

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 1.

УДК: 517.977.5

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-27-1-51-62

**Двухкритериальная задача оптимального управления с использованием свертки Гермейера**

В. А. Горелик, Т. В. Золотова

**Горелик Виктор Александрович** — доктор физико-математических наук, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН; Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

*e-mail: vgor16@mail.ru*

**Золотова Татьяна Валерьяновна** — доктор физико-математических наук, профессор, Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).

*e-mail: tgold11@mail.ru***Аннотация**

Современные математические модели, компьютерные технологии, финансовые инструменты и механизмы сформировали новое направление «финансовый инжиниринг». В рамках финансового инжиниринга представляет интерес формулировка новых математических задач управления финансовыми ресурсами, в том числе модификация целевых функционалов. В данной работе предлагается один из вариантов такой модификации, а именно для двухсекторной модели экономической динамики рассматривается двухкритериальная задача, формализуемая в виде максиминной задачи управления. Проведено полное исследование зависимости вида оптимальной траектории от величины интервала управления.

*Ключевые слова:* максимин, оптимальное управление, функция Гамильтона, свертка Гермейера, магистральный эффект.

*Библиография:* 15 названий.

**Для цитирования:**

Горелик В. А., Золотова Т. В. Двухкритериальная задача оптимального управления с использованием свертки Гермейера // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 51–62.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 1.

UDC: 517.977.5

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-27-1-51-62

**Two-criteria optimal control problem using Germeier convolution**

V. A. Gorelik, T. V. Zolotova

**Gorelik Victor Alexandrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS; Moscow State Pedagogical University (Moscow).

*e-mail: vgor16@mail.ru*

**Zolotova Tatiana Valerianovna** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).

*e-mail: tgold11@mail.ru*

### Abstract

Modern mathematical models, computer technologies, financial instruments and mechanisms have formed a new scientific sphere – "financial engineering". In the context of financial engineering, the formulation of new mathematical problems of financial resource management, including the modification of target functionals, is of interest. In this paper, one of the variants of such modification is proposed, namely, for a two-sector model of economic dynamics, a two-criteria problem is considered formalized as a maximin control problem. A complete study of the dependence of the type of optimal trajectory on the value of the control interval is carried out.

*Keywords:* maximin, optimal control, Hamilton function, Germeier convolution, turnpike effect.

*Bibliography:* 15 titles.

### For citation:

Gorelik, V. A., Zolotova, T. V. 2026, "Two-criteria optimal control problem using Germeier convolution", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 51–62.

## 1. Введение

Современные математические модели и компьютерные технологии, финансовые инструменты и механизмы для решения актуальных финансовых вопросов, минимизации рисков и увеличения доходности сформировали новое направление «финансовый инжиниринг» [1-4].

В рамках финансового инжиниринга представляет интерес в теоретическом плане формулировка новых математических задач управления финансовыми ресурсами, в том числе модификация целевых функционалов. В данной работе предлагается один из вариантов такой модификации.

В экономических системах различного уровня очень распространенной является задача распределение ресурса или производимого продукта между производственной и непроизводственной сферами. Обе эти сферы можно описать размерами фондов, изменения которых связаны с вложением дополнительных ресурсов (продуктов) и амортизации. Величина вновь производимого продукта зависит непосредственно от размеров производственных фондов (определяется производственной функцией). Если при этом качество функционирования системы оценивается двумя критериями, отражающими соответственно достижения в производственной и непроизводственной сферах, то это стимулирует развитие и непроизводственных фондов. Такая ситуация имеет место при разработке программ экономического и социального развития, производства и охраны окружающей среды и т.д. [5].

При наличии нескольких (в данном случае двух) критериев понятие оптимальности неоднозначно. Тут возможны разные постановки задачи. Традиционной для теоретических исследований является задача о максимальном потреблении, один из вариантов которой изложен, например, в [6]. Она состоит в максимизации критерия, зависящего от размеров непроизводственных фондов, при ограничении снизу на критерий, оценивающий производственные фонды. Возможна в некотором смысле обратная задача: при ограничении снизу на допустимый уровень потребления максимизировать критерий, оценивающий производственные фонды.

Указанные задачи характеризуются неравноправным учетом критериев (и соответствующих сфер). Равноправное (симметричное) их рассмотрение естественно связать с паретооптимальностью. Для выделения конкретного решения из множества Парето можно использовать свертку Гермейера, а именно, ввести общий критерий, представляющий собой минимум из частных критериев, умноженных на весовые коэффициенты. Этот критерий имеет ясный содержательный смысл: соизмеряются достижения в обеих сферах, и ситуация оценивается по худшему результату («узкому месту»), причем в силу разнородности сфер результаты в них не

являются взаимозаменяемыми. Весовые коэффициенты могут играть роль переводных, если достижения измеряются в разных единицах, оценивать приоритеты, отражать желаемый уровень в каждой сфере и т.п. По-видимому, указанные критерии в таких задачах хорошо описывают цель и поведение системы. Однако он имеет математический недостаток – является негладким функционалом, что усложняет анализ.

## 2. Формулировка задачи управления

Рассмотрим конкретную постановку задачи подобного типа. Пусть имеется непрерывный промежуток планирования  $[0, T]$ . Обозначим величины фондов в производственной и непроизводственной сферах в момент  $t$  соответственно  $\tilde{x}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$ . Будем считать их скалярными величинами (например, все в денежном выражении). В каждый момент времени  $t$  выпускаемый однородный продукт в количестве  $\alpha\tilde{x}(t)$  (линейная производственная функция) распределяется в пропорции  $u(t)$  и  $1 - u(t)$  между производственной и непроизводственной сферами. Управление  $u(\cdot)$  в каждый момент удовлетворяет ограничениям  $0 \leq u(t) \leq 1$ . Заданы величины амортизации  $\mu, \delta$  и начальные условия  $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$ . В качестве критерия возьмем функционал интегрального типа, в котором подынтегральная функция, оценивающая эффективность в каждый момент времени  $t$ , имеет вид

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \min\{\lambda\tilde{x}, \tilde{y}\},$$

где  $\lambda$  – весовой коэффициент. В результате получается следующая задача оптимального управления с фиксированным временем: найти кусочно-непрерывную функцию  $u(t)$  и кусочно-непрерывно-дифференцируемые функции  $\tilde{x}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$ , максимизирующие функционал

$$I = \int_0^T \min\{\lambda\tilde{x}, \tilde{y}\} dt \tag{1}$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\dot{\tilde{x}} = (\alpha u - \mu)\tilde{x}, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \quad \dot{\tilde{y}} = \alpha(1 - u)\tilde{x} - \delta\tilde{y}, \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0. \tag{2}$$

Все переменные в (1), (2) являются скалярными, начальные условия  $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$ , а также константы  $\lambda, \alpha, \mu, \delta$  – положительные числа, причем  $\alpha > \mu, \alpha > \delta$ .

В соотношениях (1), (2) сделаем замену переменных, упрощающее дальнейшие рассуждения:

$$x = \tilde{x} \exp(\mu t), \quad z = (\tilde{x} + \tilde{y}) \exp(\mu t). \tag{3}$$

При этом задача (1), (2) преобразуется к виду

$$I = \int_0^T \min\{\lambda x, z - x\} \exp(-\mu t) dt, \tag{4}$$

$$\dot{x} = \alpha u x, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{z} = (\alpha - \mu + \delta)x + (\mu - \delta)z, \quad z(0) = z_0. \tag{5}$$

Связь между начальными условиями в задачах (1), (2) и (4), (5) получается из соотношений (3) при  $t = 0$ .

### 3. Исследование качественного вида закона оптимального управления

Фазовую плоскость  $(x, z)$  задачи (4), (5) разобьем на три непересекающиеся части: область «влияния» функционала  $\lambda \tilde{x}(t)$ , область «влияния» функционала  $\tilde{y}(t)$  и область одинакового «влияния» обоих функционалов. Обозначим эти области соответственно через

$$S^- = \{(x, z) \mid \lambda x < z - x\},$$

$$S^+ = \{(x, z) \mid \lambda x > z - x\},$$

$$S = \{(x, y) \mid \lambda x = z - x\}.$$

Область  $S$  представляет собой прямую, разделяющую полуплоскости  $S^-$  и  $S^+$ , уравнение которой в исходных переменных есть  $\lambda \tilde{x} = \tilde{y}$ .

С помощью непрерывных на отрезке  $[0, T]$  сопряженных переменных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  необходимые условия оптимальности в задаче (4), (5) могут быть сформулированы в форме модифицированного принципа максимума [7, 8].

В данном случае функция Гамильтона имеет вид

$$H = p_1 \lambda x \exp(-\mu t) + p_2 (z - x) \exp(-\mu t) + \alpha u x \varphi_1 + [(\alpha - \mu + \delta) x + (\mu - \delta) z] \varphi_2.$$

Здесь коэффициенты  $p_1$  и  $p_2$  неотрицательны,  $p_1 + p_2 = 1$  и каждый из данных коэффициентов не равен нулю только в том случае, когда минимум в (4) достигается на соответствующем ему частном критерии.

Из условия максимума функции Гамильтона по  $u \in [0, 1]$  получаем связь между оптимальным управлением и сопряженной переменной  $\varphi_1$  на всей плоскости:

$$u = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_1 > 0, \\ 0, & \text{если } \varphi_1 < 0, \\ \text{любое,} & \text{если } \varphi_1 = 0. \end{cases}$$

Для кусков оптимальной траектории задачи (4), (5), целиком лежащих в области  $S^-$ , сопряженная система и функция Гамильтона определяется обычной формой принципа максимума для задачи (5) с максимизируемым функционалом  $\int_0^T \lambda x \exp(-\mu t) dt$ , а для области  $S^+$  - с функционалом  $\int_0^T (z - x) \exp(-\mu t) dt$ .

Таким образом, вид управления для кусков оптимальной траектории, целиком лежащих в области  $S^-$ , определяется задачей

$$\begin{aligned} \max_{u \in [0, 1]} [\lambda x \exp(-\mu t) + \alpha u x \varphi_1 + [(\alpha - \mu + \delta) x + (\mu - \delta) z] \varphi_2], \\ \dot{\varphi}_1 = -\lambda \exp(-\mu t) - \alpha u \varphi_1 - (\alpha - \mu + \delta) \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = (\delta - \mu) \varphi_2, \end{aligned} \quad (6)$$

дополненной уравнениями (5).

Вид управления для кусков оптимальной траектории, целиком лежащих в области  $S^+$ , определяется задачей

$$\begin{aligned} \max_{u \in [0, 1]} [(z - x) \exp(-\mu t) + \alpha u x \varphi_1 + [(\alpha - \mu + \delta) x + (\mu - \delta) z] \varphi_2], \\ \dot{\varphi}_1 = \exp(-\mu t) - \alpha u \varphi_1 - (\alpha - \mu + \delta) \varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2 = -\exp(-\mu t) + (\delta - \mu) \varphi_2, \end{aligned} \quad (7)$$

дополненной уравнениями (5).

Куски оптимальных траекторий, целиком лежащих в  $S$ , определяется формой области  $S$ . Поэтому для нее не потребуется аналог задач (6), (7), который имеет более сложный вид (в

этом случае коэффициенты  $p_1$  и  $p_2$  неизвестны). Покажем, что задачи (6), (7) всюду, за исключением конечного числа точек, однозначно определяют закон оптимального управления в областях  $S^-$  и  $S^+$ . В самом деле, вопрос об однозначности определения связан с нулями функции  $\varphi_1$ . Поскольку закон управления должен быть кусочно-непрерывным, нули функции  $\varphi_1$  либо полностью заполняют некоторые интервалы, либо появляются в изолированных точках. Однако в условиях задачи обращение функции  $\varphi_1$  в нуль на интервале невозможно. В самом деле, если  $\varphi_1 \equiv 0$ ,  $\dot{\varphi}_1 \equiv 0$ , то сопряженные системы (6), (7) преобразуются к следующим видам:

$$\varphi_2 = -\frac{\lambda}{\alpha - \mu + \delta} \exp(-\mu t), \quad \dot{\varphi}_2 = (\delta - \mu) \varphi_2, \quad (8)$$

$$\varphi_2 = -\frac{\lambda}{\alpha - \mu + \delta} \exp(-\mu t), \quad \dot{\varphi}_2 = -\exp(-\mu t) + (\delta - \mu) \varphi_2. \quad (9)$$

Уравнения (8) совместны только при  $\delta = 0$ ; уравнения (9) совместны только при  $\alpha = \mu$ . По условия задачи оба эти условия не выполняются. Таким образом, доказано, что кускам оптимальной траектории, целиком лежащим в  $S^-$  или  $S^+$ , соответствуют кусочно-постоянные управления, принимающие значения 0 или 1.

Уточним характер закона управления на таких кусках траектории. Для этого заметим, что в предположении постоянства управления из систем (6), (7) следует, что для функции  $v(u) = \frac{d}{dt}(\varphi_1 \exp(\alpha u t))$  имеем

$$v(u) = \begin{cases} -[\lambda \exp(-\delta t) + C(\alpha - \mu + \delta)] \exp(\alpha u - \mu + \delta) & \text{в } S^-, \\ -[\frac{\alpha - \mu}{\delta} \exp(-\delta t) + C(\alpha - \mu + \delta)] \exp(\alpha u - \mu + \delta) & \text{в } S^+. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь константа  $C$  вследствие непрерывности  $\varphi_2$  одна и та же для всего куска. Точкам переключения управления соответствуют нули функции  $\varphi_1 \exp(\alpha u t)$ , а каждой паре таких нулей по теореме Ролля о среднем соответствует нуль производной этой функции. Но из (10) следует, что таких нулей не более одного, т.е. при прохождении оптимальной траектории внутри  $S^-$  или  $S^+$  не может быть более двух моментов переключения управления. Более того, из (10) следует, что на участках постоянства управления функция

$$\exp(-\alpha u + \mu - \delta) \frac{d}{dt}(\varphi_1 \exp(\alpha u t))$$

монотонно возрастает, т.е. оптимальное управление на кусках траектории, целиком лежащих в  $S^-$  или  $S^+$ , задается отрезками последовательности  $\{1, 0, 1\}$ .

Если оптимальная траектория заканчивается внутри  $S^-$  или  $S^+$ , то с помощью естественных краевых условий для сопряженных переменных

$$\varphi_1(T) = \varphi_2(T) = 0 \quad (11)$$

закон управления может быть еще более уточнен для последнего куска траектории, целиком лежащего в  $S^-$  или  $S^+$ . После подстановки (11) в (10), получаем

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi_1 \exp(\alpha u t)) \right|_{t=T} = \begin{cases} -\lambda \exp((\alpha u - \mu) T) & \text{в } S^-, \\ \exp((\alpha u - \mu) T) & \text{в } S^+. \end{cases}$$

Это значит, что для  $0 < \tau < \tau^0$

$$u(T - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{в } S^-, \\ 0 & \text{в } S^+, \end{cases}$$

где  $\tau^0$  является единственным отличным от нуля корнем уравнения  $\varphi_1(T - \tau^0) = 0$ . Это уравнение, получаемое из (7), (11) имеет вид

$$\frac{\alpha - \mu + \delta}{\delta - \mu} [\exp((\mu - \delta)\tau^0) - 1] + \frac{\alpha - \mu}{\mu} [\exp(\mu\tau^0) - 1], \quad \delta \neq \mu, \quad (12)$$

или

$$\exp(\mu\tau^0) - \frac{\alpha}{\alpha - \mu}\mu\tau^0 - 1 = 0, \quad \delta = \mu. \quad (13)$$

С учетом доказанного ранее относительно последовательностей значений управления в областях  $S^-$  или  $S^+$  получаем, что

1) если оптимальная траектория заканчивается в  $S^-$ , то на ее последнем куске, лежащем в  $S^-$ , обязательно  $u \equiv 1$ ;

2) если оптимальная траектория заканчивается в  $S^+$ , то на ее последнем куске, лежащем в  $S^+$ , не более одного переключения управления и на конце такой траектории  $u \equiv 1$ .

Движение вдоль  $S$  возможно при выполнении равенства  $\lambda x = z - x$ . С учетом (5) отсюда следует, что при движении вдоль  $S$  обязательно

$$u = u_0 = \frac{1}{1 + \lambda} \left[ 1 + \frac{\lambda(\mu - \delta)}{\alpha} \right]. \quad (14)$$

Это управление допустимо, если  $u_0 \in [0, 1]$ . В условиях задачи  $0 \leq u_0 \leq 1$  при  $\lambda(\mu - \delta) \leq \alpha$ . При  $u_0 = 0$  имеем  $\dot{x} = \dot{z} = 0$ , т.е. движение вдоль  $S$  фактически невозможно.

Таким образом, при  $\lambda(\mu - \delta) < \alpha$  на оптимальной траектории возможны участки, лежащие в  $S$ , а закон оптимального управления определяется кусочно-постоянной функцией, принимающей значения 0,  $u_0$ , 1. При  $\lambda(\mu - \delta) \geq \alpha$  оптимальная траектория может лишь пересекать прямую  $S$  или отражаться от нее, а закон оптимального управления определяется кусочно-постоянной функцией, принимающей значения 0, 1.

Вследствие изложенного выше, среди траекторий системы (5) особое место отводится тем из них, которые соответствуют закону управления с  $u = 0$  или  $u = 1$ . Рассмотрим более подробно эти траектории, уделяя главное внимание их пересечению с  $S$ .

Уравнения этих траекторий получаются в результате интегрирования системы (5) в предположении  $u = const$ :

$$\begin{aligned} x &= x_0 \exp(\alpha u t), \\ z &= \begin{cases} x_0 \frac{\alpha + \delta - \mu}{\alpha u + \delta - \mu} \exp(\alpha u t) + (z_0 - x_0 \frac{\alpha + \delta - \mu}{\alpha u + \delta - \mu}) \exp((\mu - \delta)t), & \alpha u + \delta - \mu \neq 0, \\ z_0 + \alpha x_0 t, & u = 0, \mu = \delta. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

В соответствии с характером особой траектории  $\dot{x} = \dot{z} = 0$  системы (5) при  $u = 0$  и ее расположением относительно  $S$  возможны следующие случаи:

- 1) у системы (5) нет особой траектории, когда  $\mu = \delta$ ;
- 2) особая траектория расположена «выше» прямой  $S$ , когда  $0 < \lambda(\delta - \mu) < \alpha$ ;
- 3) особая траектория совпадает с прямой  $S$ , когда  $\lambda(\delta - \mu) = \alpha$ ;
- 4) особая траектория расположена между прямыми  $S$  и  $z = x$ , когда  $\lambda(\delta - \mu) > \alpha$ ;
- 5) особая траектория расположена «ниже» прямой  $z = x$ , когда  $\mu > \delta$ .

Рассмотрим при каких условиях возможны переходы оптимальных траекторий между областями  $S^-$ ,  $S^+$ ,  $S$ . При  $u = 1$  фазовые траектории пересекают  $S$ , выходя из области  $S^-$  и заходя в область  $S^+$ . При  $\mu \geq \delta$  или  $0 < \lambda(\delta - \mu) < \alpha$  фазовые траектории с  $u = 0$  осуществляют обратный переход из области  $S^+$  и заходя в область  $S^-$ . Из (14) следует, что в этих случаях возможно движение вдоль  $S$ . Из (15) следует, что при  $\lambda(\delta - \mu) = \alpha$  фазовые траектории с  $u = 0$  не могут за конечный промежуток времени достигать  $S$ . Из (14) следует, что в этом случае движение вдоль  $S$  невозможно. При  $\lambda(\delta - \mu) > \alpha$  фазовые траектории с  $u = 0$  пересекают  $S$ , выходя из области  $S^-$  и заходя в область  $S^+$ . Из (14) следует, что в этом случае движение вдоль  $S$  невозможно.

Так как движение вдоль  $S$  осуществляется при значении управления  $u_0$ , которое отлично от 0 и 1, то вдоль всего такого участка траектории  $\varphi_1 \equiv 0$ . Поскольку сопряженные переменные непрерывны, отсюда, в частности, следует, что в момент захода оптимальной траектории в область  $S$  переменная  $\varphi_1$  должна обращаться в 0.

При постоянных управлениях сопряженные системы легко интегрируются с учетом краевых условий. Используя получающиеся выражения для сопряженных переменных и учитывая их непрерывность при переходе через  $S$ , можно доказать, что если до момента перехода оптимальной траектории из  $S^-$  в  $S^+$  были переключения управления, то на оставшейся части траектории их нет, т.е.  $u \equiv 1$ .

Остановимся кратко на предварительных результатах. Из системы сопряженных уравнений в (6) и (7) получен вывод о количестве точек переключения управлений в областях  $S^-$  и  $S^+$  и о последовательности принимаемых им значений. Из естественных краевых условий получено заключение о характере управления на последних участках траектории, заканчивающихся в  $S^-$  или  $S^+$ . Из модифицированного принципа максимума и формы области  $S$  получен вывод о наличии одной из точек переключения управления при пересечении  $S$ , характере движения вдоль  $S$  и существовании управления, при котором движение вдоль нее возможно. Их уравнений траекторий динамической системы получен вывод о характере их пересечения области  $S$ .

Эти выводы позволяют качественно описать закон оптимального управления и форму оптимальной траектории задачи (4), (5), что в некотором смысле аналогично интегрированию задачи Коши для систем сопряженных уравнений с граничными условиями на правом конце интервала управления. При этом сам процесс интегрирования заменяется систематическими ссылками на допустимые последовательности значений управления в областях  $S^-$  и  $S^+$ , а также на связь между значениями функций  $\varphi_1$  при пересечении траектории одной из областей  $S^-$ ,  $S^+$  или  $S$ . Покажем конкретно, как это делается. Если оптимальная траектория заканчивается участком, целиком лежащим в  $S$ , то заменим  $T$  на время, соответствующее началу этого участка. До момента времени  $T$  траектория некоторое время находилась в одной из областей  $S^-$  или  $S^+$ , поэтому ей соответствовала одна из систем сопряженных уравнений (6) или (7), причем в момент времени  $T$  переменная  $\varphi_1$  обращается в нуль.

Пусть перед моментом времени  $T$  траектория находится в области  $S^-$ . Тогда, если траектория заканчивается на  $S$  и движение вдоль  $S$  возможно, т.е.  $u_0 \in [0, 1]$ , то на конце такой траектории  $u = 1$ , так как при  $u = 0$  траектории удаляются от  $S$ . Если движение вдоль  $S$  невозможно или конец траектории лежит в  $S^-$ , то и в этом случае на конце траектории, как выяснилось при обсуждении краевых условий для сопряженных переменных, обязательно  $u = 1$ . Закон управления в  $S^-$  определяется отрезками последовательности  $\{1, 0, 1\}$ , и поскольку в момент времени  $T$  наблюдается переключение управления, то на всем куске оптимальной траектории, лежащем в  $S^-$  и предшествующем этому переключению, обязательно  $u \equiv 1$ . Поскольку такие траектории целиком лежат в  $S^-$ , то в этом случае управление на всем интервале  $[0, T]$  равно 1.

Пусть перед моментом времени  $T$  траектория находилась в области  $S^+$ . Тогда, если траектория заканчивается на  $S$ , то на конце такой траектории  $u = 0$ , т.к. при  $u = 1$  траектории в  $S^+$  удаляются от  $S$ . Если же конец траектории лежит в  $S^+$ , то и в этом случае на конце траектории, как выяснилось при обсуждении краевых условий для сопряженных переменных, тоже  $u = 0$ . Закон управления в  $S^+$  определяется отрезками последовательности  $\{1, 0, 1\}$ . Поэтому на последнем куске оптимальной траектории, целиком лежащем в  $S^+$ , либо только одно переключение управления, либо переключения нет. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Если в области  $S^+$  есть переключение управления, то участок траектории, соответствующий значению управления  $u = 1$  может пересекать  $S$ , начинаясь в  $S^-$ . Вследствие непрерывности сопряженных переменных при переходе других переключений управления нет.

Если в области  $S^+$  нет переключения управления, то при  $\lambda(\delta - \mu) < \alpha$  (когда движе-

ние вдоль  $S$  возможно) участок траектории, соответствующий значению управления  $u = 0$ , может пересекать  $S$  начинаясь в  $S^-$ . Поскольку закон управления в  $S^-$  задается отрезком последовательности  $\{1, 0, 1\}$ , то в этом случае в области  $S^-$  может быть лишь один момент переключения. Из этих рассуждений следует вывод о том, что если на оптимальной траектории есть участок в области  $S$ , то он обязательно единственный и лежит на конце траектории.

В результате качественного описания оптимального закона управления удалось выделить конечное число семейств траекторий, каждая из которых характеризуется однозначно определенными последовательностями значений управления и также однозначно определенной очередностью прохождения траекторий областей  $S^-$ ,  $S^+$  и  $S$ . После этого переход к количественному описанию оптимальных законов управления и формы траектории задачи (4), (5) осуществляется с помощью единообразной параметризации конкретных траекторий каждого семейства моментами переключений управления и прохождения границ областей  $S^-$ ,  $S^+$  и  $S$ . Это позволяет свести задачу (4), (5) к ряду одномерных задач оптимизации, которые могут быть решены аналитически. Естественно, решения эти различны в зависимости от параметров задачи, начальных условий и протяженности интервала управления.

При  $\lambda(\delta - \mu) \geq \alpha$  полученное качественное описание оптимального закона управления совместно с уравнением (12) дает полное решение задачи (4), (5). Поэтому осталось исследовать случай  $\lambda(\delta - \mu) < \alpha$ , когда движение вдоль  $S$  возможно.

Сначала рассмотрим траектории, начинающиеся в  $S$ , а затем с помощью переноса начала отсчета времени в положительном или отрицательном направлении сведем к этому и общий случай. Из предыдущих рассуждений следует, что закон оптимального управления при этом задается последовательностью  $\{1, 0\}$ , если траектория заканчивается в  $S^+$ , или последовательностью  $\{1, 0, u_0\}$ , если траектория заканчивается в  $S$  (в частности, возможно  $u \equiv u_0$ ). Соответственно, если начальная точка оптимальной траектории находится в области  $S$ , то в зависимости от длины интервала планирования она либо целиком лежит в  $S$ , либо переходит в область  $S^+$  и там заканчивается, либо в некоторый момент возвращается на  $S$  и остается там до конца.

Рассмотрим, при каких условиях оптимум реализуется на каждой из этих последовательностей и как зависит время движения на участках с постоянным управлением от величины интервала  $T$ . В дальнейшем через  $t_i$  будет обозначаться  $i$ -й момент переключения управления. При этом, если переключений нет ( $u \equiv u_0$ ), то момент окончания обозначим через  $t_1$ , для последовательности управления  $\{1, 0\}$  – через  $t_2$ , для последовательности управления  $\{1, 0, u_0\}$  – через  $t_3$ .

Обозначим начальную точку траектории, лежащую в  $S$ , через  $A$ ; точку на траектории, соответствующую моменту  $t_1$ , через  $B$ ; точку на траектории, соответствующую моменту  $t_2$ , через  $C$ ; точку на траектории, соответствующую моменту  $t_3$ , через  $D$ . С помощью уравнений (15) находим условия, при которых точка  $C$  принадлежит области  $S$ :

$$\lambda \exp(\alpha t_1) = \begin{cases} \lambda + \alpha(t_2 - t_1) \exp(\alpha t_1), & \mu = \delta, \\ \frac{\alpha}{\delta - \mu} \exp(\alpha t_1) + \\ + \left[ \lambda \exp((\mu - \delta)t_1) - \frac{\alpha}{\delta - \mu} \exp(\alpha t_1) \right] \exp((\mu - \delta)(t_2 - t_1)), & \mu \neq \delta. \end{cases}$$

Разрешая эти соотношения относительно  $t_2 - t_1$  получаем

$$\tau = t_2 - t_1 = \begin{cases} \frac{\lambda}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha t_1)), & \mu = \delta, \\ \frac{1}{\delta - \mu} \ln \frac{\frac{\alpha}{\delta - \mu} - \lambda \exp((\mu - \alpha - \delta)t_1)}{\frac{\alpha}{\delta - \mu} - \lambda}, & \mu \neq \delta. \end{cases} \quad (16)$$

Исследование вида оптимальной траектории различается для случаев  $\mu = \delta$  и  $\mu \neq \delta$ . Далее мы остановимся на случае  $\mu = \delta$  и установим зависимость вида оптимальной траектории от величины параметра  $T$ . В случае  $\mu \neq \delta$  эта зависимость несколько более сложная, соответствующие результаты мы предполагаем опубликовать в дальнейшем.

#### 4. Исследование зависимости вида оптимальной траектории от величины планового периода

Исследуем зависимость траектории  $ABCD$  от протяженности интервала управления  $T$ . С помощью формул (15) получаем значения целевого функционала

$$I = \frac{\lambda}{\mu} - \left[ \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\alpha}{\mu^2} + \frac{\lambda}{\alpha u_0 - \mu} \right] \exp(\alpha t_1 - \mu t_2) + \frac{\alpha}{\mu^2} \exp((\alpha - \mu) t_1) + \frac{\lambda}{\alpha u_0 - \mu} \exp(\alpha t_1 - \alpha u_0 t_2 + (\alpha u_0 - \mu) t_3).$$

Эта формула выведена в предположении  $\alpha u_0 - \mu \neq 0$ , т.к. с учетом непрерывности  $I$  по переменной  $u_0$  все получаемые ниже результаты могут быть перенесены на случай  $\alpha u_0 - \mu = 0$ .

Исследуем функционал  $I$  на экстремум, вычисляя производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t_1} &= (t_2 - t_1) \exp(\alpha t_1 - \mu t_2) \left[ \frac{\alpha(\alpha - \mu)(\exp(\mu(t_2 - t_1)) - 1)}{\mu^2(t_2 - t_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda \alpha^2 u_0}{\alpha u_0 - \mu} \left[ \exp((\alpha u_0 - \mu)(t_3 - t_2)) - \frac{\alpha - \mu}{\lambda \mu} \right] \right]. \end{aligned}$$

Условие обращения в нуль этой производной дает либо значение  $\tau = t_2 - t_1 = 0$ , либо уравнение

$$\frac{\alpha(\alpha - \mu) \exp(\mu(\tau) - 1)}{\mu^2(t_2 - t_1)} + \frac{\lambda \alpha^2 u_0}{\alpha u_0 - \mu} \left[ \exp((\alpha u_0 - \mu)(t_3 - t_2)) - \frac{\alpha - \mu}{\lambda \mu} \right] = 0, \quad (17)$$

откуда с помощью (16) можно получить зависимость  $t_3 = t_3^*(t_1)$ . Вследствие того, что при  $\tau > 0$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t_1 \partial t_3} = (t_2 - t_1) \exp(\alpha t_1 - \mu t_2) \lambda \alpha^2 u_0 \exp((\alpha u_0 - \mu)(t_3 - t_2)) > 0,$$

участки возрастания функции  $t_3^*(t_1)$  соответствуют убыванию функционала  $I$ .

Дифференцируя уравнение (17) по переменной  $\tau$ , получаем, что при  $\tau > 0$

$$\frac{\partial(t_3 - t_2)}{\partial \tau} = - \frac{\exp((\mu - \alpha u_0)(t_3 - t_2)) \alpha(\alpha - \mu) (\mu \tau \exp(\mu(\tau)) - \exp(\mu(\tau)) + 1)}{\lambda \alpha^2 \mu^2 \tau^2 u_0} < 0,$$

т.е. с ростом  $\tau$ , а вместе с ним и  $t_1$ , время движения на участке  $CD$  монотонно убывает.

Дифференцируя уравнение (17) по  $t_1$  и вводя обозначение  $r = \mu \tau$ , имеем

$$\frac{\partial t_3^*}{\partial t_1} = 1 + \lambda \exp(-\alpha t_1) \left[ 1 - \frac{\mu(r - 1) \exp r + \mu}{\alpha r u_0 + (\mu - \alpha u_0)(\exp r - 1)r} \right].$$

Положительность  $\frac{\partial t_3^*}{\partial t_1}$  теперь следует из положительности значения функции

$$f(s) = 1 - \frac{s(r - 1) \exp r + s}{r + (s - 1)(\exp r - 1)r}$$

при  $s = \frac{\mu}{\alpha u_0}$  (более того, эта функция положительна на  $[0, \infty)$ ).

Таким образом, доказано, что функция  $t_3^*(t_1)$ , а значит, и обратная ей  $t_1^*(t_3)$  монотонно возрастают. Остается исследовать предельные случаи вырождения в точку отрезков  $AB$  и  $BC$ . Из (17) имеем

$$t_3^* = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} t_3^*(t_1) = \frac{1}{\alpha u_0 - \mu} \ln \left( \frac{\alpha - \mu}{\lambda \alpha u_0} \right).$$

Это значит, что при  $t_3 \leq t_3^*$  на оптимальной траектории отсутствуют участки  $AB$  и  $BC$ .

Если  $t_3 = t_2$ , то уравнение (17) превращается в (13). Это значит, что при  $\tau < \tau^0$  на оптимальной траектории обязательно содержится участок  $CD$  ненулевой длины, т.е. имеется движение вдоль  $S$ .

Проведенные рассуждения и расчеты позволяют сформулировать следующие выводы о форме оптимальной траектории и ее изменении при увеличении протяженности интервала управления для всевозможных значений параметров и начальных условий задачи (1), (2).

Пусть начальная точка траектории принадлежит  $S^-$ . Тогда полупрямую  $[0, \infty)$  всевозможных значений  $T$  в общем случае можно разбить на четыре участка  $[0, T_1] \cup [T_1, T_2] \cup [T_2, T_3] \cup [T_3, \infty)$ , на каждом из которых оптимальная траектория имеет свои особенности.

При  $T \in [0, T_1]$  оптимальная траектория целиком лежит в  $S^-$  и управление на ней постоянно и равно 1. При увеличении  $T$  в этом интервале конец траектории приближается к области  $S$  и достигает ее при  $T = T_1$ .

При  $T \in [T_1, T_2]$  на оптимальной траектории будут два участка: участок выхода на  $S$  при  $u = 1$  и участок движения вдоль  $S$  при  $u = u_0$ . При увеличении  $T$  в этом интервале время движения на втором участке траектории возрастает до величины  $t_3^*$ , т.е.  $T_2 = T_1 + t_3^*$ .

При  $T \in [T_2, T_3]$  на оптимальной траектории будет три участка: участок захода в  $S^+$  при  $u = 1$ , участок выхода на  $S$  при  $u = 0$  и участок движения вдоль  $S$  при  $u = u_0$ . При увеличении  $T$  в этом интервале длины первых двух участков возрастают, а длина последнего уменьшается. При  $T \rightarrow T_3$  длина последнего участка стремится к нулю, а время движения для предпоследнего – к значению  $\tau^0$ .

При  $T \in [T_3, \infty)$  на оптимальной траектории будет два участка: участок захода в  $S^+$  при  $u = 1$  и участок движения в сторону  $S$  при  $u = 0$ . При изменении  $T$  в этом интервале время движения на втором участке остается равным  $\tau^0$ .

Если начальная точка траектории лежит в  $S$ , то всевозможные значения  $T$  в общем случае можно разбить на три подмножества  $[T_1, T_2] \cup [T_2, T_3] \cup [T_3, \infty)$ , где  $T_1 = 0$ . Форма оптимальной траектории при изменении  $T$  внутри каждого из этих интервалов полностью соответствует форме траектории рассмотренного выше случая с одноименным интервалом изменения  $T$ .

Если начальная точка траектории лежит в  $S^+$ , то возможны два случая: время движения из нее при  $u = 0$  до области  $S$  меньше  $\tau^0$  или не меньше  $\tau^0$ . В первом случае форма оптимальной траектории определяется тремя рассмотренными ранее интервалами  $[T_1, T_2] \cup [T_2, T_3] \cup [T_3, \infty)$ , где  $T_1 = 0$ . Во втором случае форма оптимальной траектории определяется лишь одним интервалом  $[T_3, \infty)$ .

## 5. Заключение

Исследованная задача с негладким интегральным критерием обладает интересной качественной особенностью, которую можно назвать «антимагистральным» эффектом. Ряд задач математической экономики, в частности, классическая задача о максимальном потреблении, весьма похожая на рассмотренную, характеризуются наличием магистрали. Это свойство означает, что при достаточно большом плановом периоде оптимальная траектория почти все время находится на некоторой магистральной прямой [9–11]. Принцип магистрали – фундаментальное понятие в теории оптимального управления, утверждающее, что для широкого класса задач оптимального управления с большим горизонтом прогнозирования оптимальная траектория большую часть времени находится вблизи стационарного решения («магистрали»), а не находится под влиянием начальных или конечных условий [12–15]. В рассмотренной задаче, наоборот, при небольшом плановом периоде движение происходит вдоль  $S$ , а при увеличении  $T$  время отрыва от нее все увеличивается и, наконец, движение вдоль  $S$  отсутствует вообще (возможен возврат на нее в конечный момент).

**СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Damodaran A. *Damodaran on Valuation: Security Analysis for Investment and Corporate Finance*. — New Jersey: John Wiley and Sons, 2018. — 704 p.
2. Miller M. H. *Financial Innovations and Market Volatility*. — New Jersey: Blackwell, 1991. — 288 p.
3. Moyer R. Ch., McGuigan J. R., Kretlow W. J. *Contemporary Financial Management*. — Nashville: South-Western College Pub, 2008. — 880 p.
4. Merton R. C. *Continuous-Time Finance*. — New Jersey: Wiley-Blackwell, 1992. — 752 p.
5. Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики. — М.: Энергоатомиздат, 1996. — 544 с.
6. Ашманов С. А. Математические модели и методы в экономике. — М.: Издательство Московского университета, 1980. — 199 с.
7. Горелик В. А. Максиминые задачи на связанных множествах в банаховых пространствах // Кибернетика. — 1983. — Т. 19, № 1. — С. 81–86.
8. Горелик В. А., Тараканов А. Ф. Метод штрафов и принцип максимума для негладких задач управления с переменной структурой // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — Т. 28, № 3. — С. 432–437.
9. Дементьев Н. П. Магистральные свойства моделей экономической динамики с потреблением. — Новосибирск: Наука, 1991. — 167 с.
10. Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование. — 2-е изд. — М.: Наука, 2021. — 400 с.
11. Поспелов И. Г. Простота сложности экономики: сильный магистральный эффект // Социофизика и социоинженерия. — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2015. — С. 21–22.
12. Trusov N. V. Numerical solution of Mean Field Games problems with turnpike effect // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, No. 4. — P. 561–576.
13. Zaslavski A. Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control. — Springer Science and Business Media, 2005. — Vol. 80. — 300 p.
14. Gurman V. I. Turnpike solutions in the procedures seeking optimal controls // Automation and Remote Control. — 2003. — Vol. 64, No. 3. — P. 399–408.
15. Trélat E. Linear turnpike theorem // Mathematics of Control, Signals, and Systems. — 2023. — Vol. 35, No. 3. — P. 685–739.

**REFERENCES**

1. Damodaran, A. 2018, *Damodaran on valuation: security analysis for investment and corporate finance*, John Wiley and Sons, New Jersey, 704 p.
2. Miller, M.H. 1991, *Financial innovations and market volatility*, Blackwell, Cambridge, MA, 288 p.

3. Moyer, R.C., McGuigan, J.R. & Kretlow, W.J. 2008, *Contemporary financial management*, South-Western College Pub, Nashville, 880 p.
4. Merton, R.C. 1992, *Continuous-time finance*, Wiley-Blackwell, New Jersey, 752 p.
5. Petrov, A.A., Pospelov, I.G. & Shananin, A.A. 1992, *Experience of mathematical modeling of the economy*, Energoatomizdat, Moscow, 544 p.
6. Ashmanov, S.A. 1980, *Mathematical models and methods in economics*, Moscow University Press, Moscow, 199 p.
7. Gorelik, V.A. 1983, “Maximin problems on connected sets in Banach spaces”, *Cybernetics*, vol. 19, no. 1, pp. 81–86.
8. Gorelik, V.A. & Tarakanov, A.F. 1992, “Penalty method and maximum principle for nonsmooth variable-structure control problems”, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 28, no. 3, pp. 432–437.
9. Dementyev, N.P. 1991, *Turnpike properties of models of economic dynamics with consumption*, Nauka, Novosibirsk, 167 p.
10. Lotov, A.V. 2021, *Introduction to economic and mathematical modeling*, 2nd edn, Nauka, Moscow, 400 p.
11. Pospelov, I.G. 2015, “Simplicity of economic complexity: strong main effect”, in *Sociophysics and socioengineering: Proceedings of the Conference*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, pp. 21–22.
12. Trusov, N.V. 2020, “Numerical solution of mean field games problems with turnpike effect”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 41, no. 4, pp. 561–576.
13. Zaslavski, A. 2005, *Turnpike properties in the calculus of variations and optimal control*, Springer Science and Business Media, Berlin, vol. 80.
14. Gurman, V.I. 2003, “Turnpike solutions in the procedures seeking optimal controls”, *Automation and Remote Control*, vol. 64, no. 3, pp. 399–408.
15. Trélat, E. 2023, “Linear turnpike theorem”, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 35, no. 3, pp. 685–739.

Получено: 02.09.2025

Принято в печать: 12.02.2026