая связь углов $\alpha$ и $\beta$ (уравнение (9)) при известном $n$, получим правую часть уравнения (25) как функцию $\beta$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) с подклеенными в них парами правильных треугольников, имеющих обще нефиктивное ребро, с величиной новых свободных углов (третьего порядка) при условии, что в углы второго порядка вставлены правильные многоугольники.*

Доказательство. Теперь покажем, как вычислить свободный угол $y$ *третьего порядка*, если в углы $x$ второго порядка вставлены правильные многоугольники с углом $x$, в углы $\beta$ — пара треугольников с общим нефиктивным ребром. Таким образом, $y$ является углом *между двумя правильными многоугольниками*.

По предыдущему, плоский угол $BSM = \gamma$. Обозначим $\widehat{\Gamma}$ двугранный угол с ребром $SK$ и равный ему угол с ребром $KT$, Рис. 2, a). Рассмотрим трёхгранный угол $SMKB$. Тогда получим:

$$\cos\gamma = \cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\Gamma}. \tag{26}$$

Уравнение (17) в нашем случае принимает вид:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\frac{1}{2} + \sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\widehat{\gamma}.$$

Сравнивая (26) с (17), находим:

$$\widehat{\Gamma} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha - \cos x + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}}{\sqrt{3}\sin x}\right). \tag{27}$$

Рассмотрим трёхгранный угол $KSMT$. Обозначая $\widehat{\kappa}$ двугранный угол, лежащий против равностороннего треугольника, получим:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\beta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\beta\sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\kappa},$$

откуда находим:

$$\widehat{\kappa} = \arccos\left(\frac{1-\cos\beta}{\sqrt{3}\sin\beta}\right). \tag{28}$$

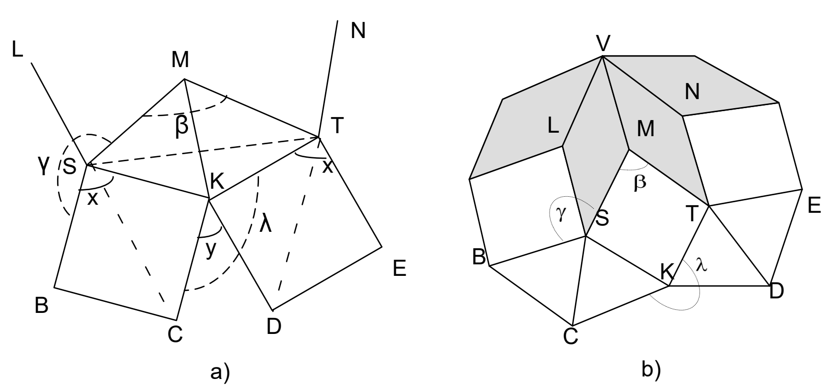


Рис. 2: К доказательству лемм: a)– к леммам 3 и 4; b)– к леммам 5 и 6

Обозначим $\lambda$ плоский угол $CKT$. Из трёхгранного угла $KCTS$ находим:

$$\cos x = \cos\beta\cos\lambda + \sin\beta\sin\lambda\cos\widehat{\kappa'}, \tag{29}$$

где двугранный угол $\widehat{\kappa'}$ является частью угла $\widehat{\Gamma}$.

Из (29) находим:

$$\widehat{\kappa'} = \arccos\left(\frac{\cos x - \cos\beta\cos\lambda}{\sin\beta\sin\lambda}\right). \tag{30}$$

Для трёхгранного угла $KCTS$ имеем также:

$$\cos\lambda = \cos\beta\cos x + \sin\beta\sin x\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa}),$$

$$\lambda = \arccos\left(\cos\beta\cos x + \sin\beta\sin x\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa})\right). \tag{31}$$

Для трёхгранного угла $KCDT$ имеем равенство:

$$\cos y = \cos\lambda\cos x + \sin\lambda\sin x\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa} - \widehat{\kappa'}),$$

$$y = \arccos\left(\cos\lambda\cos x + \sin\lambda\sin x\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa} - \widehat{\kappa'})\right). \tag{32}$$

Из последнего уравнения находим $y$, если учесть следующие уравнения для $\lambda, \widehat{\Gamma}, \widehat{\kappa}, \widehat{\kappa'}$: (31), (30), (28),(27), а также уравнение (22) для $\widehat{\gamma}$. В результате правая часть уравнения (32) будет зависеть только от углов $\alpha$ и $\beta$.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) с подклеенными в них парами правильных треугольников, имеющих общее нефиктивное ребро, с величиной новых свободных углов (третьего порядка) при условии, что в углы второго порядка вставлены пары правильных треугольников.*

Доказательство. Найдём теперь свободный угол $y$ третьего порядка, если в углы $x$ второго порядка и в углы $\beta$ подклеены пары правильных треугольников с общим нефиктивным ребром. Таким образом, $y$ является углом между двумя правильными треугольниками, Рис. 2, b).

Покажем, какие изменения нужно внести по сравнению с предыдущим случаем. Равенство (26) здесь будет иметь вид:

$$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\cos\widehat{\Gamma}^0, \tag{33}$$

где $\widehat{\Gamma}^0 = \widehat{\Gamma} - \widehat{\sigma}$. Двугранный угол $\widehat{\sigma}$ как часть двугранного угла $\widehat{\Gamma}$ с ребром $SK$, учитывая, что треугольник $SKC$ правильный, найдём из равенства $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\cos\widehat{\sigma}$:

$$\widehat{\sigma} = \arccos\left(\frac{1 - \cos x}{\sqrt{3}\sin x}\right). \tag{34}$$

Сравнивая уравнение (33) с (17), получим:

$$\widehat{\Gamma^0} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha - \cos x + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}}{\sqrt{3}\sin x}\right). \tag{35}$$

Рассматривая трёхгранный угол $KCTS$ находим новый вид уравнения (29):

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\beta\cos\lambda + \sin\beta\sin\lambda\cos\widehat{\kappa'}. \tag{36}$$

Из (36):

$$\widehat{\kappa'} = \arccos\left(\frac{\frac{1}{2} - \cos\beta\cos\lambda}{\sin\beta\sin\lambda}\right). \qquad (37)$$

Для трёхгранного угла $KCTS$ имеем также:

$$\cos\lambda = \cos\beta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\beta\sin\frac{\pi}{3}\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa}),$$

$$\lambda = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa})\right). \qquad (38)$$

Из трёхгранного угла $KCDT$:

$$\cos y = \cos\lambda\cos\frac{\pi}{3} + \sin\lambda\sin\frac{\pi}{3}\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa} - \widehat{\kappa'}),$$

$$y = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\lambda\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa} - \widehat{\kappa'})\right). \qquad (39)$$

Отметим, что в (38) и (39) $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}^0 + \widehat{\sigma}$.

Из уравнения (39) можно выразить свободный угол третьего порядка $y$ через углы $\alpha$ и $\beta$, если учесть выражения для $\widehat{\kappa}$, $\widehat{\kappa'}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\sigma}$, $\widehat{\Gamma}^0$, выражение (22) для $\widehat{\gamma}$ и предварительно найти угол x через углы $\alpha$ или $\beta$. В результате угол $y$ будет зависеть только от $\alpha$ (или $\beta$).

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) с подклеенными в них правильными многоугольниками, с величиной новых свободных углов (третьего порядка) при условии, что в углы второго порядка вставлены пары правильных треугольников с нефиктивным ребром.*

Доказательство.

Равенство (33) будет иметь тот же самый вид и в этом случае:

$$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\cos\widehat{\Gamma}^0, \qquad (40)$$

где $\widehat{\Gamma}^0 = \widehat{\Gamma} - \widehat{\sigma}$. Двугранный угол $\widehat{\sigma}$ как часть двугранного угла $\widehat{\Gamma}$ с ребром $SK$, (см. Рис. 2), b), учитывая, что треугольник $SKC$ правильный, как и в предыдущей лемме, найдём из равенства $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\cos\widehat{\sigma}$:

$$\widehat{\sigma} = \arccos\left(\frac{1 - \cos x}{\sqrt{3}\sin x}\right). \qquad (41)$$

Сравнивая (40) с уравнением (1), получим:

$$\widehat{\Gamma^0} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos x\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}}{\sin\beta\sin x}\right), \qquad (42)$$

где $\cos\widehat{\gamma}$ определяется из (1):

$$\cos\widehat{\gamma} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \alpha}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Уравнения (36) и (37) для $\widehat{\kappa'}$ — части угла $\widehat{\Gamma^0}$ — сохраняют свой вид.

Для трёхгранного угла $KCTS$ имеем также:

$$\cos\lambda = \cos\beta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\beta\sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\Gamma},$$

$$\lambda = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\cos\widehat{\Gamma}\right). \tag{43}$$

Из трёхгранного угла $KCDT$:

$$\cos y = \cos\lambda\cos\frac{\pi}{3} + \sin\lambda\sin\frac{\pi}{3}\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa'}),$$

$$y = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\lambda\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa'})\right). \tag{44}$$

Заметим, что в (43) и (44) $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}^0 + \widehat{\sigma}$, а $\cos x$ определяется по лемме 1. Используя это замечание, а также: (41)–(43), (36), (37) из уравнения (44) найдём угол третьего порядка $y$.

Лемма 6 доказана.

## 3. Основная теорема

В формулировке следующей теоремы не учитываются многогранники из известного списка [13] правильногранных многогранников с условными рёбрами.

Теорема 1. *Существует только один несоставной RR-многогранник второго типа с остроугольными ромбическими вершинами и правильными свободными углами.*

Доказательство.

Так как рассматривается класс несоставных $RR$-многогранников, то в свободных углах $\beta$ не может находиться по одному правильному треугольнику. Поэтому рассмотрим следующие случаи, когда в свободных углах расположены: 1) квадраты, 2) правильные 5-угольники, 3) правильные 6-угольники, 4) пары правильных треугольников.

Если степень ромбической вершины $n = 3$, то в этом случае, очевидно, $\beta = \alpha$ и в случае 1) и следующих получим, что ромбическая вершина не является остроугольной.

Если $n = 4$, то в случае 1) получим два известных многогранника — дополненный кубооктаэдр и дважды дополненный кубооктаэдр, [13]. Действительно, при $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ компьютерное вычисление по формулам (7)–(8) леммы 1 даёт, что свободный угол второго порядка $x = \dfrac{\pi}{3}$. Если теперь поместить в углы $x$ по одному правильному треугольнику и подклеить квадрат к их свободным сторонам, то получим 13-гранник — дополненный кубооктаэдр. Если вместо правильных треугольников поместить в углы $x$ ромбы с острым углом $\dfrac{\pi}{3}$, то получим 12-гранник — дважды дополненный кубооктаэдр.

В случае 2), когда $\beta = 108^\circ$, по формуле (9) получаем, что $\alpha \approx 69.79^\circ$, и по формулам (7)–(8) вычисляем угол $x \approx 25.24^\circ$. Таким образом, в свободный угол второго порядка нельзя подклеить правильный многоугольник. В угол $x$ нельзя также подклеить пару правильных треугольников, так как в этом случае общие вершины двух соседних 5-угольников будут иметь отрицательную кривизну: $360^\circ - 69.79^\circ + 216^\circ + 120^\circ < 0$.

Рассмотрим случай 3). Из формулы (9) следует, что с увеличением угла $\beta$ угол $\alpha$ увеличивается и при $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$ получим 4-ромбическую вершину с острым углом ромба $\alpha \approx 75.52^\circ$. Формулы (7)–(8) при этом дают значение угла $x = 0$. Зеркально отражая полученную ромбическую звезду относительно плоскости, делящей пополам замкнутый пояс из четырёх правильных 6-угольников, получим $RR$-многогранник первого типа с двумя ромбическими вершинами.

Случай 4). Здесь в углы $\beta$ помещены пары правильных треугольников. Рассмотрим сначала в этом случае возможность подклеивания правильных многоугольников в углы $x$. В этом случае не существует ромбической остроугольной вершины. Покажем сначала, что решение уравнения (25) при $x = \dfrac{\pi}{2}$ не существует. Действительно, при максимально возможном $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$ из формулы (9) получаем максимальное значение $\alpha_{max} = 2arcsin\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{\sqrt{2}}\right) \approx 75.52°$. Решим уравнение (25) относительно $\sin\alpha$ при $cosx = 0$.

Легко проверить, что данное уравнение не имеет решения в указанном интервале $(0, \sin\alpha_{max})$.

Это подтверждается также решением уравнений (15)–(16), когда в углы $\beta$ вставлены ромбы. В этом случае компьютерные вычисления дают угол $x \approx 75.52°$. Отсюда следует, что в углы $x$ в этом случае нельзя вставить квадраты.

Аналогично доказывается несуществование $RR$-многогранника, когда в углы $x$ подклеены 5-угольники. Случай, когда в углах $x$ 6-угольники, невозможен, так как общие вершины соседних 6-угольников будут иметь отрицательную кривизну.

Пусть в углы $x$, как и в углы $\beta$, подклеены пары треугольников.

Ранее нами было доказано существование в этом случае двух $RR$-многогранников: 21-гранника второго типа, связанного с плосконосой квадратной антипризмой и 24-гранника первого типа в [15]. Для 24-гранника $\alpha \approx 73.44°$, $\beta \approx 115.47°$. Для 21-гранника $\alpha \approx 73.10°$, $\beta \approx 114.75°$. Покажем, что помимо этих двух больше не существует $RR$-многогранников, когда в углы $x$ и $\beta$ помещены пары правильных треугольников. Если в свободные углы $y$ третьего порядка вставлены правильные треугольники, то получим указанный выше 21-гранник. Вставить в углы $y$ квадраты нельзя, так как в случае, если соседние квадраты имеют только одну общую вершину — — вершину, общую для двух треугольников в углах $x$, то между ними должен быть по крайней мере треугольник, но тогда кривизна в общей вершине будет отрицательной. Если два соседних квадрата будут иметь общую сторону, то четыре квадрата образуют четырёхугольную правильную призму и ромбическая звезда не будет существовать. Нельзя также 5-угольники поместить в углы $y$, так как по той же причине, что и в случае квадратов, соседние 5-угольники на могут иметь общей только одну вершину — вершину, общую для двух треугольников в углах $x$. Не могут иметь соседние 5-угольники и общую сторону, так как тогда угол $x = \dfrac{\pi}{2}$, а это невозможно для ромбической вершины. Очевидно, 6-угольники также не могут быть помещены в углы $y$, так как в общей вершине двух соседних 6-угольников получим отрицательную кривизну.

Пусть теперь $n = 5$.

В случае 1), когда в $\beta$ вставлены квадраты, получим 20-гранный $RR$-многогранник первого типа, доказательство существования которого приведено во второй части работы [15]. Это можно проверить также и вычислениями по формулам (7)–(8).

В случае 2), т.е. при $\beta = \dfrac{3\pi}{5}$, получим удлинённую 5-скатную ротонду с углами $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ — один из правильногранных многогранников с условными рёбрами из списка [13].

Если $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$, то вычисления по формулам (7)–(8) даёт: $x \approx 38.63°$ и дальнейшее построение $RR$-многогранника невозможно.

В случае 4) в углы $\beta$ вставлены пары правильных треугольников. Рассмотрим сначала возможность подклеивания правильных многоугольников в углы $x$. При максимальном $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$, получим, как и выше, максимальное значение $\alpha \approx 64.72°$. Компьютерное решение уравнения

(25) даёт, что решений для случая квадратов, 5-угольников и 6-угольников не существует. Случай невозможности $RR$-многогранников для $k$-угольников при $k > 6$ очевиден.

Пусть теперь в углы $x$ подклеены также пары правильных треугольников. При наибольшем $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$, то есть когда в свободных углах размещены ромбы с острыми углами $\dfrac{\pi}{3}$, в свободных углах $x$ второго порядка можно разместить такие же ромбы; это доказано в [18], в чём также можно убедиться с помощью уравнения Леммы 2.

При помощи формул (7)–(8) можно убедиться, что с уменьшением угла $\beta$ и выполнением соотношения (9) угол $x$ увеличивается, то есть ромбы становятся парами правильных треугольников, однако выпуклость нарушится. Таким образом, для 5-ромбической звезды $RR$-многогранник типа икосаэдра Е.С.Фёдорова (см. [18]) является «жёстким» отнсительно замены его ромбических граней, не входящих в ромбические звёзды, на пары правильных треугольников с общим ребром.

При $n = 6$ в случае квадратов в углах $\beta$ для вычисления угла $x$ применим формулы (7)–(8) Леммы 1. Компьютерные вычисления дают в этом случае: $x \approx 109.47°$. Подклеить в этот угол 5-угольник или 6-угольник нельзя. Покажем, что в угол $x$ нельзя подклеить и пару треугольников. Для этого воспользуемся формулой (44) Леммы 6. Вычисления угла третьего порядка в этом случае дают: $y \approx 150.83°$. Таким образом, дальнейшее подклеивание правильных многоугольников невозможно.

При $n = 6$ в случае 5-угольников в углах $\beta$ для вычисления угла $x$ проведём аналогичные вычисления. Получим $x \approx 80.41°$ и дальнейшее подклеивание невозможно, так как в вершине, общей для двух соседних 5-угольников, кривизна будет отрицательной. Построение $RR$-многогранника в случае, когда в углах $\beta$ 6-угольники, очевидно, невозможно.

Последний случай, когда при $n = 6$ в углы $\beta$ подклеены пары треугольников, невозможен, так как кривизна вершины, которая является общей для двух тупых углов ромбов ромбической звезды, будет отрицательна.

Если $n = 7$, то вычисление по формулам (7)—(8) даёт $x \approx 123.71°$ и подклеивание многоугольников в угол $x$ невозможно. Очевидно, что при условии правильности свободных углов дальнейшее увеличение $n$ не приводит к новым $RR$ многогранникам.

Теорема доказана.

## 4. Заключение

Таким образом, существует только один несоставной $RR$-многогранник с правильными гранями различного типа в классе многогранников с правильными свободными углами и остроугольными ромбическими вершинами. Этот многогранник может быть построен исходя из плосконосой квадратной антипризмы.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coxeter H. S. Regular polytopes. London-NY. 1963.

2. Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. М.: МЦНМО, 2007.

3. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981.

4. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

5. Grunbaum B. Regular polyhedra — old and new.// Aequationes mathematicae. 1977. Vol. 16, №1-2. P.1-20.

6. Berman M. Regular-faced Convex Polyhedra, // Journal of The Franklin Institute. 1971. Vol. 291, №5. P.329-352.

7. Coxeter H. S. Regular and semi-regular polytopes. II, // Mathematische Zeitschrift. 1985. Vol. 188, №4. P.559–591.

8. Coxeter H. S. Regular and semi-regular polytopes. III, // Mathematische Zeitschrift. 1988. Vol. 200, №1. P.3–45.

9. Jurij Kovic. Centrally symmetric convex polyhedra with regular polygonal faces // Math. Commun. 2013. Vol. 18. P. 429—440.

10. Piette B. M. A. G, Kowalczyk A, Heddle J. G. Characterization of near-miss connectivity-invariant homogeneous convex polyhedral cages // Proc. R. Soc., 2022, A 478:20210679.

11. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math. 1966. Vol. 18, №1. P. 169—200.

12. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями //Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т.2. С.1-220.

13. Tupelo-Schneck R. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges [Electronic resource] // URL: http://tupelo-schneck.org/polyhedra (date of treatment: 29.12.2025).

14. Tupelo-Schneck R. Regular-faced polyhedra [Electronic resource] // URL: https://tupelo-schneck.org/polyhedra/background.html. (date of treatment: 29.12.2025).

15. Subbotin V. I. On Two Classes of Polyhedra with Rhombic Vertices. // J. Math. Sci., 2020, vol. 251, pp. 531—538.

16. Subbotin V. I. О перечислении выпуклых $RR$-многогранников // Чебышевский сборник, 2023, том 24, вып. 5, с.194–207.

17. Subbotin V. I. On the Composite $RR$-Polyhedra of the Second Type // Siberian Mathematical Journal, 2023, vol. 64, no. 2, pp. 500—506.

18. Субботин В. И. О О существовании и перечислении $RR$-многогранников // Материалы Омской Международной конференции по геометрии и её приложениям. Омск. 2025. С.153-155.

## REFERENCES

1. Coxeter H. S. 1963, *Regular polytopes*, London-NY.

2. Deza M, Grishukhin V. P., Shtogrin M. I. 2008, *Isometricheskie poliedralnye podgrafy v gipercubach i cubicheskich reshetkach* [*Scale-Isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices* ], MCNMO, Moskow.

3. Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravzov M. K. 1981, *Mnogogranniki. Grafi. Optimizacija.* [*Polyhedra. Graph. Optimization*], Nauka, Moskow.

4. Cromwell P. R. 1997, *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge.

5. Grunbaum, B. 1977, “Regular polyhedra — old and new“, *Aequationes mathematicae*, vol. 16, no.1-2, pp.1-20.

6. Berman M. 1971, “Regular-faced Convex Polyhedra“, *Journal of The Franklin Institute* , vol. 291, no.5, pp.329-352.

7. Coxeter H. S. 1985, “Regular and semi-regular polytopes. II“, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 188, no.4, pp.559–591.

8. Coxeter H. S. 1988, “Regular and semi-regular polytopes. III“, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 200, no.1, pp.3–45.

9. Jurij Kovic. 2013, “Centrally symmetric convex polyhedra with regular polygonal faces“, *Math. Commun.*, vol. 18, pp. 429—440.

10. Piette B. M. A. G, Kowalczyk A, Heddle J. G. 2022,“Characterization of near-miss connectivity-invariant homogeneous convex polyhedral cages“, *Proc. R. Soc.*, A 478:20210679.

11. Johnson N. W. 1966, “Convex polyhedra with regular faces“, *Can. J. Math.*, vol. 18, №1, pp. 169—200.

12. Zalgaller V. A. 1967, “Convex polyhedra with regular faces“, *Zapiski nauchnych seminarov LOMI*, vol. 2, pp.1-220.

13. Tupelo-Schneck R. “Convex regular-faced polyhedra with conditional edges [Electronic resource]“, *http://tupelo-schneck.org/polyhedra (date of treatment: 29.12.2025).*

14. Tupelo-Schneck R. “Regular-faced polyhedra [Electronic resource]“, *https://tupelo-schneck.org/polyhedra/background.html. (date of treatment: 29.12.2025).*

15. Subbotin V. I. 2020, “On two classes of polyhedra with rhombic vertices“, *J. Math. Sci.,* vol. 251, pp. 531–538

16. Subbotin V. I. 2023, “On the enumeration of convex $RR$-polytopes“, *Chebyshevskiy sbornik,* vol.24, no.6, pp. 194–207.

17. Subbotin V. I. 2023, “On the Composite $RR$-Polyhedra of the Second Type“, *Siberian Mathematical Journal,* vol. 64, no. 2, pp. 500—506.

18. Subbotin V. I. 2025, “On the existence and enumeration of $RR$-polytopes“, *Materialy megdunarodnoy konferencii “Omsskaja konferenciya po geometrii i ejo prilogeniyam“,* Omsk, pp.153-155.

Получено: 15.11.2025
Принято в печать: 12.02.2026