

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 1.

УДК: 514.853+517.938.5

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-77-96

**Явное решение критических подсистем интегрируемого семейства Ковалевской – Чаплыгина<sup>1</sup>**

С. С. Николаенко, П. Е. Рябов, С. В. Соколов

**Николаенко Станислав Сергеевич** — кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Москва).

*e-mail: nikolaenko.s@phystech.edu*

**Рябов Павел Евгеньевич** — доктор физико-математических наук, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Москва).

*e-mail: ryabov.pe@mipt.ru*

**Соколов Сергей Викторович** — доктор физико-математических наук, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Москва).

*e-mail: sokolov.sv@phystech.edu*

**Аннотация**

Работа посвящена изучению фазовой топологии интегрируемого случая Ковалевской – Чаплыгина в динамике твёрдого тела. Этот случай, с одной стороны, является обобщением классических случаев Ковалевской и Чаплыгина, а с другой стороны, вписывается в 6-параметрическое семейство гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, интегрируемых при нулевом значении интеграла площадей. Для рассматриваемой задачи детально изучены критические подсистемы — системы с одной степенью свободы, являющиеся ограничением исходной гамильтоновой системы на критическое множество отображения момента. Получена явная параметризация критического множества, что как следствие даёт бифуркационную диаграмму и образ отображения момента. Для всех пяти критических подсистем при каждом значении интеграла энергии и параметра задачи получено их явное решение в эллиптических квадратурах. Кроме того, для каждой критической подсистемы описаны бифуркации интегральных траекторий при изменении уровня энергии. Оказалось, что все нетривиальные бифуркации седлового типа исчерпываются 2-атомами  $B$  и  $C_2$  (стандартные перестройки двух критических окружностей в одну и двух окружностей в две соответственно).

*Ключевые слова:* интегрируемая система, критическая подсистема, бифуркационная диаграмма, решение в квадратурах, 2-атом, молекула.

*Библиография:* 17 названий.

**Для цитирования:**

Николаенко С. С., Рябов П. Е., Соколов С. В. Явное решение критических подсистем интегрируемого семейства Ковалевской – Чаплыгина // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 77–96.

<sup>1</sup>Исследование поддержано Российским научным фондом (проект 25-21-00086) и выполнено в Московском физико-техническом институте (национальном исследовательском университете).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 1.

UDC: 514.853+517.938.5

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-77-96

**Explicit solution of the critical subsystems for the Kovalevskaya-Chaplygin integrable family**

S. S. Nikolaenko, P. E. Ryabov, S. V. Sokolov

**Nikolaenko Stanislav Sergeevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Moscow).

*e-mail: nikolaenko.s@phystech.edu*

**Ryabov Pavel Evgenyevich** — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Moscow).

*e-mail: ryabov.pe@mipt.ru*

**Sokolov Sergey Viktorovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Moscow).

*e-mail: sokolov.sv@phystech.edu*

**Abstract**

In this paper we study the phase topology for the Kovalevskaya – Chaplygin integrable case in rigid body dynamics. On the one hand, it is the generalization of the classical Kovalevskaya and Chaplygin cases. On the other hand, it is inscribed in the 6-parameter family of partially integrable (under zero value of the area integral) Hamiltonian systems with two degrees of freedom. For the given problem, we study in details the critical subsystems — Hamiltonian systems with one degree of freedom which are restrictions of the initial system to the critical set of the momentum mapping. We obtain an explicit parametrization of the critical set which gives the bifurcation diagram and the image of the momentum mapping. For all five critical subsystems we provide their explicit solutions in elliptic quadratures under constant value of the energy integral and the parameter of the problem. Besides that, for each critical subsystem we describe the bifurcations of the integral trajectories under the change of the energy level. It turns out that all non-trivial bifurcations of the saddle type are 2-atoms  $B$  and  $C_2$  (standard transformations of two critical circles into one or two circles respectively).

*Keywords:* integrable system, critical subsystem, bifurcation diagram, solution in quadratures, 2-atom, molecule.

*Bibliography:* 17 titles.

**For citation:**

Nikolaenko, S. S., Ryabov P. E., Sokolov S. V. 2026, “Explicit solution of the critical subsystems for the Kovalevskaya-Chaplygin integrable family”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 77–96.

**1. Введение**

В динамике твёрдого тела хорошо известен интегрируемый случай Ковалевской – Чаплыгина – Горячева – Яхья, представляющий собой семейство вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на двойственном пространстве  $e(\mathfrak{3})^*$  к алгебре Ли группы движений трёхмерного евклидова пространства. В естественных переменных  $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  гамильтониан этого семейства имеет вид

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + 2c_4\alpha_1\alpha_2 + c_3(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \delta \frac{\alpha^2}{\alpha_3^2},$$

где  $(c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda, \delta)$  – набор параметров. Скобка Ли – Пуассона на  $e(3)^*$  обладает двумя функциями Казимира  $f_1 = \alpha^2$ ,  $f_2 = (M, \alpha)$ . На симплектическом листе  $P^4$ , выделяемом в  $e(3)^*$  условиями

$$f_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad (1)$$

$$f_2 = M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3 = 0, \quad (2)$$

данное семейство систем обладает дополнительным первым интегралом [1]:

$$\begin{aligned} K = & \left[ M_1^2 - M_2^2 - c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3^2 - \delta \frac{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_3^2} \right]^2 + \\ & + \left[ 2M_1M_2 - c_1\alpha_2 - c_2\alpha_1 + c_4\alpha_3^2 - \frac{2\delta\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3^2} \right]^2 - \\ & - 4\lambda(M_3 + \lambda) \left[ M_1^2 + M_2^2 + \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\alpha_3^2} \right) \delta \right] + \\ & + 4\lambda\alpha_3 [(c_1 + c_3\alpha_1 + c_4\alpha_2)M_1 + (c_2 - c_3\alpha_2 + c_4\alpha_1)M_2]. \end{aligned} \quad (3)$$

В другом виде интеграл (3) приводится в работах [2, 3], а история его появления кратко изложена в [4]. В данной работе исследуется случай, когда  $c_2 = c_4 = \lambda = \delta = 0$ . При  $c_3 = 0$  он сводится к классическому случаю Ковалевской [5, 6, 7, 8, 9], а при  $c_1 = 0$  – к случаю Чаплыгина [10, 11, 12, 13, 14]. Поэтому данный случай естественно назвать случаем Ковалевской – Чаплыгина (более общий вариант возникает при ненулевых  $c_1, c_2, c_3$ ). Далее мы полагаем  $c_3 = 1$ . Приняв также обозначение  $c_1 = \gamma$ , приведём окончательный вид гамильтониана и дополнительного интеграла:

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + \gamma\alpha_1 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2; \quad (4)$$

$$K = (M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma\alpha_1)^2 + (2M_1M_2 - \gamma\alpha_2)^2. \quad (5)$$

На  $P^4$  наряду с интегралом  $K$  можно также рассматривать интеграл

$$\tilde{K} = \left( M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \gamma\alpha_1 + \frac{\gamma^2}{4} \right)^2 + (2M_1\alpha_3 + \gamma M_3)^2, \quad (6)$$

связанный с остальными интегралами соотношением

$$\tilde{K} = K + \frac{\gamma^2}{2}(H - f_1) + 4\gamma M_1 f_2 + \frac{\gamma^4}{16}.$$

В работах [15, 16] было инициировано исследование фазовой топологии случая Ковалевской – Чаплыгина (а также некоторых других подслучаев упомянутого многопараметрического семейства). В частности, для случая Ковалевской – Чаплыгина был определён топологический тип изоэнергетических многообразий в зависимости от значения параметра  $\gamma$ . В настоящей работе мы фокусируемся на описании критических подсистем для данного случая. В разделе 2 приводится явное описание критического множества отображения момента, которое служит объединением фазовых пространств пяти критических подсистем. В разделе 3 приводится явное аналитическое решение всех критических подсистем, а также исследуется топология соответствующих слоений фазовых пространств. Наконец, в разделе 4 на основании результатов раздела 2 строятся бифуркационные диаграммы отображения момента при различных значениях параметра  $\gamma$ .

## 2. Описание критического множества отображения момента

Рассмотрим пять подмножеств фазового пространства  $P^4$ , выделяемых следующими системами уравнений:

- $\mathcal{C}_1$ :  $M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma\alpha_1 = 0$ ,  $2M_1M_2 - \gamma\alpha_2 = 0$ ;
- $\mathcal{C}_2$ :  $M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \gamma\alpha_1 + \frac{\gamma^2}{4} = 0$ ,  $2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 = 0$ ;
- $\mathcal{C}_3$ :  $M_1 = M_2 = \alpha_3 = 0$ ;
- $\mathcal{C}_4$ :  $M_1 = \alpha_2 = M_3 = 0$ ;
- $\mathcal{C}_5$ :  $M_2 = 0$ ,  $2M_1M_3 - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 = 0$ ,  $2M_3^2 + (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_1 = 0$ .

ЛЕММА 1. Множества  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_5$  инвариантны относительно гамильтоновой системы с гамильтонианом  $H$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проверить инвариантность относительно гамильтонова потока уравнений, задающих множества  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_5$ . Учитывая вид скобки Ли – Пуассона на  $e(3)^*$

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk}\alpha_k, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \quad \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i),$$

можем явно выписать гамильтоновы уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= -2M_2M_3 - 2\alpha_2\alpha_3, & \dot{\alpha}_1 &= 2M_2\alpha_3 - 4M_3\alpha_2, \\ \dot{M}_2 &= 2M_1M_3 - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3, & \dot{\alpha}_2 &= -2M_1\alpha_3 + 4M_3\alpha_1, \\ \dot{M}_3 &= 4\alpha_1\alpha_2 + \gamma\alpha_2, & \dot{\alpha}_3 &= 2M_1\alpha_2 - 2M_2\alpha_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Нужно показать, что производные в силу данной системы правых частей уравнений, задающих множества  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_5$ , равны нулю. Например, для множества  $\mathcal{C}_1$  имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma\alpha_1) &= 2M_1(-2M_2M_3 - 2\alpha_2\alpha_3) - 2M_2(2M_1M_3 - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3) + \\ &+ 2\alpha_3(2M_1\alpha_2 - 2M_2\alpha_1) - \gamma(2M_2\alpha_3 - 4M_3\alpha_2) = -4M_3(2M_1M_2 - \gamma\alpha_2) = 0; \\ \frac{d}{dt}(2M_1M_2 - \gamma\alpha_2) &= 2(-2M_2M_3 - 2\alpha_2\alpha_3)M_2 + 2M_1(2M_1M_3 - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3) - \\ &- \gamma(-2M_1\alpha_3 + 4M_3\alpha_1) = 4M_3(M_1^2 - M_2^2 - \gamma\alpha_1) - 4\alpha_3(M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2) = \\ &= 4M_3(M_1^2 - M_2^2 - \gamma\alpha_1 + \alpha_3^2) = 0 \end{aligned}$$

(в предпоследнем равенстве воспользовались соотношением (2)).

Множества  $\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_5$  рассматриваются аналогично. Лемма 1 доказана.

ТЕОРЕМА 1. Множество критических точек отображения момента  $H \times K: P^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  есть в точности объединение множеств  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_5$ . Таким образом, в интегрируемом случае Ковалевской – Чаплыгина имеется пять критических подсистем, фазовыми пространствами которых являются множества  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_5$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка  $x \in P^4$  является критической для отображения момента в точности тогда, когда в этой точке дифференциалы первых интегралов  $H, K, f_1, f_2$  линейно зависимы в пространстве  $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha})$ . Пусть  $\mathcal{M}$  — матрица Якоби отображения  $H \times K \times f_1 \times f_2$ :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2M_1 & 2M_2 & 4M_3 & 2\alpha_1 + \gamma & -2\alpha_2 & 0 \\ 4M_1\xi + 4M_2\eta & -4M_2\xi + 4M_1\eta & 0 & -2\gamma\xi & -2\gamma\eta & 4\alpha_3\xi \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2\alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix},$$

где  $\xi = M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma\alpha_1$ ,  $\eta = 2M_1M_2 - \gamma\alpha_2$ .

ЛЕММА 2. Если в критической точке  $K \neq 0$ , то

$$(M_1^2 + M_2^2)(2M_3(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1) - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_2\alpha_3) = \gamma M_2 M_3. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементарными преобразованиями строк и столбцов матрица  $\mathcal{M}$  сводится к матрице

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 4(\gamma M_1 - 2M_2\alpha_2) & -8M_1\alpha_2 & 4M_3 & \gamma & -4\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma\xi & -2\gamma\eta & 0 \\ 4(M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2) & 4(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1) & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2(2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 \\ \gamma\alpha_1 + 2(M_1^2 + M_2^2) & \gamma\alpha_2 & \alpha_3 & M_1 & M_2 & 2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\mathcal{N}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$  минор матрицы  $\mathcal{N}$ , образованный пересечением строк с номерами  $i_1 \dots i_k$  и столбцов с номерами  $j_1 \dots j_k$  (аналогично — для матрицы  $\mathcal{M}$ ). В критической точке  $\text{rank } \mathcal{N} < 4$ . Если  $K \neq 0$ , то  $\xi \neq 0$  или  $\eta \neq 0$ , следовательно, вторая строка матрицы  $\mathcal{N}$  ненулевая. Так как в критической точке  $\text{rank } \mathcal{N} < 4$ , отсюда вытекает, что  $\mathcal{N}_{123}^{134} = 0$ . Итак,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{16} \mathcal{N}_{123}^{134} = (M_1^2 + M_2^2)(2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 2M_3(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1)) + \\ &+ \gamma(M_2M_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + M_1\alpha_3(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1)) = (M_1^2 + M_2^2)(2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 2M_3(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1)) + \\ &+ \gamma(M_2M_3 + M_1^2\alpha_2\alpha_3 - M_2\alpha_3(M_3\alpha_3 + M_1\alpha_1)), \end{aligned}$$

что с учётом равенства (2) равносильно (8). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Если в критической точке  $K \neq 0$ , то

$$M_2(2M_1\alpha_3 + \gamma M_3) = 0. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1) переменные  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  не могут обращаться в нуль одновременно. Следовательно, третья строка матрицы  $\mathcal{M}$  ненулевая. Поскольку в критической точке  $\text{rank } \mathcal{M} < 4$ , отсюда вытекает, что  $\mathcal{M}_{123}^{124} = 0$ . Таким образом, с учётом равенств (8), (1), (2), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{8} \mathcal{N}_{123}^{124} = (M_1^2 + M_2^2)(M_2(M_1\alpha_3 - 2M_3\alpha_1) - M_1(M_2\alpha_3 - 2M_3\alpha_2)) - \\ &- \alpha_3^2(M_2(M_1\alpha_3 - 2M_3\alpha_1) + M_1(M_2\alpha_3 - 2M_3\alpha_2)) + \\ &+ \gamma((M_2\alpha_1 - M_1\alpha_2)(M_1\alpha_3 - 2M_3\alpha_1) + (M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2)(M_2\alpha_3 - 2M_3\alpha_2)) = \\ &= 2(M_1^2 + M_2^2)M_3(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1) - 2\alpha_3^2(M_1M_2\alpha_3 - M_3(M_1\alpha_2 + M_2\alpha_1)) + \\ &+ \gamma(2M_1M_2\alpha_1\alpha_3 + (M_2^2 - M_1^2)\alpha_2\alpha_3 - 2M_2M_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)) = \\ &= (M_1^2 + M_2^2)(2\alpha_1 + \gamma)\alpha_2\alpha_3 + \gamma M_2 M_3 - 2\alpha_3(M_1M_2\alpha_3^2 + (M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2)(M_1\alpha_2 + M_2\alpha_1)) + \\ &+ \gamma(2M_1M_2\alpha_1\alpha_3 + (M_2^2 - M_1^2)\alpha_2\alpha_3 + 2M_2M_3\alpha_3^2 - 2M_2M_3) = \\ &= -2\alpha_3M_1M_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \gamma(2M_2\alpha_3(M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3) - M_2M_3) = \\ &= -M_2(2M_1\alpha_3 + \gamma M_3). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы 1. Если  $K = 0$ , то  $\xi = \eta = 0$ ,  $dK = 0$ , и мы получаем множество  $\mathcal{C}_1$ . Аналогично, если  $\tilde{K} = 0$ , то  $M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \gamma\alpha_1 + \frac{\gamma^2}{4} = 0$ ,  $2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 = 0$ ,  $d\tilde{K} = 0$ , и мы получаем множество  $\mathcal{C}_2$ . Поэтому далее будем считать, что в данной критической точке  $K \neq 0$  и  $\tilde{K} \neq 0$ . Из леммы 3 следует, что  $M_2 = 0$  или  $2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 = 0$ . Рассмотрим все возможные случаи.

1.  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{0}$ . Лемма 2 в этом случае даёт  $M_1\alpha_2(2M_1M_3 - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3) = 0$ .

(а)  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{0}$ . Из (2) следует, что  $\alpha_3 = 0$  или  $M_3 = 0$ .

i.  $\alpha_3 = 0$ . Получаем множество  $\mathcal{C}_3$ . Оно действительно критическое, так как вторая и третья строки матрицы  $\mathcal{M}$  оказываются линейно зависимы.

ii.  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{0}$ ,  $\alpha_3 \neq 0$ . В этом случае матрица  $\mathcal{N}$  приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma & -4\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma(\alpha_3^2 - \gamma\alpha_1) & 2\gamma^2\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2(2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 \\ \gamma\alpha_1 & \gamma\alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её ранг меньше четырёх в точности тогда, когда  $\mathcal{N}_{456}^{123} = 0$ , что влечёт равенство  $\alpha_2(2\alpha_1 + \gamma)(\alpha_3^2 - \gamma\alpha_1 - \gamma^2/4) = 0$ .

А.  $\alpha_2 = 0$ . Получаем, что данная точка принадлежит множеству  $\mathcal{C}_4$ .

В.  $2\alpha_1 + \gamma = 0$ . В этом случае точка принадлежит множеству  $\mathcal{C}_5$ .

С.  $\alpha_3^2 - \gamma\alpha_1 - \gamma^2/4 = 0$ . Получаем  $\tilde{K} = 0$ , что противоречит предположению.

(б)  $2M_1M_3 - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 = 0$ ,  $M_1 \neq 0$ . С учётом (1) имеем:

$$0 = M_3(2M_1M_3 - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3) = M_1(2M_3^2 + (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_1),$$

что в силу  $M_1 \neq 0$  даёт  $2M_3^2 + (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_1 = 0$ . Получаем множество  $\mathcal{C}_5$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что в его точках  $\text{rank } \mathcal{N} < 4$ .

(с)  $\alpha_2 = 0$ ,  $M_1 \neq 0$ ,  $2M_1M_3 - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 \neq 0$ . В этом случае матрица  $\mathcal{N}$  приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 4\gamma M_1 & 0 & 4M_3 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma\xi & 0 & 0 \\ 4M_1\alpha_1 & 0 & 0 & 2\alpha_1 & 0 & 2(2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 \\ \gamma\alpha_1 + 2M_1^2 & 0 & \alpha_3 & M_1 & 0 & 2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 \end{pmatrix}.$$

Её ранг меньше четырёх в точности тогда, когда  $\mathcal{N}_{1346}^{1234} = 0$ . Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{N}_{1346}^{1234} = -16\gamma\xi(\gamma M_1(2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3^2 + \\ &+ M_3(2M_1\alpha_1(2M_1\alpha_3 + \gamma M_3) - (\gamma\alpha_1 + 2M_1^2)(2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3)) = \\ &= -16\gamma\xi(\gamma M_1(2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3^2 + \gamma M_1(2\alpha_1 + \gamma)\alpha_1^2 + \\ &+ 2M_1M_3\alpha_1(2M_1\alpha_3 + \gamma M_3) - 2M_1^2M_3\alpha_3(2\alpha_1 + \gamma)) = \\ &= -16\gamma^2\xi M_1(2\alpha_1 + \gamma + 2M_3(M_3\alpha_1 - M_1\alpha_3)). \end{aligned}$$

Здесь мы снова пользовались равенствами (1) и (2). Так как по предположению  $\xi \neq 0$  и  $M_1 \neq 0$ , то  $2\alpha_1 + \gamma + 2M_3(M_3\alpha_1 - M_1\alpha_3) = 0$ , следовательно, с учётом (1) и (2), имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_3(2\alpha_1 + \gamma + 2M_3(M_3\alpha_1 - M_1\alpha_3)) = (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 - 2M_1M_3(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) = \\ &= (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 - 2M_1M_3, \end{aligned}$$

что противоречит предположению.

2.  $2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 = 0$ ,  $\mathbf{M}_2 \neq \mathbf{0}$ . Рассмотрим вместо функции  $K$  первый интеграл  $\tilde{K}$ . Матрица Якоби соответствующего отображения  $H \times \tilde{K} \times f_1 \times f_2: \mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) \rightarrow \mathbb{R}^4$  имеет

следующий вид:

$$\tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 2M_1 & 2M_2 & 4M_3 & 2\alpha_1 + \gamma & -2\alpha_2 & 0 \\ 4M_1\tilde{\xi} + 4\alpha_3\tilde{\eta} & 4M_2\tilde{\xi} & 2\gamma\tilde{\eta} & 2\gamma\tilde{\xi} & 0 & -4\alpha_3\tilde{\xi} + 4M_1\tilde{\eta} \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2\alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix},$$

где  $\tilde{\xi} = M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \gamma\alpha_1 + \frac{\gamma^2}{4}$ ,  $\tilde{\eta} = 2M_1\alpha_3 + \gamma M_3$ . Элементарными преобразованиями строк и столбцов она приводится к матрице

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{N}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4M_3 & \gamma & -4\alpha_2 & 0 \\ 4\gamma\alpha_3\tilde{\eta} & 0 & 2\gamma\tilde{\eta} & 2\gamma\tilde{\xi} & 0 & 4\gamma M_1\tilde{\eta} \\ -4M_1\alpha_1 & -4M_2\alpha_1 & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2(2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 \\ \gamma\alpha_1 - 2M_1^2 & \gamma\alpha_2 - 2M_1M_2 & \alpha_3 & M_1 & M_2 & \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4M_3 & \gamma & -4\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma\tilde{\xi} & 0 & 0 \\ -4M_1\alpha_1 & -4M_2\alpha_1 & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2(2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 \\ \gamma\alpha_1 - 2M_1^2 & \gamma\alpha_2 - 2M_1M_2 & \alpha_3 & M_1 & M_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(мы учли, что  $\tilde{\eta} = 0$ ). Из предположения  $\tilde{K} \neq 0$  следует  $\tilde{\xi} \neq 0$ . Поэтому условия  $\tilde{\mathcal{N}}_{1234}^{1234} = \tilde{\mathcal{N}}_{1234}^{1234} = 0$  влекут равенство

$$\alpha_1(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1)(M_3^2 + \alpha_2^2) = 0, \quad (10)$$

а условия  $\tilde{\mathcal{N}}_{1346}^{1234} = \tilde{\mathcal{N}}_{1456}^{1234} = \tilde{\mathcal{N}}_{2346}^{1234} = \tilde{\mathcal{N}}_{2456}^{1234} = 0$  — равенство

$$\alpha_3(2\alpha_1 + \gamma)(M_3^2 + \alpha_2^2)((\gamma\alpha_1 - 2M_1^2)^2 + (\gamma\alpha_2 - 2M_1M_2)^2) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим все возможности для равенства (10).

(а)  $M_3 = \alpha_2 = 0$ . В силу (2) имеем  $M_1 = 0$  или  $\alpha_1 = 0$ .

- i.  $M_1 = 0$ . Получаем множество  $\mathcal{C}_4$ . Это множество действительно является критическим, так как в его точках первые две строки матрицы  $\tilde{\mathcal{N}}$  становятся линейно зависимы.
- ii.  $\alpha_1 = 0, M_1 \neq 0$ . Из условия  $2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 = 0$  получаем  $\alpha_3 = 0$ , что противоречит (1).

(б)  $\alpha_1 = 0, M_3^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ . Из (11) имеем  $\alpha_3 = 0$  или  $\gamma\alpha_1 - 2M_1^2 = \gamma\alpha_2 - 2M_1M_2 = 0$ .

- i.  $\alpha_3 = 0$ . Из (1) и (2) получаем  $M_2 = 0$ , что противоречит предположению.
- ii.  $\gamma\alpha_1 - 2M_1^2 = \gamma\alpha_2 - 2M_1M_2 = 0$ . Так как  $\alpha_1 = 0$ , то  $M_1 = \alpha_2 = 0$ , а из условия  $2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 = 0$  получаем  $M_3 = 0$ . Значит, данная точка принадлежит множеству  $\mathcal{C}_4$ .

(в)  $M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1 = 0, \alpha_1 \neq 0, M_3^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ . В силу (11) возможны два случая.

- i.  $\alpha_3(2\alpha_1 + \gamma) = 0$ . Из равенства (8) следует  $M_2M_3 = 0$ . В силу предположения  $M_2 \neq 0$  это даёт  $M_3 = 0$ . Тогда из (1) и (2) получаем противоречие:

$$0 = \alpha_1(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1) = -M_2\alpha_2^2 - M_2\alpha_1^2 = -M_2.$$

- ii.  $\gamma\alpha_1 - 2M_1^2 = \gamma\alpha_2 - 2M_1M_2 = 0$ . Учитывая, что  $\gamma M_3 = -2M_1\alpha_3$ , из (2) получаем

$$0 = \gamma\alpha_1 \cdot M_1 + \gamma\alpha_2 \cdot M_2 + \gamma M_3 \cdot \alpha_3 = 2M_1(M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2).$$

По предположению  $\alpha_1 \neq 0$ , следовательно  $M_1 \neq 0$ , и последнее равенство влечёт  $M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 = 0$ . Отсюда получаем  $K = 0$ , что противоречит предположению.

Теорема 1 полностью доказана.

### 3. Решение критических подсистем в квадратурах

Теперь мы готовы выписать явные решения пяти критических подсистем в эллиптических квадратурах. Каждое из них представляет собой однопараметрическое семейство (параметризованное значением  $h$  гамильтониана) замкнутых интегральных траекторий (критических окружностей), возможно, вырождающихся в точки. В приведенной ниже теореме для каждой интегральной траектории мы указываем её параметризацию вещественным параметром  $u$ , удовлетворяющим дифференциальному уравнению вида  $\dot{u}^2 = P(u)$ , где  $P$  — многочлен четвёртой степени.

Также для каждой из пяти критических подсистем мы приводим полное описание топологии слоения фазового пространства на интегральные траектории (одномерного слоения Лиувилля) в терминах молекулы (см. [17]) — графа, рёбрам которого отвечают однопараметрические семейства замкнутых траекторий, а вершинам — их бифуркации. Каждая бифуркация кодируется некоторой буквой (атомом). В нашем случае возникают бифуркации следующих четырёх типов.

1. Атом  $A$  — вырождение окружности в точку.
2. Атом  $A_\mu$  — факторизация окружности по инволюции. Слоение в окрестности особого слоя устроено как расслоенная на окружности лента Мёбиуса. При этом неособые слои двулистно накрывают особый слой.
3. Атом  $B$  — перестройка двух окружностей в одну через “восьмёрку”.
4. Атом  $C_2$  — перестройка двух окружностей в две (рис. 1).

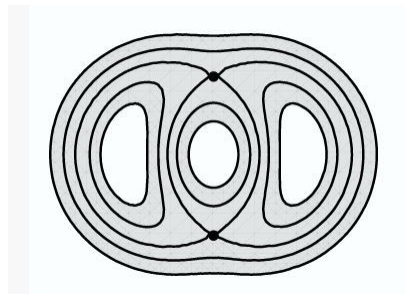


Рис. 1: Атом  $C_2$

**ТЕОРЕМА 2.** В интегрируемом случае Ковалевской – Чаплыгина явные решения критических подсистем с фазовыми пространствами  $C_1 - C_5$  имеют следующий вид.

$$\mathbf{C}_1: \quad M_1^2 = \frac{h-1}{2}A(u), \quad \alpha_1 = \frac{1}{2\gamma}(h+1-2u^2)A(u),$$

$$M_2^2 = u^2A(u), \quad \alpha_2^2 = \frac{2(h-1)}{\gamma^2}u^2(A(u))^2, \quad (12)$$

$$M_3^2 = \frac{h-1}{8\gamma^2}(h+1+2u^2)^2(A(u))^2, \quad \alpha_3^2 = A(u),$$

$$\text{где } A(u) = \frac{2\gamma^2}{\sqrt{\gamma^4 + \gamma^2((2u^2 + h + 1)^2 - 16u^2) + \gamma^2}}; \quad (13)$$

$$\dot{u}^2 = (2u^2 + h + 1)^2 - 16u^2 + \gamma^2, \quad u \in [-\infty, +\infty]; \quad h \geq 1. \quad (14)$$

При каждом  $h > 1$  в фазовом пространстве имеем две замкнутые траектории, которые при  $h = 1$  превращаются в одну траекторию. При этом соответствующее слоение фазового пространства тривиально (рис. 2).

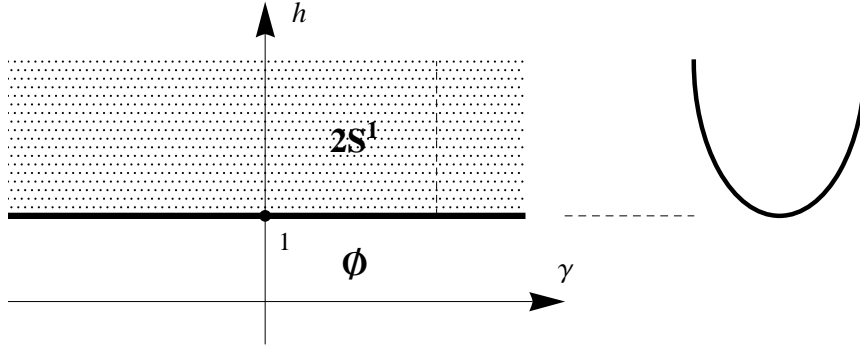


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма на плоскости  $(\gamma, h)$  для критической подсистемы на  $\mathcal{C}_1$

$$\mathcal{C}_2: \quad M_1^2 = \frac{1-\kappa}{\kappa} u^2 B(u), \quad \alpha_1 = -\frac{1}{\gamma} \left( \left( \frac{u^2}{\kappa} - 1 \right) B(u) + \frac{\gamma^2}{4} \right),$$

$$M_2^2 = u^2 B(u), \quad \alpha_2^2 = \frac{1-\kappa}{\gamma^2 \kappa} \left( \left( \frac{u^2}{\kappa} + 1 \right) B(u) + \frac{\gamma^2}{4} \right), \quad (15)$$

$$M_3^2 = \frac{4(1-\kappa)}{\gamma^2 \kappa} u^2 (B(u))^2, \quad \alpha_3^2 = B(u),$$

где  $B(u) = \frac{\gamma^2(16\kappa - \gamma^2)}{4\gamma^2(u^2/\kappa + 1) + 8\sqrt{\gamma^2(4\kappa(u^2/\kappa + 1)^2 + (\gamma^2 - 16\kappa)u^2)}}$ ,  $\kappa = \frac{h+1}{2} + \frac{\gamma^2}{8}$ ; (16)

$$\dot{u}^2 = \gamma^2 u^2 + 4\kappa \left( \left( \frac{u^2}{\kappa} + 1 \right)^2 - 4u^2 \right), \quad u \in [-\infty, +\infty]; \quad (17)$$

$$h \in [-1 - \gamma^2/8, 1 - \gamma^2/4], \quad |\gamma| \leq 4. \quad (18)$$

При каждом  $h \in (-1 - \gamma^2/8, 1 - \gamma^2/4)$  в фазовом пространстве имеем две замкнутые траектории, которые при  $h = 1 - \gamma^2/4$  превращаются в одну траекторию (без бифуркации), а при  $h = -1 - \gamma^2/8$  вырождаются в две точки (рис. 3).

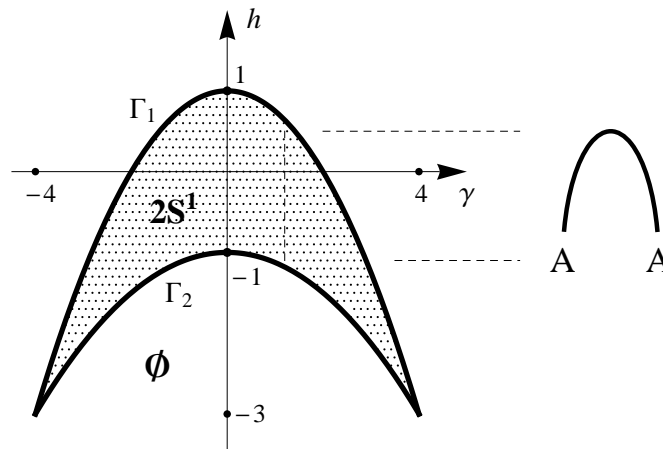


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма на плоскости  $(\gamma, h)$  для критической подсистемы на  $\mathcal{C}_2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_3: \quad M_1 &= 0, & \alpha_1 &= u, \\
M_2 &= 0, & \alpha_2^2 &= 1 - u^2, \\
M_3^2 &= \frac{h+1}{2} - \frac{\gamma}{2}u - u^2, & \alpha_3 &= 0;
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\dot{u}^2 = 8(1-u^2)(h+1-\gamma u-2u^2), \tag{20}$$

$$u \in [-1, 1] \cap [\chi_-, \chi_+], \quad \text{где } \chi_{\pm} = -\frac{\gamma}{4} \pm \sqrt{\frac{h+1}{2} + \frac{\gamma^2}{16}}; \tag{21}$$

$$h \geq -1 - \gamma^2/8 \text{ при } |\gamma| \leq 4, \quad h \geq 1 - |\gamma| \text{ при } |\gamma| > 4. \tag{22}$$

Каждому  $h$  в фазовом пространстве при  $|h-1| < |\gamma|$  отвечает одна замкнутая траектория, при  $h \in (-1 - \gamma^2/8, 1 - |\gamma|)$ ,  $|\gamma| < 4$ , и при  $h > 1 + |\gamma|$  — две замкнутые траектории. Прямым  $h = 1 + \gamma$  при  $\gamma > -4$  и  $h = 1 - \gamma$  при  $\gamma < 4$  соответствует перестройка двух траекторий в одну (бифуркация типа В); прямым  $h = 1 + \gamma$  при  $\gamma < -4$ ,  $h = 1 - \gamma$  при  $\gamma > 4$  и параболе  $h = -1 - \gamma^2/8$  при  $|\gamma| < 4$  — вырождение траектории (двух траекторий) в точку (две точки) (рис. 4).

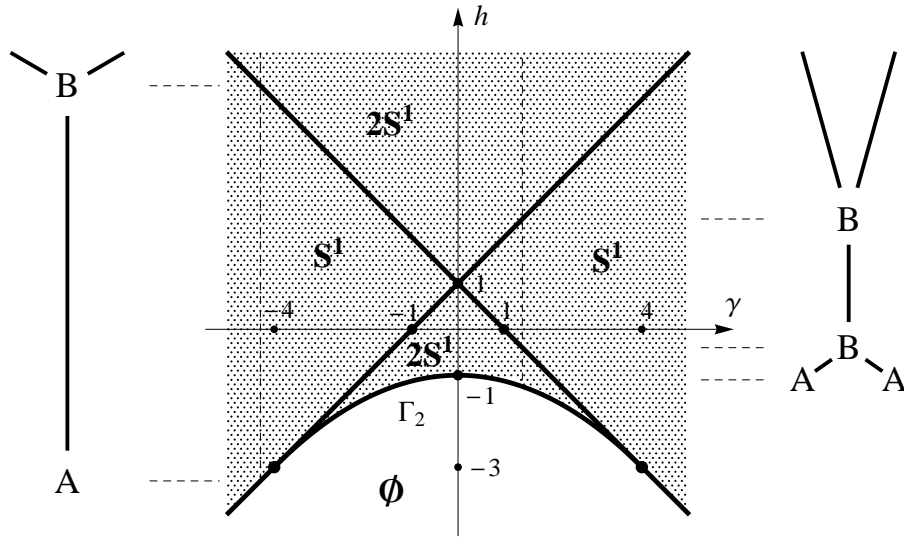


Рис. 4: Бифуркационная диаграмма на плоскости  $(\gamma, h)$  для критической подсистемы на  $\mathcal{C}_3$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_4: \quad M_1 &= 0, & \alpha_1 &= u, \\
M_2^2 &= h - \gamma u - u^2, & \alpha_2 &= 0, \\
M_3 &= 0, & \alpha_3^2 &= 1 - u^2;
\end{aligned}$$

$$\dot{u}^2 = 4(1-u^2)(h-u^2-\gamma u), \quad u \in [-1, 1] \cap [\nu_-, \nu_+], \quad \text{где } \nu_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{h + \frac{\gamma^2}{4}};$$

$$h \geq -\gamma^2/4 \text{ при } |\gamma| \leq 2, \quad h \geq 1 - |\gamma| \text{ при } |\gamma| > 2.$$

Каждому  $h$  в фазовом пространстве при  $|h-1| < |\gamma|$  отвечает одна замкнутая траектория, при  $h \in (-\gamma^2/4, 1 - |\gamma|)$ ,  $|\gamma| < 2$ , и при  $h > 1 + |\gamma|$  – две замкнутые траектории. Прямым  $h = 1 + \gamma$  при  $\gamma > -2$  и  $h = 1 - \gamma$  при  $\gamma < 2$  соответствует перестройка двух траекторий в одну (бифуркация типа B); прямым  $h = 1 + \gamma$  при  $\gamma < -2$ ,  $h = 1 - \gamma$  при  $\gamma > 2$  и параболе  $h = -\gamma^2/4$  при  $|\gamma| < 2$  – вырождение траектории (двух траекторий) в точку (две точки) (рис. 5).

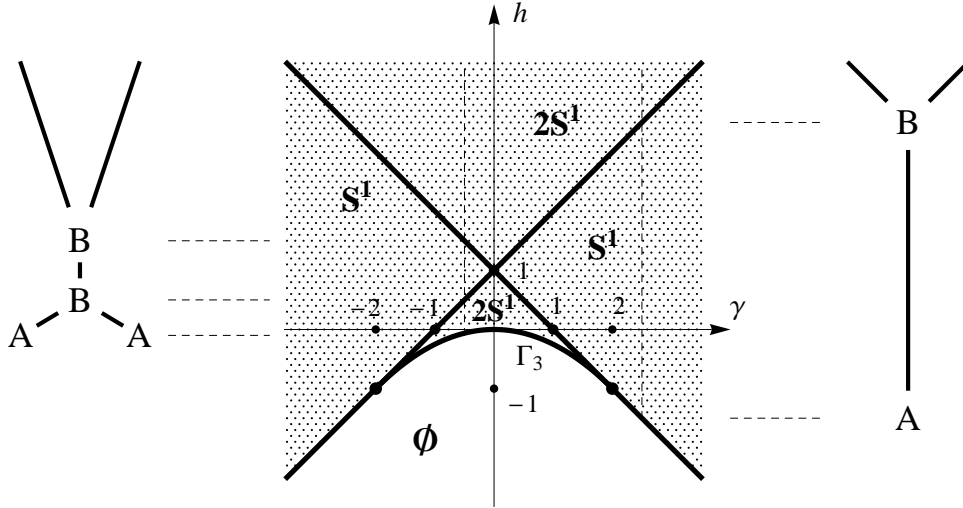


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма на плоскости  $(\gamma, h)$  для критической подсистемы на  $C_4$

$$\begin{aligned}
 C_5: \quad M_1^2 &= \frac{h+1}{\gamma}(2u+\gamma), & \alpha_1 &= u, \\
 M_2 &= 0, & \alpha_2^2 &= 1 + \frac{2(h+1)}{\gamma}u - u^2, \\
 M_3^2 &= -u^2 - \frac{\gamma}{2}u, & \alpha_3^2 &= -\frac{2(h+1)}{\gamma}u;
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\dot{u}^2 = 8u(2u+\gamma) \left( u^2 - \frac{2(h+1)}{\gamma}u - 1 \right), \tag{24}$$

$$u \in [0, \min\{|\gamma|/2, \tau\}] \text{ при } \gamma < 0, \quad u \in [-\min\{|\gamma|/2, \tau\}, 0] \text{ при } \gamma > 0, \tag{25}$$

$$\text{где } \tau = -\frac{h+1}{|\gamma|} + \sqrt{\frac{(h+1)^2}{\gamma^2} + 1}; \quad h \geq -1.$$

Каждому значению  $h > -1$  при  $h \neq -\gamma^2/4$  в фазовом пространстве отвечает две замкнутых траектории. Параболе  $h = -\gamma^2/4$  соответствует перестройка двух траекторий в две (бифуркация типа  $C_2$ ). Прямой  $h = -1$  при  $|\gamma| < 2$  соответствует бифуркация типа  $A_\mu$ , а при  $|\gamma| > 2$  – “склейка” двух окружностей в одну без бифуркации (рис. 6).

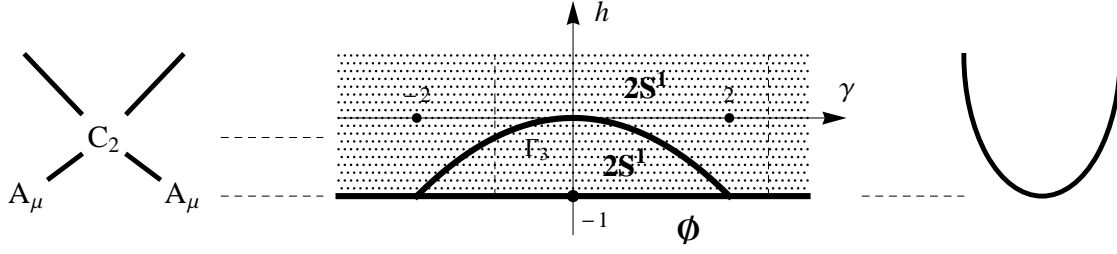


Рис. 6: Бифуркационная диаграмма на плоскости  $(\gamma, h)$  для критической подсистемы на  $\mathcal{C}_5$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В приведенных выше формулах для множеств  $\mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_2$  при бесконечных значениях параметра и соответствующие выражения понимаются как пределы.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. На рисунках 3 – 6 через  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  обозначены соответственно части парабол  $h = 1 - \gamma^2/4$ ,  $h = -1 - \gamma^2/8$ ,  $h = -\gamma^2/4$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим критическую подсистему на  $\mathcal{C}_1$ . Из (4), (1) и определения множества  $\mathcal{C}_1$  имеем:

$$M_1^2 + M_3^2 - \alpha_2^2 = \frac{h-1}{2}; \quad (26)$$

$$\gamma\alpha_1 = M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2; \quad (27)$$

$$\gamma\alpha_2 = 2M_1M_2. \quad (28)$$

Подстановка (27) и (28) в (1) даёт

$$(M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2)^2 = 4M_2^2\alpha_3^2 - \gamma^2\alpha_3^2 + \gamma^2, \quad (29)$$

а в (2) —

$$M_1(M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2) = -\gamma M_3\alpha_3. \quad (30)$$

Подставляя (29) и выражение для  $M_3^2$  из (26) в равенство (30), возведённое в квадрат, получим

$$M_1^2(4M_2^2\alpha_3^2 - \gamma^2\alpha_3^2 + \gamma^2) = \gamma^2 \left( \frac{h-1}{2} - M_1^2 + \alpha_2^2 \right) \alpha_3^2,$$

что с учётом (28) даёт

$$M_1^2 = \frac{h-1}{2} \alpha_3^2. \quad (31)$$

Отсюда, в частности, следует, что  $h \geq 1$  (в случае  $\alpha_3 = M_1 = 0$  это легко видеть из (28), (26)). Равенства (29) и (30) теперь приобретают вид

$$\left( M_2^2 + \frac{h+1}{2} \alpha_3^2 \right)^2 = 4M_2^2\alpha_3^2 - \gamma^2\alpha_3^2 + \gamma^2; \quad (32)$$

$$M_3^2 = \frac{h-1}{2\gamma^2} \left( M_2^2 + \frac{h+1}{2} \alpha_3^2 \right). \quad (33)$$

Из (30), (31), (27) и (28) находим:

$$M_1M_3 = -\frac{h-1}{2\gamma} (M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2) \alpha_3 = -\frac{h-1}{2\gamma} \left( M_2^2 + \frac{h+1}{2} \alpha_3^2 \right) \alpha_3; \quad (34)$$

$$\alpha_1\alpha_3 = \frac{1}{\gamma} \left( -M_2^2 + \frac{h+1}{2} \alpha_3^2 \right) \alpha_3; \quad (35)$$

$$M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1 = \frac{M_2}{\gamma} (M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2) = \frac{M_2}{\gamma} \left( M_2^2 + \frac{h-3}{2} \alpha_3^2 \right). \quad (36)$$

Положим  $u = M_2/\alpha_3$ . Из (34), (35), (36) в силу системы (7) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{\alpha_3^2} ((2M_1M_3 - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3)\alpha_3 - (2M_1\alpha_2 - 2M_2\alpha_1)M_2) = \\ &= -\gamma - \frac{2}{\gamma\alpha_3^2} \left( \left( M_2^2 + \frac{h+1}{2}\alpha_3^2 \right)^2 - 4M_2^2\alpha_3^2 \right) = \gamma \left( 1 - \frac{2}{\alpha_3^2} \right) \end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы использовали (32)). Возводя в квадрат и снова используя (32), получим:

$$\dot{u}^2 = \gamma^2 + \frac{4}{\alpha_3^4} \gamma^2 (1 - \alpha_3^2) = \gamma^2 + \frac{4}{\alpha_3^4} \left( \left( M_2^2 + \frac{h+1}{2}\alpha_3^2 \right)^2 - 4M_2^2\alpha_3^2 \right) = \gamma^2 + (2u^2 + h + 1)^2 - 16u^2.$$

Таким образом, получили уравнение (14). Также из последней цепочки равенств находим выражение (13) для  $\alpha_3^2$  через  $u$ . Параметризация фазовых переменных (12) теперь следует из равенств (27), (28), (31), (33).

Поскольку каждому значению  $u$  (в том числе  $u = \infty$ ) отвечают ровно две пары значений  $(M_2, \alpha_3)$  (отличающиеся знаком), заключаем, что уравнение (32) задаёт на плоскости  $\mathbb{R}^2(M_2, \alpha_3)$  окружность, симметричную относительно начала координат. Этой окружности при  $h > 1$  соответствуют две окружности в фазовом пространстве, различающиеся знаком переменной  $M_3$  (знак  $M_1$  определяется однозначно равенством (30)). При  $h = 1$  эти две окружности превращаются в одну, образуя тривиальное слоение (без особенностей). В качестве параметра этого семейства окружностей можно взять  $\sqrt{h-1}$  с учётом знака.

Критическая подсистема на  $\mathbf{C}_2$  рассматривается аналогично. Из (4), (1) и определения множества  $\mathcal{C}_2$  имеем:

$$M_3^2 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2 = \frac{h+1}{2} + \frac{\gamma^2}{8} = \kappa; \quad (37)$$

$$\gamma\alpha_1 = - \left( M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right); \quad (38)$$

$$\gamma M_3 = -2M_1\alpha_3. \quad (39)$$

Из этих трёх равенств получаем:

$$\left( M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right)^2 = \gamma^2(\alpha_1^2 + M_3^2) + \alpha_3^2(4M_2^2 + \gamma^2) = \gamma^2\kappa + 4M_2^2\alpha_3^2. \quad (40)$$

Подстановка (38) и (39) в (2) даёт

$$M_1 \left( M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) = \gamma M_2 \alpha_2. \quad (41)$$

Подставляя теперь (40) и выражение для  $\alpha_2^2$  из (1) в равенство (41), возведённое в квадрат, с учётом (37) получим

$$M_1^2(\gamma^2\kappa + 4M_2^2\alpha_3^2) = \gamma^2 M_2^2(1 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2) = \gamma^2 M_2^2(1 + M_3^2 - \kappa).$$

Это равенство вместе с (39) влечёт

$$\kappa M_1^2 = (1 - \kappa) M_2^2. \quad (42)$$

При  $M_1^2 + M_2^2 \neq 0$  отсюда следует  $\kappa \in [0, 1]$ . Если же  $M_1 = M_2 = 0$ , то из (39)  $M_3 = 0$  и в силу (37) также имеем  $\kappa = \alpha_1^2 + \alpha_3^2 \in [0, 1]$ .

Заметим, что из (38) следует  $\kappa \neq 0$ . Поэтому равенства (40) и (41) можно переписать в виде

$$\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^2 = \gamma^2 \kappa + 4M_2^2 \alpha_3^2; \quad (43)$$

$$\alpha_2^2 = \frac{1-\kappa}{\gamma^2 \kappa} \left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right). \quad (44)$$

Из (39), (38), (42) и (41) находим:

$$2M_1 M_3 \alpha_3 = -\frac{4}{\gamma} M_1^2 \alpha_3^2 = -\frac{4(1-\kappa)}{\gamma \kappa} M_2^2 \alpha_3^2; \quad (45)$$

$$-(2\alpha_1 + \gamma) \alpha_3^2 = \frac{2}{\gamma} \left(M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \alpha_3^2 = \frac{2}{\gamma} \left(\frac{M_2^2}{\kappa} - \alpha_3^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \alpha_3^2; \quad (46)$$

$$\begin{aligned} 2(M_1 \alpha_2 - M_2 \alpha_1) M_2 &= \frac{2M_1^2}{\gamma} \left(M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right) + \frac{2M_2^2}{\gamma} \left(M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right) = \\ &= \frac{2}{\gamma} \left(\frac{M_2^2}{\kappa} \left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \frac{\gamma^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{\kappa} - 2\right) M_2^2 \alpha_3^2\right). \end{aligned} \quad (47)$$

Снова положим  $u = M_2/\alpha_3$ . Из (45), (46), (47) в силу системы (7) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{\alpha_3^2} ((2M_1 M_3 - (2\alpha_1 + \gamma) \alpha_3) \alpha_3 - (2M_1 \alpha_2 - 2M_2 \alpha_1) M_2) = \\ &= -\frac{2}{\gamma \alpha_3^2} \left( \left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right)^2 - 4M_2^2 \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4} \left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right) \right) = \\ &= -\frac{2}{\gamma \alpha_3^2} \left( \gamma^2 \kappa - \frac{\gamma^4}{16} - \frac{\gamma^2}{4} \left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right) \right) \end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы использовали (43)). Возводя в квадрат и снова используя (43), получим:

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= \frac{4}{\gamma^2 \alpha_3^4} \left( \left(\gamma^2 \kappa - \frac{\gamma^4}{16}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2} \left(\gamma^2 \kappa - \frac{\gamma^4}{16}\right) \left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right) + \frac{\gamma^4}{16} \left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right)^2 \right) = \\ &= \frac{4}{\gamma^2 \alpha_3^4} \left( \left(\gamma^2 \kappa - \frac{\gamma^4}{16}\right) \left( \left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right)^2 - 4M_2^2 \alpha_3^2 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha_3^4} \left( 4\kappa \left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right)^2 + (\gamma^2 - 16\kappa) M_2^2 \alpha_3^2 \right) = 4\kappa \left(\frac{u^2}{\kappa} + 1\right)^2 + (\gamma^2 - 16\kappa) u^2. \end{aligned}$$

Итак, мы получили уравнение (17). Из (43) получаем квадратное уравнение на  $\alpha_3^2$ :

$$\left( \left(\frac{u^2}{\kappa} + 1\right)^2 - 4u^2 \right) \alpha_3^4 + \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{u^2}{\kappa} + 1\right) \alpha_3^2 + \left(\frac{\gamma^4}{16} - \gamma^2 \kappa\right) = 0,$$

откуда находим выражение (16) для  $\alpha_3^2$  через  $u$ . Это уравнение имеет неотрицательный корень в точности тогда, когда  $\gamma^4/16 - \gamma^2 \kappa \leq 0$ , что вместе с условием  $\kappa \in [0, 1]$  даёт  $\kappa \in [\gamma^2/16, 1]$ . Отсюда находим промежуток (18) изменения  $h$ . Заметим, что при  $|\gamma| > 4$  множество  $\mathcal{C}_2$  оказывается пустым. Параметризация фазовых переменных (15) следует из равенств (38), (39), (42), (44).

Выясним структуру слоения множества  $\mathcal{C}_2$  на интегральные траектории. Как и в случае множества  $\mathcal{C}_1$ , уравнение (43) задаёт на плоскости  $\mathbb{R}^2(M_2, \alpha_3)$  окружность, симметричную относительно начала координат. Этой окружности при  $h \in (-1 - \gamma^2/8, 1 - \gamma^2/4)$  отвечают две окружности в фазовом пространстве, различающиеся знаком переменной  $\alpha_2$  (знак  $M_1$  определяется однозначно равенством (41)). При  $h = 1 - \gamma^2/4$  эти две окружности превращаются в одну, образуя тривиальное слоение (в качестве параметра этого семейства окружностей можно взять  $\sqrt{1 - \kappa}$  с учётом знака). При  $h = -1 - \gamma^2/8$  имеем  $\kappa = \gamma^2/16$ ,  $\alpha_3 = M_2 = 0$ , следовательно, две окружности вырождаются в две точки.

Рассмотрим критическую подсистему на множестве  $\mathcal{C}_3$ . Равенства (1) и (4) в этом случае задают окружности на плоскостях  $\mathbb{R}^2(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\mathbb{R}^2(\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1; \quad (48)$$

$$M_3^2 + \left(\alpha_1 + \frac{\gamma}{4}\right)^2 = \frac{h+1}{2} + \frac{\gamma^2}{16}. \quad (49)$$

Полагая  $u = \alpha_1$ , отсюда сразу получаем формулы (19) и промежуток (21) изменения  $u$ . Неравенства (22) на  $h$  — условия непустоты промежутка (21). Дифференциальное уравнение (20) на  $u$  получается непосредственно из уравнений (7).

Обратимся к фазовой топологии. Рассмотрим случай  $\gamma > 0$  (случай  $\gamma < 0$  аналогичен). При  $-1 < \chi_- < \chi_+ < 1$  уравнения (48), (49) задают две окружности, различающиеся знаком переменной  $\alpha_2$ . Каждая из этих окружностей двулистно покрывает отрезок  $[\chi_-, \chi_+]$  (листья отличаются знаком переменной  $M_3$ ). При  $\chi_- < -1 < \chi_+ < 1$  уравнения (48), (49) задают одну окружность, четырёхлистно покрывающую отрезок  $[-1, \chi_+]$  (листья отличаются знаками переменных  $M_3, \alpha_2$ ). Наконец, при  $\chi_- < -1 < 1 < \chi_+$  уравнения (48), (49) задают две окружности, различающиеся знаком переменной  $M_3$ . Каждая из этих окружностей двулистно покрывает отрезок  $[-1, 1]$  (листья отличаются знаком переменной  $\alpha_2$ ). При  $-1 = \chi_- < \chi_+ < 1$  и при  $\chi_- < -1 < 1 = \chi_+$  происходит перестройка двух окружностей в одну (бифуркация типа  $B$ ). При  $-1 < \chi_- = \chi_+ < 1$  и при  $\chi_- < \chi_+ = -1 < 1$  происходит вырождение соответствующих окружностей в точки. Остаётся выразить все случаи взаимного расположения отрезков  $[-1, 1]$  и  $[\chi_-, \chi_+]$  в терминах переменных  $h, \gamma$ .

Критическая подсистема на множестве  $\mathcal{C}_4$  рассматривается точно так же, как и на  $\mathcal{C}_3$ .

Остаётся рассмотреть критическую подсистему на  $\mathcal{C}_5$ . Из определения множества  $\mathcal{C}_5$ , а также равенств (2), (4) имеем:

$$M_3^2 + \left(\alpha_1 + \frac{\gamma}{4}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{16}; \quad (50)$$

$$M_1\alpha_1 + M_3\alpha_3 = 0; \quad (51)$$

$$M_1^2 + \alpha_3^2 = h + 1. \quad (52)$$

Снова полагая  $u = \alpha_1$ , из (50) сразу получаем параметризацию для  $M_3$ . Затем из (51) и (52) находим выражения для  $M_1$  и  $\alpha_3$  через  $u$ . Наконец, из (1) получаем выражение для  $\alpha_2$ . Дифференциальное уравнение (24) на  $u$  находится из (7). Условие  $h \geq -1$  следует из (52), а промежуток (25) изменения  $u$  определяется из условий неотрицательности правых частей выражений (23) для  $M_1^2, M_3^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$ .

Изучим теперь фазовую топологию для данного случая. Пусть  $\gamma > 0$  (случай  $\gamma < 0$  аналогичен). Анализируя формулы (23), заключаем, что каждому  $h > -1$  при  $\gamma/2 < \tau$  соответствует в фазовом пространстве две окружности, различающиеся знаком переменной  $\alpha_2$ . Каждая из этих окружностей четырёхлистно покрывает отрезок  $[-\gamma/2, 0]$  (листья отличаются знаками переменных  $M_1, \alpha_3$ ). Иначе можно сказать, что каждая из этих окружностей двулистно покрывает окружность (50), при этом листья отличаются знаком обеих переменных  $M_1, \alpha_3$ . При

$h = -1$  имеем  $M_1 = \alpha_3 = 0$ , и происходит проективизация каждой из этих окружностей. Это соответствует бифуркации типа  $A_\mu$ .

Каждому  $h > -1$  при  $\gamma/2 > \tau$  соответствует в фазовом пространстве две окружности, различающиеся знаком переменной  $M_1$ . Каждая из этих окружностей четырёхлистно покрывает отрезок  $[-\tau, 0]$ , при этом листы отличаются знаками переменных  $M_3$  и  $\alpha_2$  (знак переменной  $\alpha_3$  будет определяться однозначно из (51)). При  $h = -1$  получаем  $M_1 = 0$ , и эти две окружности “слипаются” в одну, образуя тривиальное слоение (в качестве параметра этого семейства окружностей можно взять  $\sqrt{h+1}$  с учётом знака). При  $\gamma/2 = \tau$  происходит перестройка двух окружностей в две (бифуркация типа  $C_2$ ). Остаётся заметить, что равенство  $\gamma/2 = \tau$  выполняется на параболе  $h = -\gamma^2/4$ .

Теорема 2 полностью доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ 10.** *Появление неориентируемого атома  $A_\mu$  объясняется тем, что фазовые пространства критических подсистем, — это, вообще говоря, симплектические многообразия с особенностями. В данном случае особая траектория атома  $A_\mu$  — “место стыковки” множеств  $C_3$  и  $C_5$ .*

## 4. Бифуркационная диаграмма отображения момента

Имея явное описание множества критических точек отображения момента, легко построить его бифуркационную диаграмму, т. е. образ этого множества на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, k)$  значений первых интегралов.

**ТЕОРЕМА 3.** *Бифуркационная диаграмма отображения момента  $H \times K: P^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  в случае Ковалевской – Чаплыгина состоит из пяти кривых (частей трёх прямых и двух парабол):*

- $l_1: \quad k = 0, \quad h \geq 1;$
- $l_2: \quad k = \frac{\gamma^2}{2} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{8} - h \right), \quad h \in \left[ -1 - \frac{\gamma^2}{8}, 1 - \frac{\gamma^2}{4} \right];$
- $l_3: \quad k = \gamma^2, \quad h \geq \begin{cases} -1 - \gamma^2/8, & \text{если } |\gamma| \leq 4, \\ 1 - |\gamma|, & \text{если } |\gamma| > 4; \end{cases}$
- $l_4: \quad k = (h - 1)^2, \quad h \geq \begin{cases} -\gamma^2/4, & \text{если } |\gamma| \leq 2, \\ 1 - |\gamma|, & \text{если } |\gamma| > 2; \end{cases}$
- $l_5: \quad k = (h + 1)^2 + \gamma^2, \quad h \geq -1.$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство получается прямой подстановкой уравнений, задающих множества  $C_1 - C_5$ , в формулы для первых интегралов с учётом ограничений на промежуток изменения значения  $h$  гамильтониана, описанных в теореме 2.

**ЗАМЕЧАНИЕ 11.** *Бифуркационная диаграмма вместе с условием компактности образа отображения момента при каждом фиксированном  $h$  позволяют определить образ отображения момента на всём фазовом пространстве  $P^4$  (рис. 7, 8, 9). На этих рисунках показано три принципиально различных случая:  $|\gamma| < 2$ ,  $2 < |\gamma| < 4$ ,  $|\gamma| > 4$ . Видно, что при  $|\gamma| > 4$  отрезок  $l_2$  отсутствует. Характерные точки бифуркационной диаграммы таковы:  $Q_1(1, 0)$ ,  $Q_2(-1, \gamma^2)$ ,  $Q_3(1 - |\gamma|, \gamma^2)$ ,  $Q_4(1 + |\gamma|, \gamma^2)$ ,  $Q_5(-1 - \gamma^2/8, \gamma^2)$ ,  $Q_6(1 - \gamma^2/4, \gamma^4/16)$ ,  $Q_7(-\gamma^2/4, (1 + \gamma^2/4)^2)$ .*

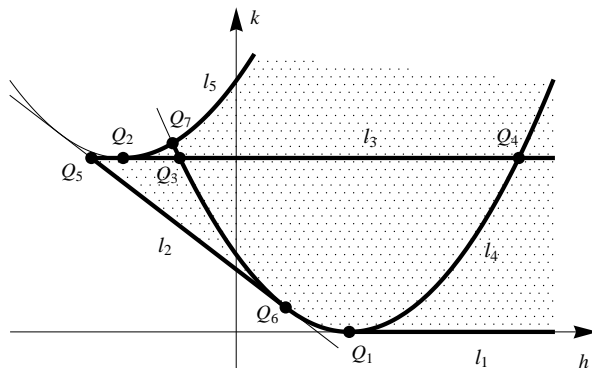


Рис. 7: Бифуркационная диаграмма и образ отображения момента для  $|\gamma| < 2$

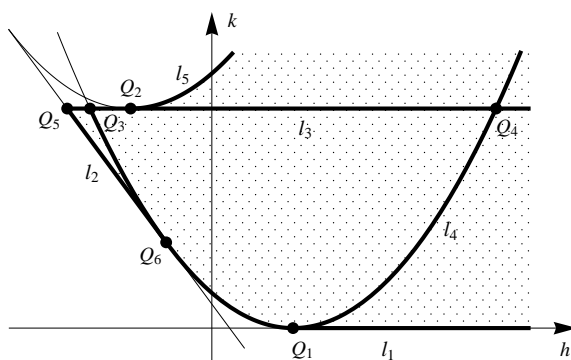


Рис. 8: Бифуркационная диаграмма и образ отображения момента для  $2 < |\gamma| < 4$

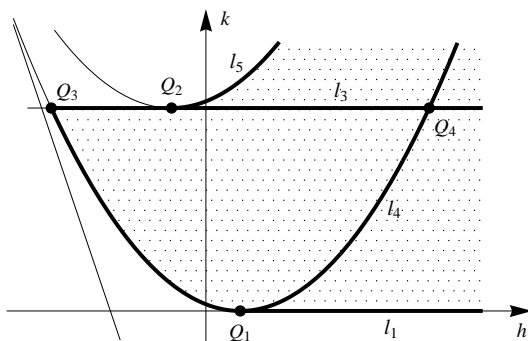


Рис. 9: Бифуркационная диаграмма и образ отображения момента для  $|\gamma| > 4$

## 5. Заключение

В настоящей работе на основе анализа первого дополнительного интеграла  $K$  (см. формулу (5)) проведено полное описание критических подсистем для интегрируемого случая Ковалевской – Чаплыгина в динамике твёрдого тела. Получена также другая форма дополнительного интеграла  $\tilde{K}$  (см. формулу (6)), благодаря которой удалось найти аналитически одну из критических подсистем.

Для каждой из найденных критических подсистем при фиксированных значениях гамильтониана  $H$  и параметра  $\gamma$  явно построены алгебраические решения в эллиптических квадратурах. Это позволяет получить полную качественную картину динамики на изоэнергетических поверхностях. Кроме того, описаны бифуркации интегральных траекторий при изменении

уровня энергии, что важно для понимания глобальной геометрии фазового потока.

Полученные результаты создают основу для детального исследования фазовой топологии и изоэнергетических поверхностей рассматриваемой интегрируемой системы. В частности, они позволяют в дальнейшем явно вычислить инварианты Фоменко – Цишанга (меченые молекулы) и построить полный топологический атлас не только случая Ковалевской – Чаплыгина, но и всего интегрируемого семейства Ковалевской – Чаплыгина – Горячева – Яхья.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yehia H.M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration: I. The case of axisymmetric forces // *Mech. Res. Com.* 1996. Vol. 23, №5. P. 423–427.
2. Tsiganov A. V. On the Kowalevski-Goryachev-Chaplygin gyrostat // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2002. Vol. 35, №22. P. L309–L318.
3. Цыганов А. В. Разделение переменных в гиростате Ковалевской–Горячева–Чаплыгина // *ТМФ.* 2003. Том 135, №2. С. 240–247.
4. Yehia H. M. Comment on “On the Kowalevsky–Goryachev–Chaplygin gyrostat” // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2002. Vol. 35, №49. P. 10669–10670.
5. Kowalevski S. Sur le probl’eme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe // *Acta Math.* 1889. Vol. 12. P. 177–232.
6. Харламов М. П. Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // *Прикл. матем. и механ.* 1983. Том 47, №6. С. 922–930.
7. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 200 с.
8. Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // *Матем. сб.* 2000. Том 191, №2. С. 3–42.
9. Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // *Нелинейная динам.* 2010. Том 6, №4. С. 769–805.
10. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твёрдого тела в жидкости // *Тр. отд. физ. наук общ-ва любителей естествознания.* 1903. Том 11, №2. С. 7–10.
11. Ryabov P. E., Orel O. E. Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem // *Regul. Chaotic Dyn.* 1998. Vol. 3, №2. P. 82–91.
12. Рябов П. Е. Фазовая топология задачи Чаплыгина о движении твёрдого тела в жидкости // *Механика твёрдого тела.* 2000. №30. С. 140–150.
13. Николаенко С. С. Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости // *Матем. сб.* 2014. Том 205, №2. С. 75–122.
14. Fomenko A. T., Nikolaenko S. S. The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid // *J. Geom. Phys.* 2015. Vol. 87. P. 115–133.
15. Ryabov P. E. Bifurcation sets in an integrable problem on motion of a rigid body in fluid // *Regul. Chaotic Dyn.* 1999. Vol. 4, №4. P. 59–76.

16. Ryabov P.E., Orel O.E. Topology, bifurcations and Liouville classification of Kirchhoff equations with an additional integral of fourth degree // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2001. Vol. 34, №11. P. 2149–2163.
17. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. В 2 т. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999. 444 с., 447 с.

## REFERENCES

1. Yehia, H.M. 1996, “New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration: I. The case of axisymmetric forces”, *Mech. Res. Com.*, vol. 23, no. 5, pp. 423–427.
2. Tsiganov, A.V. 2002, “On the Kowalevski-Goryachev-Chaplygin gyrostat”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 35, no. 22, pp. L309–L318.
3. Tsiganov, A.V. 2003, “Separation of Variables in the Kovalevskaya–Goryachev–Chaplygin Gyrostat”, *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 135, no. 2, pp. 651–658.
4. Yehia, H. M. 2002, “Comment on ‘On the Kowalevsky-Goryachev-Chaplygin gyrostat’”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 35, no. 49, pp. 10669–10670.
5. Kowalevski, S. 1889, “Sur le probl’eme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe”, *Acta Math.*, vol. 12, pp. 177–232.
6. Kharlamov, M. P. 1983, “Bifurcation of common levels of first integrals of the Kovalevskaya problem”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 47, no. 6, pp. 737–743.
7. Kharlamov, M. P. 1988, “Topological analysis of integrable problems of rigid body dynamics”, *Leningrad. Univ., Leningrad*, 200 pp. (In Russian).
8. Bolsinov, A. V, Richter, P. H. & Fomenko, A. T. 2000, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, vol. 191, no. 2, pp. 151–188.
9. Kharlamov, M.P. 2010, “Topological analysis and Boolean functions. I. Methods and applications to classical systems”, *Nelin. Dinam.*, vol. 6, no. 4, pp. 769–805. (In Russian).
10. Chaplygin, S. A. 1903, “A new particular solution of the problem of motion of a rigid body in a fluid”, *Tr. Otdel. Fiz. Nauk Obshch. Lubitelei Estestvozn.*, vol. 11, no. 2, pp. 7–10. (In Russian).
11. Ryabov, P. E. & Orel, O. E. 1998, “Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem”, *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 3, no. 2, pp. 82–91.
12. Ryabov, P.E. 2000, “Phase topology of the Chaplygin problem on the motion of a rigid body in a fluid”, *Mekh. Tverd. Tela*, no. 30, pp. 140–150. (In Russian).
13. Nikolaenko, S. S. 2014, “A topological classification of the Chaplygin systems in the dynamics of a rigid body in a fluid”, *Sb. Math.*, vol. 205, no. 2, pp. 224–268.
14. Fomenko, A. T. & Nikolaenko, S.S. 2015, “The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid”, *J. Geom. Phys.*, vol. 87, pp. 115–133.

15. Ryabov, P. E. 1999, “Bifurcation sets in an integrable problem on motion of a rigid body in fluid”, *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 4, no. 4, pp. 59–76.
16. Ryabov, P. E. & Orel, O. E. 2001, “Topology, bifurcations and Liouville classification of Kirchhoff equations with an additional integral of fourth degree”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 34, no. 11, pp. 2149–2163.
17. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, “Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification”, *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL*, 730 pp.

Получено: 10.12.25

Принято в печать: 12.02.2026