ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-63-76

О решётках совместных приближений Дирихле

А. П. Крылов, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба

Крылов Александр Петрович — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: alek.krylov@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ibalaba@mail.ru

Аннотация

В работе изучаются свойства унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле и взаимных решёток совместных приближений Дирихле. Доказывается теорема о равенстве расстояний между двумя решётками и между двумя соответствующими взаимными решётками. Доказывается полнота пространств решёток совместных приближений Дирихле и взаимных решёток совместных приближений Дирихле.

Ключевые слова: метрическое пространство решёток, унимодулярные решётки, решётки совместных приближений Дирихле, взаимные решетки совместных приближений Дирихле, фундаментальные решётки.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:
Крылов А. П., Добровольский Н. М., Балаба И. Н. О решётках совместных приближений Дирихле // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 63–76.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-63-76

On lattices of simultaneous Dirichlet approximations

A. P. Krylov, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba

Krylov Alexander Petrovich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: alek.krylov@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ibalaba@mail.ru

Abstract

This paper studies the properties of unimodular lattices of simultaneous Dirichlet approximations and reciprocal lattices of simultaneous Dirichlet approximations. A theorem is proved stating the equality of distances between two lattices and between two corresponding reciprocal lattices. The completeness of the spaces of lattices of simultaneous Dirichlet approximations and mutual lattices of simultaneous Dirichlet approximations is proved.

Keywords: metric space of lattices, unimodular lattices, lattices of simultaneous Dirichlet approximations, reciprocal lattices of simultaneous Dirichlet approximations, fundamental lattices.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
Krylov, A. P., Dobrovolsky, N. M., Balaba, I. N. 2026, "On lattices of simultaneous Dirichlet approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 63–76.

1. Введение

Определение 1. *Решётка $\Lambda(\beta_1,\dots,\beta_n)$, заданная равенством*

$$\Lambda(\beta_1,\dots,\beta_n)=\{(q,q\beta_1-p_1,\dots,q\beta_n-p_n)|q,p_1,\dots,p_n\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{R}^{n+1},$$

называется решёткой совместных приближений Дирихле.

Очевидно, что $\Lambda(0,\dots,0)=\mathbb{Z}^{n+1}$.
Решётка $\Lambda(\beta_1,\dots,\beta_n)$ имеет базис

$$\vec{\lambda}_0=(1,\beta_1,\dots,\beta_n),\quad \vec{\lambda}_1=(0,-1,0,\dots,0),\quad \dots,\quad \vec{\lambda}_n=(0,\dots,0,-1).$$

Базисная матрица $M(\beta_1,\dots,\beta_n)$ решётки $\Lambda(\beta_1,\dots,\beta_n)$ имеет вид

$$M(\beta_1,\dots,\beta_n)=\begin{pmatrix}1&\beta_1&\dots&\beta_n\\0&-1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&-1\end{pmatrix}.$$

Ясно, что решётка $\Lambda(\beta_1,\dots,\beta_n)=\mathbb{Z}^{n+1}\cdot M(\beta_1,\dots,\beta_n)$ — образ фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^{n+1}$ по действием линейного преобразования с матрицей $M(\beta_1,\dots,\beta_n)$.
Через $\mathfrak{D}_n$ обозначим пространство решёток совместных приближений Дирихле.
Рассмотрим взаимную решётку $\Lambda^*(\beta_1,\dots,\beta_n)$, заданную равенством

$$\Lambda^*(\beta_1,\dots,\beta_n)=\{(m_1\beta_1+\dots+m_n\beta_n-m,-m_1,-m_2,\dots,-m_n)|m,m_1,\dots,m_n\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{R}^{n+1},$$

которую будем называть взаимной решёткой совместных приближений Дирихле.
Взаимная решётка $\Lambda^*(\beta_1,\dots,\beta_n)$ имеет взаимный базис

$$\vec{\lambda}^*_0=(1,0,\dots,0),\quad \vec{\lambda}^*_1=(\beta_1,-1,0,\dots,0),\quad \dots,\quad \vec{\lambda}^*_n=(\beta_n,0,\dots,0,-1).$$

Базисная матрица $M^*(\beta_1,\dots,\beta_n)$ взаимной решётки $\Lambda^*(\beta_1,\dots,\beta_n)$ имеет вид

$$M^*(\beta_1,\dots,\beta_n)=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\\beta_1&-1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\beta_n&0&\dots&-1\end{pmatrix}.$$

Ясно, что решётка $\Lambda^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\mathbb{Z}^{n+1}\cdot M^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ — образ фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^{n+1}$ по действием линейного преобразования с матрицей $M^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

Через $\mathfrak{D}_n^*$ обозначим пространство взаимных решёток совместных приближений Дирихле.

Как обычно, через $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ будем обозначать кольцо квадратных целочисленных матриц порядка n. Через $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ — общую линейную группу над $\mathbb{Z}$. Таким образом, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ — это множество квадратных унимодулярных целочисленных матриц порядка n, которое является мультипликативной подгруппой кольца $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Множество всех базисных матриц произвольной решётки Λ получается из произвольной базисной матрицы решётки Λ умножением на произвольные матрицы из группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Действительно, если $\vec{\lambda}_\nu=(\lambda_{\nu,1},\ldots,\lambda_{\nu,n})$ $(\nu=1,\ldots,n)$ – один базис решётки Λ, а $\vec{\lambda}'_\nu=(\lambda'_{\nu,1},\ldots,\lambda'_{\nu,n})$ $(\nu=1,\ldots,n)$ – другой базис решётки Λ, то

$$\begin{pmatrix}\lambda'_{1,1}&\lambda'_{1,2}&\ldots&\lambda'_{1,n}\\ \lambda'_{2,1}&\lambda'_{2,2}&\ldots&\lambda'_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda'_{n,1}&\lambda'_{n,2}&\ldots&\lambda'_{n,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_{1,1}&v_{1,2}&\ldots&v_{1,n}\\ v_{2,1}&v_{2,2}&\ldots&v_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ v_{n,1}&v_{n,2}&\ldots&v_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{1,1}&\lambda_{1,2}&\ldots&\lambda_{1,n}\\ \lambda_{2,1}&\lambda_{2,2}&\ldots&\lambda_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda_{n,1}&\lambda_{n,2}&\ldots&\lambda_{n,n}\end{pmatrix},$$

$$\vec{\lambda}'_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}v_{\nu,\mu}\vec{\lambda}_\mu\quad(\nu=1,\ldots,n),$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_{1,1}&\lambda_{1,2}&\ldots&\lambda_{1,n}\\ \lambda_{2,1}&\lambda_{2,2}&\ldots&\lambda_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda_{n,1}&\lambda_{n,2}&\ldots&\lambda_{n,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_{1,1}&\omega_{1,2}&\ldots&\omega_{1,n}\\ \omega_{2,1}&\omega_{2,2}&\ldots&\omega_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \omega_{n,1}&\omega_{n,2}&\ldots&\omega_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda'_{1,1}&\lambda'_{1,2}&\ldots&\lambda'_{1,n}\\ \lambda'_{2,1}&\lambda'_{2,2}&\ldots&\lambda'_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda'_{n,1}&\lambda'_{n,2}&\ldots&\lambda'_{n,n}\end{pmatrix},$$

$$\vec{\lambda}_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}\omega_{\nu,\mu}\vec{\lambda}'_\mu\quad(\nu=1,\ldots,n).$$

Отсюда следует, что

$$V=\begin{pmatrix}v_{1,1}&v_{1,2}&\ldots&v_{1,n}\\ v_{2,1}&v_{2,2}&\ldots&v_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ v_{n,1}&v_{n,2}&\ldots&v_{n,n}\end{pmatrix},\quad \Omega=\begin{pmatrix}\omega_{1,1}&\omega_{1,2}&\ldots&\omega_{1,n}\\ \omega_{2,1}&\omega_{2,2}&\ldots&\omega_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \omega_{n,1}&\omega_{n,2}&\ldots&\omega_{n,n}\end{pmatrix}\quad\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

и

$$V\cdot\Omega=\begin{pmatrix}v_{1,1}&v_{1,2}&\ldots&v_{1,n}\\ v_{2,1}&v_{2,2}&\ldots&v_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ v_{n,1}&v_{n,2}&\ldots&v_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{1,1}&\omega_{1,2}&\ldots&\omega_{1,n}\\ \omega_{2,1}&\omega_{2,2}&\ldots&\omega_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \omega_{n,1}&\omega_{n,2}&\ldots&\omega_{n,n}\end{pmatrix}=$$

$$=\Omega\cdot V=\begin{pmatrix}\omega_{1,1}&\omega_{1,2}&\ldots&\omega_{1,n}\\ \omega_{2,1}&\omega_{2,2}&\ldots&\omega_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \omega_{n,1}&\omega_{n,2}&\ldots&\omega_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{1,1}&v_{1,2}&\ldots&v_{1,n}\\ v_{2,1}&v_{2,2}&\ldots&v_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ v_{n,1}&v_{n,2}&\ldots&v_{n,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\ldots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\ldots&1\end{pmatrix}.$$

Отметим важное для дальнейшего обстоятельство: матрица перехода от одного базиса решётки Λ к другому базису той же решётки Λ задается умножением базисных матриц на матрицы перехода слева, а базисная матрица M_1 решётки $\Lambda_1=\Lambda\cdot T$ образа решётки Λ под действием линейного преобразования с матрицей T образуется из базисной матрицы M решётки Λ с помощью умножения справа на матрицу T: $M_1=M\cdot T$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda'_{1,1} & \lambda'_{1,2} & \dots & \lambda'_{1,n} \\ \lambda'_{2,1} & \lambda'_{2,2} & \dots & \lambda'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda'_{n,1} & \lambda'_{n,2} & \dots & \lambda'_{n,n} \end{pmatrix} = M \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{1,1} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\vec{\lambda}'_\nu = \vec{\lambda}_\nu \cdot T$ $(\nu = 1, \dots, n)$.

Цель данной работы — рассмотреть метрическое пространство $\mathfrak{D}_n$ унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле, а также метрическое пространство $\mathfrak{D}^*_n$ взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле.

2. Расстояние между решётками совместных приближений Дирихле

Рассмотрим две решётки совместных приближений Дирихле $\Lambda(\beta_1, \dots, \beta_n)$ и $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Как известно (см. [2], стр. 165), множество всех s-мерных решёток PR_s является полным метрическим пространством относительно метрики[1]

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)) = \ln(1 + \max(\mu, \nu)), \tag{1}$$

где

$$\mu = \inf_{\Gamma = \Lambda \cdot A} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda = \Gamma \cdot B} \|B - I\|$$

и I — s-мерная единичная матрица, а норма произвольной матрицы M задается равенством

$$\|M\| = s \cdot \max_{1 \leqslant i,j \leqslant s} |m_{ij}|.$$

Рассмотрим вопрос о том какие линейные преобразования переводят решётку Λ в решётку Γ. Пусть M — произвольная базисная матрица решётки Λ и N — произвольная базисная матрица решётки Γ. Множество $\mathfrak{M}(\Lambda)$ всех базисных матриц решётки Λ задается равенством

$$\mathfrak{M}(\Lambda) = \{V \cdot M | V \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\},$$

а множество $\mathfrak{M}(\Gamma)$ всех базисных матриц решётки Γ задается равенством

$$\mathfrak{M}(\Gamma) = \{W \cdot N | W \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\}.$$

Если линейное преобразование с матрицей A переводит решётку Λ в решётку Γ, то оно переводит множество $\mathfrak{M}(\Lambda)$ во множество $\mathfrak{M}(\Gamma)$. Таким образом, если $W \cdot N = V \cdot M \cdot A$, то множество всех матриц $Hom(\Lambda, \Gamma)$ линейных преобразований, переводящих решётку Λ в решётку Γ задается равенством

$$Hom(\Lambda, \Gamma) = \left\{M^{-1} \cdot U \cdot N | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\}, \quad Hom(\Gamma, \Lambda) = \left\{N^{-1} \cdot U \cdot M | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\}.$$

Нетрудно видеть, что для матрицы $M(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$ заданной равенством

$$M(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) = M(\beta_1, \dots, \beta_n)^{-1} M(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Hom(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha}))$$

[1]Так как точки решётки и арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ записываются вектор-строками, то действие линейного преобразования на решётку записывается умножением на матрицу линейного преобразования справа, как было отмечено выше.

справедливо соотношение

$$M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=M(\beta_1,\ldots,\beta_n)\cdot M(\vec{\beta},\vec{\alpha}),\quad M(\beta_1,\ldots,\beta_n)=M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\cdot M(\vec{\alpha},\vec{\beta}).$$

Справедливо равенство

$$M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^{-1}=M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix}1&\alpha_1&\ldots&\alpha_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\alpha_1&\ldots&\alpha_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$M(\vec{\beta},\vec{\alpha})=\begin{pmatrix}1&\beta_1&\ldots&\beta_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\alpha_1&\ldots&\alpha_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\alpha_1-\beta_1&\ldots&\alpha_n-\beta_n\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix},$$

$$M(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{pmatrix}1&\alpha_1&\ldots&\alpha_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\beta_1&\ldots&\beta_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\beta_1-\alpha_1&\ldots&\beta_n-\alpha_n\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}.$$

Для любого действительного числа β наряду с хорошо известной дробной частью $\{\beta\}$ определим абсолютно наименьшую дробную часть $\{\{\beta\}\}$ с помощью равенств

$$\{\{\beta\}\}=\begin{cases}\{\beta\}, & \text{если } 0\leqslant\{\beta\}\leqslant\frac{1}{2},\\ \{\beta\}-1, & \text{если } \frac{1}{2}<\{\beta\}<1.\end{cases}$$

Кроме этого, определим ближайшее целое $[[\beta]]$ с помощью равенства

$$[[\beta]]=\begin{cases}[\beta], & \text{если } 0\leqslant\{\beta\}\leqslant\frac{1}{2},\\ [\beta]+1, & \text{если } \frac{1}{2}<\{\beta\}<1.\end{cases}$$

Очевидно, что выполняется равенство $[[\beta]]+\{\{\beta\}\}=\beta$.

Напомним, что $\{\vec{\beta}\}=(\{\beta_1\},\ldots,\{\beta_n\})$, $[\vec{\beta}]=([\beta_1],\ldots,[\beta_n])$. Аналогично, $\{\{\vec{\beta}\}\}=(\{\{\beta_1\}\},\ldots,\{\{\beta_n\}\})$, $[[\vec{\beta}]]=([[\beta_1]],\ldots,[[\beta_n]])$.

Нетрудно видеть, что для любого вектора $\vec{\beta}$ базисной матрицей для решётки совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta})$ будет матрица

$$M_{asfp}(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\begin{pmatrix}1&\{\{\beta_1\}\}&\ldots&\{\{\beta_n\}\}\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix}1&[[\beta_1]]&\ldots&[[\beta_n]]\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\beta_1&\ldots&\beta_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\{\{\beta_1\}\}&\ldots&\{\{\beta_n\}\}\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}.$$

Для произвольного вектора $(q, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ имеем:

$$(q, p_1, \ldots, p_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \{\{\beta_1\}\} & \ldots & \{\{\beta_n\}\} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} = (q, q\{\{\beta_1\}\} - p_1, \ldots, q\{\{\beta_n\}\} - p_n) \in \Lambda(\vec{\beta}),$$

$$(q, q\{\{\beta_1\}\} - p_1, \ldots, q\{\{\beta_n\}\} - p_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \{\{\beta_1\}\} & \ldots & \{\{\beta_n\}\} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} = (q, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Отсюда следует, что $\rho(\mathbb{Z}^{n+1}, \Lambda(\vec{\beta})) = \ln\left(1 + (n+1) \max\limits_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |\{\{\beta_\nu\}\}|\right)$. Таким образом, множество всех решёток $\mathfrak{D}_n$ совместных приближений Дирихле образует ограниченное множество с центром в фундаментальной решётке $\mathbb{Z}^{n+1}$ радиуса $\ln\left(1 + \frac{n+1}{2}\right)$.

Лемма 1. *Если две решётки совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta})$ и $\Lambda(\vec{\alpha})$ совпадают, то справедливы соотношения $\alpha_\nu - \beta_\nu \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.*

Доказательство. Действительно, если

$$(q, q\beta_1 - p_1, \ldots, q\beta_n - p_n) = (q, q\alpha_1 - p'_1, \ldots, q\alpha_n - p'_n),$$

то $\alpha_\nu - \beta_\nu = \frac{p'_\nu - p_\nu}{q}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Положим $a_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, s)$, тогда $p'_\nu - p_\nu = a_\nu q \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ для любого натурального q только при условии, что $\alpha_\nu - \beta_\nu \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. $\square$

Из доказанной леммы следуют равенства $\Lambda\left(\vec{\beta}\right) = \Lambda\left(\left\{\vec{\beta}\right\}\right) = \Lambda\left(\left\{\left\{\vec{\beta}\right\}\right\}\right)$.

Лемма 2. *Для множества базисных матриц решётки $\Lambda(\vec{\beta})$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{M}(\Lambda(\vec{\beta})) = \left\{ \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,1}\beta_1 - v_{1,2} & \ldots & v_{1,1}\beta_n - v_{1,n+1} \\ v_{2,1} & v_{2,1}\beta_1 - v_{2,2} & \ldots & v_{2,1}\beta_n - v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} & v_{n+1,1}\beta_1 - v_{n+1,2} & \ldots & v_{n+1,1}\beta_n - v_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \middle| V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Доказательство. Действительно, для любой матрицы $V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z})$ имеем:

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} & \ldots & v_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \ldots & \beta_n \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,1}\beta_1 - v_{1,2} & \ldots & v_{1,1}\beta_n - v_{1,n+1} \\ v_{2,1} & v_{2,1}\beta_1 - v_{2,2} & \ldots & v_{2,1}\beta_n - v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} & v_{n+1,1}\beta_1 - v_{n+1,2} & \ldots & v_{n+1,1}\beta_n - v_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Лемма 3. *Для $Hom(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha}))$ справедливо равенство*

$$Hom(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha})) = \left\{ M(\vec{\beta}) \cdot V \cdot M(\vec{\alpha}) \middle| V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \beta_n \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,1}\alpha_1 - v_{1,2} & \dots & v_{1,1}\alpha_n - v_{1,n+1} \\ v_{2,1} & v_{2,1}\alpha_1 - v_{2,2} & \dots & v_{2,1}\alpha_n - v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} & v_{n+1,1}\alpha_1 - v_{n+1,2} & \dots & v_{n+1,1}\alpha_n - v_{n+1,n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \dots & m_{1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n+1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \dots & m_{n+1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \end{pmatrix},$$

где

$$m_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = v_{1,1} + \sum_{\nu=1}^{n} v_{\nu+1,1}\beta_\nu, \quad m_{\nu+1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = -v_{\nu+1,1} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

$$m_{1,\mu+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = v_{1,1}\alpha_\mu - v_{1,\mu+1} + \sum_{\nu=1}^{n} (v_{\nu+1,1}\alpha_\mu - v_{\nu+1,\mu+1})\beta_\nu \quad (\mu = 1, \dots, n),$$

$$m_{\nu+1,\mu+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = v_{\nu+1,\mu+1} - v_{\nu+1,1}\alpha_\mu \quad (\mu, \nu = 1, \dots, n).$$

Таким образом,

$$Hom(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha})) = \left\{ M(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = M(\vec{\beta}) \cdot V \cdot M(\vec{\alpha}) \middle| V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \right\},$$

$$M(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} m_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & m_{1,2}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \dots & m_{1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \\ -v_{2,1} & v_{2,2} - v_{2,1}\alpha_1 & \dots & v_{2,n+1} - v_{n+1,1}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_{n+1,1} & v_{n+1,2} - v_{n+1,1}\alpha_1 & \dots & v_{n+1,n+1} - v_{n+1,1}\alpha_n \end{pmatrix}$$

□

Теорема 1. *Для произвольных двух решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta})$ и $\Lambda(\vec{\alpha})$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha})) = \ln\left(1 + (n+1) \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |\{\{\alpha_\nu - \beta_\nu\}\}|\right).$$

Доказательство. Для базисных матриц $M(\vec{\beta})$ и $M(\vec{\alpha})$ решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta})$ и $\Lambda(\vec{\alpha})$ без ограничения общности можно считать, что $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.

Чтобы вычислить расстояние между двумя решётками совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta})$ и $\Lambda(\vec{\alpha})$ необходимо найти величины

$$\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \inf_{A \in Hom(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha}))} \|A - I\|, \quad \mu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \inf_{A \in Hom(\Lambda(\vec{\alpha}), \Lambda(\vec{\beta}))} \|A - I\|.$$

Из предыдущего следует, что $\max(\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}), \mu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})) < n + 1$. Поэтому, пользуясь леммой 3, получим $v_{2,1} = \ldots = v_{n+1,1} = 0$, $v_{2,2} = v_{3,3} = \ldots = v_{n+1,n+1} = 1$, $v_{\nu,\mu} = 0$ $(2 \leqslant \nu \leqslant n+1, 2 \leqslant \mu \leqslant n+1, \nu \neq \mu)$.

Таким образом, матрица из леммы 3, на которой достигается $\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ имеет вид

$$M(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} m_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & m_{1,2}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \dots & m_{1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

и $m_{1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=1$, $m_{1,\mu+1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=\alpha_\mu-v_{1,\mu+1}-\beta_\mu \quad (\mu=1,\ldots,n)$. Ясно, что целые $v_{1,\mu+1}$ надо выбирать из условия $v_{1,\mu+1}=[[\alpha_\mu-\beta_\mu]]$ $(\mu=1,\ldots,n)$ и тогда

$$\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(n+1)\max_{\mu=1,\ldots,n}|\{\{\alpha_\mu-\beta_\mu\}\}|.$$

Аналогично получается утверждение относительно $\mu(\vec{\alpha},\vec{\beta})$. □

3. Полнота пространства решёток совместных приближений Дирихле

Для доказательства полноты метрического пространства $\mathfrak{D}_n$ унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле необходимо доказать, что любая фундаментальная последовательность решёток совместных приближений Дирихле сходится к решётке Дирихле. Как было отмечено выше, метрическое пространство $\mathfrak{D}_n$ унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле состоит из решёток $\Lambda(\vec{\beta})$, где $\vec{\beta}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$.

Теорема 2. *Для любой фундаментальной последовательности унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta}_\nu)$, $\vec{\beta}_\nu\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ $(\nu=1,2,\ldots)$ существует $\vec{\beta}=\lim\limits_{\nu\to\infty}\vec{\beta}\nu\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ такой, что $\lim\limits_{\nu\to\infty}\Lambda(\vec{\beta}_\nu)=\Lambda(\vec{\beta})$.*

Доказательство. Пусть для любого $\varepsilon>0$ при $\nu,\mu\geqslant N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(\Lambda(\vec{\beta}_\nu),\Lambda(\vec{\beta}_\mu))<\varepsilon$. Тогда выполняется неравенство

$$\ln\left(1+(n+1)\max_{1\leqslant\lambda\leqslant n}|\{\{\beta_{\mu,\lambda}-\beta_{\nu,\lambda}\}\}|\right)<\varepsilon,\quad \max_{1\leqslant\lambda\leqslant n}|\{\{\beta_{\mu,\lambda}-\beta_{\nu,\lambda}\}\}|<\frac{e^\varepsilon-1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что последовательность векторов $\vec{\beta}_\nu\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ является фундаментальной, а, значит, существует $\vec{\beta}=\lim\limits_{\nu\to\infty}\vec{\beta}\nu\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty}\Lambda(\vec{\beta}_\nu)=\Lambda(\vec{\beta})$. □

Замечание 1. *Условие $\vec{\beta}_\nu\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ в формулировке теоремы является существенным, так как для любой последовательности целых векторов $\vec{m}_\nu\in\mathbb{Z}^n$ имеем: $\Lambda(\vec{\beta})=\Lambda(\vec{\beta}+\vec{m}_\nu)$, но $\lim\limits_{\nu\to\infty}\vec{\beta}+\vec{m}_\nu$ существует только для стационарных последовательностей $\vec{m}_\nu$, начиная с некоторого места.*

Замечание 2. *Из предыдущего следует, что метрическое пространство $\mathfrak{D}_n$ унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле является гладким многообразием, как образ $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$.*

4. Расстояние между взаимными решётками совместных приближений Дирихле

Пусть $M(\vec{\beta})\cdot A=M^*(\vec{\beta})$, тогда $A=M^{-1}(\vec{\beta})\cdot M^*(\vec{\beta})=M(\vec{\beta})\cdot M^*(\vec{\beta})$:

$$A=\begin{pmatrix}1&\beta_1&\ldots&\beta_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\\beta_1&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\beta_n&0&\ldots&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\sum_{\nu=1}^n\beta_\nu^2&-\beta_1&\ldots&-\beta_n\\-\beta_1&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\beta_n&0&\ldots&1\end{pmatrix}.$$

Пусть $M^*(\vec{\beta}) \cdot B = M(\vec{\beta})$, тогда $B = (M^*(\vec{\beta}))^{-1} \cdot M(\vec{\beta}) = M^*(\vec{\beta}) \cdot M(\vec{\beta})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \beta_n \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_1^2+1 & \beta_1\beta_2 & \dots & \beta_1\beta_n \\ \beta_2 & \beta_2\beta_1 & \beta_2^2+1 & \dots & \beta_2\beta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & \beta_n\beta_1 & \beta_n\beta_2 & \dots & \beta_n^2+1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. *Из предыдущего следует, что метрическое пространство $\mathfrak{D}_n^*$ взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле является гладким многообразием, как образ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.*

Лемма 4. *Если две взаимные решётки совместных приближений Дирихле $\Lambda^*(\vec{\beta})$ и $\Lambda^*(\vec{\alpha})$ совпадают, то справедливы соотношения $\alpha_\nu - \beta_\nu \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \dots, n)$.*

Доказательство. Действительно, если для любых целых $m_1, \dots, m_n$ и m найдётся целое m' такое, что

$$(m_1\beta_1 + \ldots + m_n\beta_n - m, -m_1, -m_2, \ldots, -m_n) = (m_1\alpha_1 + \ldots + m_n\alpha_n - m', -m_1, -m_2, \ldots, -m_n),$$

то $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu - \beta_\nu) m_\nu \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $\alpha_\nu - \beta_\nu \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \dots, n)$. $\square$

Из доказанной леммы следуют равенства $\Lambda^*\left(\vec{\beta}\right) = \Lambda^*\left(\left\{\vec{\beta}\right\}\right) = \Lambda^*\left(\left\{\left\{\vec{\beta}\right\}\right\}\right)$.

Нетрудно видеть, что для матрицы $M^*(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$ заданной равенством

$$M^*(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) = M^*(\beta_1, \dots, \beta_n)^{-1} M^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Hom(\Lambda^*(\vec{\beta}), \Lambda^*(\vec{\alpha}))$$

справедливо соотношение

$$M^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = M^*(\beta_1, \dots, \beta_n) \cdot M^*(\vec{\beta}, \vec{\alpha}), \quad M^*(\beta_1, \dots, \beta_n) = M^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot M^*(\vec{\alpha}, \vec{\beta}).$$

Справедливо равенство

$$M^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{-1} = M^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$M^*(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 - \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n - \alpha_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^*(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n - \beta_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. *Для множества базисных матриц решётки $\Lambda^*(\vec{\beta})$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{M}(\Lambda^*(\vec{\beta})) = \left\{ \left(\begin{matrix} v_{1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{1,\nu+1}\beta_\nu & -v_{1,2} & \dots & -v_{1,n+1} \\ v_{2,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{2,\nu+1}\beta_\nu & -v_{2,2} & \dots & -v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{n+1,\nu+1}\beta_\nu & -v_{n+1,2} & \dots & -v_{n+1,n+1} \end{matrix} \right) \middle| V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Доказательство. Действительно, для любой матрицы $V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z})$ имеем:

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & \dots & v_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} & \dots & v_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_{1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{1,\nu+1}\beta_\nu & -v_{1,2} & \dots & -v_{1,n+1} \\ v_{2,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{2,\nu+1}\beta_\nu & -v_{2,2} & \dots & -v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{n+1,\nu+1}\beta_\nu & -v_{n+1,2} & \dots & -v_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

□

Лемма 6. *Для $Hom(\Lambda^*(\vec{\beta}), \Lambda^*(\vec{\alpha}))$ справедливо равенство*

$$Hom(\Lambda^*(\vec{\beta}), \Lambda^*(\vec{\alpha})) = \left\{ M^*(\vec{\beta}) \cdot V \cdot M^*(\vec{\alpha}) \middle| V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{1,\nu+1}\alpha_\nu & -v_{1,2} & \dots & -v_{1,n+1} \\ v_{2,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{2,\nu+1}\alpha_\nu & -v_{2,2} & \dots & -v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{n+1,\nu+1}\alpha_\nu & -v_{n+1,2} & \dots & -v_{n+1,n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^*_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \dots & m^*_{1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m^*_{n+1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \dots & m^*_{n+1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \end{pmatrix},$$

где

$$m^*_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = v_{1,1} + \sum_{\nu=1}^{n} v_{1,\nu+1}\alpha_\nu, \quad m^*_{1,\nu+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = -v_{1,\nu+1} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

$$m^*_{\nu+1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=\beta_\nu\left(v_{1,1}+\sum_{\mu=1}^{n}v_{1,\mu+1}\alpha_\mu\right)-\left(v_{\nu+1,1}+\sum_{\mu=1}^{n}v_{\nu+1,\mu+1}\alpha_\mu\right)=$$
$$=\beta_\nu v_{1,1}-v_{\nu+1,1}+\sum_{\mu=1}^{n}(\beta_\nu v_{1,\mu+1}-v_{\nu+1,\mu+1})\alpha_\mu\quad(\nu=1,\ldots,n),$$
$$m^*_{\nu+1,\mu+1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=v_{\nu+1,\mu+1}-v_{1,\mu+1}\beta_\nu\quad(\mu,\nu=1,\ldots,n).$$

Таким образом,

$$Hom(\Lambda^*(\vec{\beta}),\Lambda^*(\vec{\alpha}))=\left\{M^*(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=M^*(\vec{\beta})\cdot V\cdot M^*(\vec{\alpha})\middle| V\in\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z})\right\},$$
$$M^*(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=\begin{pmatrix} m^*_{1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & -v_{1,2} & \ldots & -v_{1,n+1}\\ m^*_{2,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & v_{2,2}-v_{1,2}\beta_1 & \ldots & v_{2,n+1}-v_{1,n+1}\beta_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m^*_{n+1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & v_{n+1,2}-v_{1,2}\beta_n & \ldots & v_{n+1,n+1}-v_{1,n+1}\beta_n\end{pmatrix}.$$

□

Теорема 3. *Для произвольных двух взаимных решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda^*(\vec{\beta})$ и $\Lambda^*(\vec{\alpha})$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda^*(\vec{\beta}),\Lambda^*(\vec{\alpha}))=\ln\left(1+(n+1)\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}|\{\{\alpha_\nu-\beta_\nu\}\}|\right).$$

Доказательство. Для базисных матриц $M^*(\vec{\beta})$ и $M^*(\vec{\alpha})$ взаимных решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda^*(\vec{\beta})$ и $\Lambda^*(\vec{\alpha})$ без ограничения общности можно считать, что $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$.

Чтобы вычислить расстояние между двумя взаимными решётками совместных приближений Дирихле $\Lambda^*(\vec{\beta})$ и $\Lambda^*(\vec{\alpha})$ необходимо найти величины

$$\nu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\inf_{A\in Hom(\Lambda^*(\vec{\beta}),\Lambda^*(\vec{\alpha}))}\|A-I\|,\quad \mu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\inf_{A\in Hom(\Lambda^*(\vec{\alpha}),\Lambda^*(\vec{\beta}))}\|A-I\|.$$

Из предыдущего следует, что $\max(\nu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta}),\mu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta}))<n+1$. Поэтому, пользуясь леммой 6, получим $v_{1,2}=\ldots=v_{1,n+1}=0$, $v_{2,2}=v_{3,3}=\ldots=v_{n+1,n+1}=1$, $v_{\nu,\mu}=0$ $(2\leqslant\nu\leqslant n+1, 2\leqslant\mu\leqslant n+1,\nu\neq\mu)$.

Таким образом, матрица из леммы 6, на которой достигается $\nu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ имеет вид

$$M^*(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=\begin{pmatrix} m^*_{1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & 0 & \ldots & 0\\ m^*_{2,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m^*_{n+1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}$$

и $m^*_{1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=1$, $m^*_{\nu+1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=\beta_\nu-\alpha_\nu-v_{\nu+1,1}\quad(\nu=1,\ldots,n)$. Ясно, что целые $v_{\nu+1,1}$ надо выбирать из условия $v_{\nu+1,1}=[[\beta_\nu-\alpha_\mu]]$ $(\nu=1,\ldots,n)$ и тогда

$$\nu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(n+1)\max_{\nu=1,\ldots,n}|\{\{\beta_\nu-\alpha_\nu\}\}|.$$

Аналогично получается утверждение относительно $\mu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta})$. □

5. Полнота пространства взаимных решёток совместных приближений Дирихле

Для доказательства полноты метрического пространства $\mathfrak{D}_n^*$ взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле необходимо доказать, что любая фундаментальная последовательность взаимных решёток совместных приближений Дирихле сходится к взаимной решётке Дирихле. Как было отмечено выше, метрическое пространство $\mathfrak{D}_n^*$ взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле состоит из решёток $\Lambda^*(\vec{\beta})$, где $\vec{\beta} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.

Теорема 4. *Для любой фундаментальной последовательности взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda^*(\vec{\beta}_\nu)$, $\vec{\beta}_\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ существует $\vec{\beta} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{\beta}\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ такой, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Lambda^*(\vec{\beta}_\nu) = \Lambda^*(\vec{\beta})$.*

Доказательство. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ при $\nu, \mu \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(\Lambda^*(\vec{\beta}_\nu), \Lambda^*(\vec{\beta}_\mu)) < \varepsilon$. Тогда выполняется неравенство

$$\ln\left(1 + (n+1)\max_{1\leqslant\lambda\leqslant n} |\{\{\beta_{\mu,\lambda} - \beta_{\nu,\lambda}\}\}|\right) < \varepsilon, \quad \max_{1\leqslant\lambda\leqslant n} |\{\{\beta_{\mu,\lambda} - \beta_{\nu,\lambda}\}\}| < \frac{e^\varepsilon - 1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что последовательность векторов $\vec{\beta}_\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ является фундаментальной, а, значит, существует $\vec{\beta} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{\beta}\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Lambda^*(\vec{\beta}_\nu) = \Lambda^*(\vec{\beta})$. $\square$

Замечание 4. *Условие $\vec{\beta}_\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ в формулировке теоремы является существенным, так как для любой последовательности целых векторов $\vec{m}_\nu \in \mathbb{Z}^n$ имеем: $\Lambda^*(\vec{\beta}) = \Lambda^*(\vec{\beta} + \vec{m}_\nu)$, но $\lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{\beta} + \vec{m}_\nu$ существует только для стационарных последовательностей $\vec{m}_\nu$, начиная с некоторого места.*

Замечание 5. *Из предыдущего следует, что метрическое пространство $\mathfrak{D}_n^*$ взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле является гладким многообразием, как образ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.*

6. Сохранение расстояний при переходе к взаимным решёткам

Очевидный параллелизм между утверждениями о решётках совместных приближений Дирихле и о взаимных решётках совместных приближений Дирихле становится понятным, если рассмотреть вопрос о связи между расстояниями между двумя решётками и расстояниями между соответствующими взаимными решётками.

Теорема 5. *Расстояния между любыми двумя решётками Λ и Γ совпадает с расстоянием между соответствующими взаимными решётками Λ^* и Γ^*:*

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \rho(\Lambda^*, \Gamma^*).$$

Доказательство. Действительно, пусть M — базисная матрица решётки Λ, тогда матрица $(M^{-1})^T$ будет базисной матрицей взаимной решётки Λ^*. Так как множество $\mathfrak{M}(\Lambda)$ всех базисных матриц решётки Λ задается равенством

$$\mathfrak{M}(\Lambda) = \{V \cdot M | V \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\},$$

то множество $\mathfrak{M}(\Lambda^*)$ всех базисных матриц взаимной решётки Λ^* задается равенством

$$\mathfrak{M}(\Lambda^*) = \left\{((V \cdot M)^{-1})^T | V \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\}.$$

Расстояние $\rho(\Lambda, \Gamma)$ согласно (1) будет равно

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)) = \ln(1+\max(\mu, \nu)), \tag{2}$$

где

$$\mu = \inf_{A \in Hom(\Lambda, \Gamma)} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{B \in Hom(\Gamma, \Lambda)} \|B - I\|.$$

Для расстояния $\rho(\Lambda^*, \Gamma^*)$ между взаимными решётками получим

$$\rho(\Lambda^*, \Gamma^*) = \max(\ln(1+\mu^*), \ln(1+\nu^*)) = \ln(1+\max(\mu^*, \nu^*)), \tag{3}$$

где

$$\mu^* = \inf_{A \in Hom(\Lambda^*, \Gamma^*)} \|A_1 - I\|, \quad \nu = \inf_{B_1 \in Hom(\Gamma^*, \Lambda^*)} \|B_1 - I\|.$$

Если M — произвольная базисная матрица решётки Λ и N — произвольная базисная матрица решётки Γ, то как было показано раньше

$$Hom(\Lambda, \Gamma) = \left\{M^{-1} \cdot U \cdot N | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\}, \quad Hom(\Gamma, \Lambda) = \left\{N^{-1} \cdot U \cdot M | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\},$$

поэтому

$$\mu = \inf_{U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})} \|M^{-1} \cdot U \cdot N - I\|, \quad \nu = \inf_{U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})} \|N^{-1} \cdot U \cdot M - I\|.$$

Переходя к взаимным решёткам, получим

$$Hom(\Lambda^*, \Gamma^*) = \left\{((M^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (N^{-1})^T | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\},$$
$$Hom(\Gamma, \Lambda) = \left\{((N^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (M^{-1})^T | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\},$$

поэтому

$$\mu^* = \inf_{U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})} \|((M^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (N^{-1})^T - I\|, \quad \nu^* = \inf_{U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})} \|((N^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (M^{-1})^T - I\|.$$

Далее имеем:

$$((M^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (N^{-1})^T = M^T \cdot U \cdot (N^{-1})^T = (N^{-1} \cdot U^T \cdot M)^T,$$
$$((N^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (M^{-1})^T = N \cdot U \cdot (M^{-1})^T = (M^{-1} \cdot U^T \cdot N)^T.$$

Так как для любого $U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})$ имеем $U^T \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})$ и $\|A - I\| = \|A^T - I\|$, то $\mu = \nu^*$, $\nu = \mu^*$ и утверждение теоремы доказано. □

Таким образом доказано, что отображение взаимности является изометрией на метрическом пространстве решёток. Отсюда следует, что если имеется произвольная фундаментальная последовательность решёток, которая в силу полноты метрического пространства решёток сходится к некоторой решётке, то соответствующая последовательность взаимных решёток также будет фундаментальной, которая сходится к соответствующей взаимной решётке.

7. Заключение

Из доказанных теорем возникает вопрос о дифференциальных свойствах диагональных унимодулярных решёток и решёток совместных приближений Дирихле, то есть речь идёт о соответствующих гладких многообразиях (см. [5]). Ответ на этот вопрос будет темой нашей следующей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

2. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

3. А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Вып. 1, С. 37–41.

4. А. П. Крылов. Метрическое пространство диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2025-2026. Вып. 3, С. .

5. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие решёток // Чебышевский сборник, 2023. т. 24, вып. 4, С. 299–310.

6. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4-–107.

2. Kassels, D. 1965, Vvedenie v geometriyu chisel, [Introduction to the geometry of numbers], *Mir, Moscow*, (Russia).

3. Krylov, A. P., Dobrovolsky, N. M. 2022, "Metric space of two-dimensional diagonal unimodular lattices", *Notes of scientific seminars of the Tula School of Number Theory*, Iss. 1, pp. 37–41.

4. A. P. Krylov, 2025-2026, "The Metric Space of Diagonal Unimodular Lattices", *Notes of Scientific Seminars of the Tula School of Number Theory*, Iss. 3, pp.

5. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "Smooth variety of lattices", Chebyshevskii sbornik, vol. 24, no. 4, pp. 299–310.

6. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 211, pp. 23–62.

Получено: 24.10.2025
Принято в печать: 12.02.2026