ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 515.124.4+515.124.55 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-19-50

Основы теории непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа[1]

С. А. Богатый, А. А. Тужилин

Богатый Семеон Антонович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: bogatyi@inbox.ru
Тужилин Алексей Августинович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Аннотация

Расстояние Громова – Хаусдорфа (в дальнейшем ГХ-расстояние) является мерой неизометричности метрических пространств. В настоящей работе изучается модификация этого расстояния, при которой также учитываются и топологические различия. Полученная функция пар метрических пространств была названа непрерывным ГХ-расстоянием. Мы показываем, что многие базовые свойства классического ГХ-расстояния также имеют место и в непрерывном случае. Тем не менее непрерывное ГХ-расстояние, различая топологии, может существенно отличаться от классического. Мы приведем многочисленные примеры отличия, покажем, какую роль здесь играет топологическая размерность. В частности, мы докажем, что непрерывное ГХ-расстояние, как и классическое, является внутренним, но, в отличие от классического, неполным. Так как мы имеем дело со всеми метрическими пространствами, мы в рамках теории фон Неймана – Бернайса – Гёделя, покажем, как можно перенести топологические понятия и на собственные классы.

Ключевые слова: метрическое пространство, расстояние Хаусдорфа, расстояние Громова – Хаусдорфа, топологическая размерность, малая и большая индуктивные размерности, гиперпространство, континуум.

Библиография: 27 названия.

Для цитирования:
Богатый С. А., Тужилин А. А. Основы теории непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 19–50.

[1]Работа А.А.Тужилина выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 25-21-00152) и при поддержке Китайско-Российского математического центра в Пекинском университете.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 515.124.4+515.124.55 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-19-50

Fundamentals of theory of continuous Gromov-Hausdorff distance

S. A. Bogatyi, A. A. Tuzhilin

Bogatyi Semeon Antonovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: bogatyi@inbox.ru
Tuzhilin Alexey Avgustinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Abstract

The Gromov–Hausdorff distance (hereinafter referred to as the GH-distance) is a measure of non-isometricity of metric spaces. In this paper, we study a modification of this distance that also takes topological differences into account. The resulting function of pairs of metric spaces is called the continuous GH-distance. We show that many basic properties of the classical GH-distance also hold in the continuous case. However, the continuous GH-distance, distinguishing between topologies, can differ significantly from the classical one. We will provide numerous examples of this distinction and demonstrate the role of topological dimension here. In particular, we will prove that the continuous GH-distance, like the classical one, is intrinsic, but, unlike the classical one, it is incomplete. Since we are dealing with all metric spaces, we will show, within the framework of the von Neumann-Bernays-Gödel theory, how topological concepts can be transferred to proper classes.

Keywords: metric space, Hausdorff distance, Gromov-Hausdorff distance, topological dimension, small and large inductive dimensions, hyperspace, continuum.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
Bogatyi, S. A., Tuzhilin, A. A. 2026, “Fundamentals of Theory of Continuous Gromov–Hausdorff distance”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 19–50.

1. Введение.

Настоящая статья посвящена изучению одной из ветвей общей теории расстояния типа Громова – Хаусдорфа. Это расстояние оценивает похожесть разных метрических пространств: если пространства изометричны, то они находятся на нулевом расстоянии друг от друга, и чем больше расстояние, тем сильнее их метрические различия. В классическом определении расстояния Громова – Хаусдорфа никак не учитываются дополнительные структуры, которыми могут быть наделены метрические пространства. Даже топология, порождаемая метрикой, игнорируется этим расстоянием. Эта особенность расстояния Громова – Хаусдорфа была исправлена, например, Риффелем [1], который предложил более тонкое сравнение так называемых квантовых метрических пространств. В работе [2] был предложен вариант модификации расстояния Громова – Хаусдорфа, учитывающий непрерывность. При этом было замечено, что если сравнивать сферы в евклидовом пространстве, наделенные стандартной внутренней метрикой, с помощью классического расстояния Громова – Хаусдорфа, то результат будет отличаться от сравнения с непрерывным аналогом этого расстояния. В работе [3] был предложен другой вариант непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа для сравнения динамических систем и решений уравнений в частных производных. Однако подход этих авторов приводит к существенному усложнению техники, так как их вариант расстояния не удовлетворяет неравенству треугольника. Мы решили воспользоваться определением из [2] и начать более фундаментальное изучение непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа. При этом мы не ограничиваемся компактными метрическими пространствами, составляющими традиционную область определения расстояния классического расстояния Громова – Хаусдорфа, а рассматриваем все пространства, что приводит нас также к некоторым сложностям, связанным с парадоксами теории множеств. Для полноты изложения мы приводим в дополнительном разделе 11 ряд технических результатов, позволяющих работать с такими "монстрами", как собственные классы в смысле фон Неймана–Бернайса–Гёделя [4, 5].

Чтобы сформулировать основные результаты настоящей работы, начнем с напоминания необходимых определений. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, а x и y — его точки, тогда $|xy|=\rho(x,y)$ будет обозначать расстояние между этими точками, а если A и B — непустые подмножества X, то положим $|AB|=|BA|=\inf\bigl\{|ab|:a\in A,\,b\in B\bigr\}$. Если же $A=\{a\}$, то вместо $\bigl|\{a\}B\bigr|=\bigl|B\{a\}\bigr|$ будем писать $|aB|=|Ba|$. Для положительного вещественного s и неотрицательного вещественного r мы определяем

- *открытый шар с центром $a\in X$ и радиусом s* как
$$U_s(a)=\{x\in X:|xa|<s\};$$
- *открытую s-окрестность непустого $A\subset X$* как
$$U_s(A)=\{x\in X:|xA|<s\};$$
- *замкнутый шар с центром $a\in X$ и радиусом r* как
$$B_r(a)=\{x\in X:|xa|\leqslant r\};$$
- *замкнутая r-окрестность непустого $A\subset X$*, поскольку
$$B_r(A)=\{x\in X:|xA|\leqslant r\}.$$

Для непустых подмножеств $A,B\subset X$ величина
$$d_H(A,B)=\max\bigl\{\sup_{a\in A}|aB|,\,\sup_{b\in B}|Ab|\bigr\}$$
называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Эквивалентное определение:
$$d_H(A,B)=\inf\bigl\{r:A\subset B_r(B)\ \text{ и }\ B\subset B_r(A)\bigr\}.$$
Хорошо известно, что d_H является обобщенной псевдометрикой на множестве всех непустых подмножеств метрического пространства X. Здесь слово "обобщенный" означает, что d_H может равняться бесконечности на некоторых парах подмножеств (например, на ограниченном и неограниченном), а слово "псевдометрика" означает, что d_H может равняться нулю на некоторых парах различных подмножеств (например, на незамкнутом множестве и его замыкании).

М. Громов определил расстояние между двумя непустыми метрическими пространствами [6, 7, 8]. *Расстоянием Громова – Хаусдорфа* $d_{GH}(X,Y)$ называется точная нижняя грань расстояний Хаусдорфа между образами пространств X и Y при их изометричных вложениях во всевозможные метрические пространства.

В работе мы изучаем непрерывный аналог расстояния Громова – Хаусдорфа $d^c_{GH}(X,Y)$ (формула (7)). Мы показываем, что

- непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа $d^c_{GH}(X,Y)$ является обобщенной псевдометрикой[2] (предложение 5) и она мажорирует метрику Громова – Хаусдорфа $d_{GH}(X,Y)\leqslant d^c_{GH}(X,Y)$ (свойство (2) предложения 6);

- для нульмерных метрических пространств эти расстояния совпадают (следствие 3), а непрерывное расстояние от связного пространства X до любого нульмерного пространства не меньше диаметра этого связного пространства (предложение 12);

- хотя всякий континуум в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, находится на нулевом расстоянии от множества всех псевдодуг (теорема Бинга [9]), но его непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа до множества всех псевдодуг равно половине диаметра этого континуума (предложение 19);

- континуум Кука дает контрастный пример отличия метрик Хаусдорфа и Громова – Хаусдорфа от непрерывной метрики Громова – Хаусдорфа (следствие 10);

- метрическое пространство Y, находящееся на нулевом непрерывном расстоянии Громова–Хаусдорфа от сферы S^n, $n\geqslant 1$, с произвольной метрикой, изометрично этой сфере (следствие 4). Но для всякой метрики на сфере S^n, $n\geqslant 1$, имеется не менее континуума попарно неизометричных метрических пространств, находящихся на нулевом классическом расстоянии Громова – Хаусдорфа от этой сферы S^n (например, получающиеся из сферы выбрасыванием попарно неизометричных друг другу конечных наборов точек).

Мы также показываем, что непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа является внутренним (теорема 15), но, в отличие от классического расстояния Громова – Хаусдорфа [10, 11, 12], не является полным (теорема 16).

2. Определения.

Собственный класс всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, обозначаем $\mathcal{GH}$, а подмножество в $\mathcal{GH}$, состоящее из всех компактных метрических пространств — через $\mathcal{M}$.

Обычно пользуются более техническим определением расстояния Громова – Хаусдорфа. Для непустых метрических пространств X и Y множество непустых отношений между X и Y, т.е. непустых подмножеств декартова произведения $X\times Y$, обозначим $\mathcal{P}_0(X\times Y)$. Для $\sigma\in\mathcal{P}_0(X\times Y)$ определим *искажение*, положив

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Big\{\big||xx'|-|yy'|\big|:(x,y),\,(x',y')\in\sigma\Big\}. \tag{1}$$

В частности, если $f\colon X\to Y$ — произвольное отображение, то для него определим *искажение* $\operatorname{dis} f$ как искажение его графика

$$\operatorname{dis} f=\sup\Big\{\big||xx'|-|f(x)f(x')|\big|:x,x'\in X\Big\}. \tag{2}$$

Отметим хорошо известное свойство искажения композиции отношений.

Предложение 1. *Если $\sigma\in\mathcal{P}_0(X\times Y)$, $\tau\in\mathcal{P}_0(Y\times Z)$ и $\tau\circ\sigma\neq\emptyset$, то* $\operatorname{dis}(\tau\circ\sigma)\leqslant\operatorname{dis}\sigma+\operatorname{dis}\tau$.

[2] В [3] также рассматривается некоторый аналог непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа, однако там это расстояние не удовлетворяет неравенству треугольника, что приводит к многочисленным техническим сложностям. Мы же следуем подходу из [2].

Многозначное сюръективное отображение R из X на Y называется *соответствием между X и Y*. Множество всех соответствий между X и Y обозначим $\mathcal{R}(X,Y)$. Расстояние Громова – Хаусдорфа вычисляется [8, теорема 7.3.25] по формуле

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\bigr\}. \tag{3}$$

Частный случай соответствия можно построить по любой паре отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, положив $R_{f,g} = f \cup g^{-1}$, где g^{-1} обозначает отношение, обратное к отношению g. С другой стороны, в каждом соответствии $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ можно выделить подсоответствие $R_{f,g}$, если в качестве отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ выбрать такие, что $f \subset R$ и $g \subset R^{-1}$. Легко видеть, что искажение каждого подсоответствия не превосходит искажения соответствия, в частности, $\operatorname{dis} R_{f,g} \leqslant \operatorname{dis} R$. Чтобы вычислить искажение соответствия $R_{f,g}$, нам понадобится *коискажение* $\operatorname{codis}(f,g)$, определяемое следующим образом:

$$\operatorname{codis}(f,g) = \sup\Bigl\{\bigl||x\,g(y)| - |f(x)\,y|\bigr| : x \in X,\ y \in Y\Bigr\}. \tag{4}$$

Предложение 2. *Для любых $X,Y \in \mathcal{GH}$, соответствия $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ и произвольных двух отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ таких, что $f \subset R$ и $g \subset R^{-1}$, выполняется*

$$\operatorname{dis} R_{f,g} = \max\bigl\{\operatorname{dis} f,\ \operatorname{dis} g,\ \operatorname{codis}(f,g)\bigr\} \leqslant \operatorname{dis} R. \tag{5}$$

Из равенства (3) и предложения 2 мгновенно получается следующий результат.

Следствие 1 (см. [2, p. 3]). *Для любых $X,Y \in \mathcal{GH}$ выполняется*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf_{\substack{f\colon X\to Y\\ g\colon Y\to X}} \max\bigl\{\operatorname{dis} f,\ \operatorname{dis} g,\ \operatorname{codis}(f,g)\bigr\}. \tag{6}$$

Из предложения 1 вытекает, что искажение композиции отображений не превосходит суммы искажений этих отображений.

Предложение 3. *Пусть даны три метрических пространства X, Y и Z, а также отображения $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y \underset{k}{\overset{h}{\rightleftarrows}} Z$. Тогда*

$$\operatorname{codis}(h\circ f, g\circ k) \leqslant \operatorname{codis}(f,g) + \operatorname{codis}(h,k).$$

Доказательство. Выберем произвольные $x \in X$, $z \in Z$ и положим $y_1 = f(x)$, $y_2 = k(z)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Bigl|\bigl|x\,(g\circ k)(z)\bigr| - \bigl|(h\circ f)(x)\,z\bigr|\Bigr| &= \Bigl|\bigl|x\,g(y_2)\bigr| - \bigl|h(y_1)\,z\bigr|\Bigr| = \\ &= \Bigl|\bigl|x\,g(y_2)\bigr| - \bigl|y_1y_2\bigr| + \bigl|y_1y_2\bigr| - \bigl|h(y_1)\,z\bigr|\Bigr| \leqslant \\ &\leqslant \Bigl|\bigl|x\,g(y_2)\bigr| - \bigl|f(x)y_2\bigr|\Bigr| + \Bigl|\bigl|y_1k(z)\bigr| - \bigl|h(y_1)\,z\bigr|\Bigr| \leqslant \operatorname{codis}(f,g) + \operatorname{codis}(h,k).\end{aligned}$$

Результат вытекает из произвольности x и z. $\square$

Если в следствии 1 ограничиться непрерывными отображениями f и g, то получим определение *непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа*:

$$d^c_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf_{\substack{f\in C(X,Y)\\ g\in C(Y,X)}} \operatorname{dis} R_{f,g} = \frac{1}{2}\inf_{\substack{f\in C(X,Y)\\ g\in C(Y,X)}} \max\bigl\{\operatorname{dis} f,\ \operatorname{dis} g,\ \operatorname{codis}(f,g)\bigr\}, \tag{7}$$

где $C(Z,W)$ обозначает множество всех непрерывных отображений из метрического пространства Z в метрическое пространство W. Это расстояние для краткости будем также называть *непрерывным GH-расстоянием.*

Для (неодноточечного) метрического пространства X и точки $x \in X$ определим описанный и вписанный радиусы (с центром в x) соответственно как $R_x = \sup\bigl\{|xx'| : x' \in X\bigr\}$ и $r_x = \inf\bigl\{|xx'| : x' \in X,\ x' \neq x\bigr\}$. Введем четыре величины

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(X) &= \sup\bigl\{R_x : x \in X\bigr\} = \sup\bigl\{|xx'| : x, x' \in X\bigr\} \text{ — \textit{диаметр}},\\
R(X) &= \inf\bigl\{R_x : x \in X\bigr\} \text{ — \textit{чебышевский радиус}},\\
d(X) &= \sup\bigl\{r_x : x \in X\bigr\},\\
s(X) &= \inf\bigl\{r_x : x \in X\bigr\} = \inf\bigl\{|xx'| : x, x' \in X,\ x' \neq x\bigr\}.
\end{aligned}$$

Для одноточечного метрического пространства зарезервируем обозначение Δ_1. Естественно считать $\operatorname{diam}(\Delta_1) = R(\Delta_1) = d(\Delta_1) = s(\Delta_1) = 0$. Известно [8, p. 255], что $2d_{GH}(\Delta_1, X) = \operatorname{diam} X$. Отметим, что для неограниченного пространства $\operatorname{diam}(X) = R(X) = \infty$.

Ясно, что для неодноточечного метрического пространства $d(X) = 0$ тогда и только тогда, когда в X нет изолированных точек. Для неодноточечного конечного метрического пространства $s(X) > 0$. При $s(X) > 0$ говорят, что *метрика отделена от нуля.* Для стандартной сферы $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, наделенной как индуцированной из $\mathbb{R}^{m+1}$ метрикой, так и внутренней метрикой, имеем $0 = s(S^m) = d(S^m) < R(S^m) = \operatorname{diam}(S^m)$; для шара $B^m \subset \mathbb{R}^m$ выполняется $0 = s(B^m) = d(B^m) < 2R(B^m) = \operatorname{diam}(B^m)$.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 4. *Для произвольного метрического пространства X справедливы цепочки неравенств*

$$0 \leqslant s(X) \leqslant d(X) \leqslant \operatorname{diam}(X) \leqslant 2R(X) \quad \textit{и} \quad s(X) \leqslant R(X) \leqslant \operatorname{diam}(X).$$

Для метрического пространства (X,ρ) и числа $\lambda \geqslant 0$ через λX будем обозначать множество X с (псевдо)метрикой $\lambda\rho$.

Напомним также элементы теории размерности топологических пространств, которые понадобятся нам в дальнейшем.

2.1. Размерности топологических пространств

Мы приведем три разных понятия размерности, которые совпадают в случае сепарабельных метрических пространств, и могут различаться для метрических и топологических пространств более общего вида. Начнем с размерности, которая в разных источниках называется или размерностью Лебега, или размерностью в смысле покрытий, или топологической размерностью. Именно ей мы будем в основном пользоваться. Мы приведем классическое определение из [18]. Напомним, что для покрытия $\mathcal{U}$ топологического пространства X его *кратностью* $\operatorname{ord}\mathcal{U}$ называется или наименьшее натуральное число n такое, что каждая точка из X содержится не более чем в n элементах покрытия $\mathcal{U}$, или, если такого n не существует, то символ бесконечность ∞. Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств топологического пространства X называется *локально конечным*, если каждая точка из X обладает окрестностью, которая пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\mathcal{A}$. Важным частным случаем таких семейств являются *локально конечные покрытия $\mathcal{U}$.*

Теорема 1 ([18, 1.1.12]). *Пусть $\mathcal{F}$ — локально конечное семейство замкнутых множеств топологического пространства X, тогда объединение элементов этого семейства — замкнутое подмножество X.*

Далее, говорят, что покрытие $\mathcal{V}$ пространства X *вписано* в покрытие $\mathcal{U}$ этого пространства, мы обозначим это свойство через $\mathcal{V} \succ \mathcal{U}$, если для каждого $V \in \mathcal{V}$ имеется $U \in \mathcal{U}$ такой, что $V \subset U$. Наиболее интересными будут для нас открытые покрытия топологического пространства X, так что множество таких покрытий обозначим $\operatorname{cov}(X)$. Подсемейство в $\operatorname{cov}(X)$, состоящее из конечных покрытий, обозначим $\operatorname{cov}_f(X)$.

Теорема 2 (Стоун [17], см. также [18, 4.4.1]). *В каждое открытое покрытие метрического пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие.*

Топологическое пространство называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие. В этих терминах теорема 2 звучит так: *каждое метрическое пространство паракомпактно.*

Отметим, что каждая из трех размерностей определяется для своего класса метрических пространств (регулярных, нормальных, тихоновских). Мы же в дальнейшем будем применять соответствующие результаты исключительно к метрических пространствам, поэтому сразу предположим, что пространство X, для которого мы будем определять размерности, является хаусдорфовым и нормальным, как и каждое метрическое пространство: такое X всегда автоматически регулярное и тихоновское.

Определим сначала *размерность Лебега* $\dim X$, называемую также *размерностью в смысле покрытий* или *топологической размерностью*:

- если $X = \emptyset$, то $\dim X = -1$;
- если $X \neq \emptyset$, то положим

$$\dim X = -1 + \sup_{\mathcal{U} \in \operatorname{cov}_f(X)} \inf_{\substack{\mathcal{V} \in \operatorname{cov}(X) \\ \mathcal{V} \succ \mathcal{U}}} \operatorname{ord} \mathcal{V}.$$

Иными словами, для непустого пространства X мы рассматриваем такие $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, для которых в каждое конечное открытое покрытие $\mathcal{U}$ можно вписать открытое покрытие $\mathcal{V}$ кратности не больше $n + 1$ и берем наименьшее из этих n.

Отметим, что $\dim X = 0$ равносильно возможности вписать в каждое конечное открытое покрытие открытое разбиение. Пространства X, для которых $\dim X = 0$, называются *нульмерными.*

Пример 1. *Пусть X — непустое дискретное топологическое пространство, тогда в каждое конечное открытое покрытие вписывается покрытие из одноточечных открытых множеств, так что* $\dim X = 0$.

Замечание 1. *В ряде монографий, например в* [19], *при определении* $\dim X$ *рассматриваются любые, не обязательно конечные покрытия $\mathcal{U}$. Мы же будем следовать более традиционному определению.*

Теорема 3 (Даукер [20], см. также [18, 7.2.4]). *Нормальное хаусдорфово пространство X удовлетворяет* $\dim X \leqslant n$, *если и только если в каждое его локально конечное открытое покрытие можно вписать покрытие кратности не больше n.*

Определим теперь две *индуктивных размерности* хаусдорфова нормального пространства X: *малую* $\operatorname{ind} X$ и *большую* $\operatorname{Ind} X$. Напомним, что каждое подпространство хаусдорфова пространства также хаусдорфово, а для нормальных пространств имеет место более тонкое утверждение: каждое замкнутое подпространство нормального пространства само нормально. В частности, так как граница произвольного подмножества топологического пространства замкнута, то границы в нормальных хаусдорфовых топологических пространств сами являются такими. Мы воспользуемся этим соображением при определении индуктивных размерностей.

Итак, пусть

- $\operatorname{ind} X = -1$ в точности тогда, когда $X = \emptyset$;
- если $X \neq \emptyset$ и для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ мы уже определили, что означает $\operatorname{ind} Y \leqslant n-1$ для хаусдорфовых нормальных топологических пространств, то положим $\operatorname{ind} X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда у каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности V существует открытая окрестность U, $x \in U \subset V$, удовлетворяющая $\operatorname{ind} \partial U \leqslant n-1$;
- положим $\operatorname{ind} X = n$, если и только если $\operatorname{ind} X \leqslant n$ и неверно, что $\operatorname{ind} X \leqslant n-1$;
- если описанного выше числа n не существует, то положим $\operatorname{ind} X = \infty$.

Пример 2. *Для непустого X условие* $\operatorname{ind} X = 0$ *означает, что у каждой точки $x \in X$ в каждой ее окрестности V имеется открытая окрестность U с пустой границей, т.е. U является открыто-замкнутым подмножеством X. Если такое U отлично от всего X, то $X \setminus U$ — также непустое открытое подмножество X. Таким образом, связными компонентами множества X являются лишь одноточечные подмножества. Действительно, если $Y \subset X$ состоит более чем из одной точки и $x \in Y$, для каждой отличной от x точки $y \in Y$ имеются, в силу хаусдорфовости, непересекающиеся окрестности V^x и V^y. Выбрав в V^x открытую в X окрестность U точки x, разобьем множество Y на два непустых открытых множества $Y \cap U$ и $Y \cap (X \setminus U)$, так что Y несвязно. Напомним, что топологическое пространство, в котором все связные компоненты — одноточечные подмножества, называется* вполне несвязным. *Тем самым, мы показали, что условие* $\operatorname{ind} X = 0$ *влечет полную несвязность X.*

Пример 3. *Извлечем теперь из примера 2 следствие для пространства X с* $\operatorname{ind} X > 0$. *Последнее условие означает, что для некоторой точки $x \in X$ не выполняется требование нульмерности. А это означает, что существует некоторая окрестность V точки x, для которой каждая окрестность $U \subset V$ этой точки не является открыто-замкнутой. Тем самым, каждая открыто-замкнутая окрестность точки x обязательно пересекает $F := X \setminus V$. Тем самым, мы приходим к следующей формулировке*: ***условие*** $\operatorname{ind} X > 0$ ***равносильно существованию точки** $x \in X$ **и не содержащего ее замкнутого множества** F **такого, что каждая открыто-замкнутая окрестность точки** x **пересекает** F.*

Определим теперь большую индуктивную размерность. Пусть

- $\operatorname{Ind} X = -1$ в точности тогда, когда $X = \emptyset$;
- если $X \neq \emptyset$ и для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ мы уже определили, что означает $\operatorname{Ind} Y \leqslant n-1$ для хаусдорфовых нормальных топологических пространств, то положим $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда для каждого замкнутого $F \subset X$ и любого открытого $V \subset X$ такого, что $F \subset V$, существует открытое $U \subset X$, $F \subset U \subset V$, удовлетворяющее $\operatorname{Ind} \partial U \leqslant n-1$;
- положим $\operatorname{Ind} X = n$, если и только если $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ и неверно, что $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$;
- если описанного выше числа n не существует, то положим $\operatorname{Ind} X = \infty$.

Пример 4. *Проведем рассуждения, аналогичные тем, что в примерах 2 и 3. Для непустого X условие* $\operatorname{Ind} X = 0$ *означает, что у каждого замкнутого множества $F \subset X$ в любом открытом $V \supset F$ содержится открытое $U \supset F$ с пустой границей, т.е. являющееся U открыто-замкнутым подмножеством X. В частности,* если X — непустое дискретное пространство, то $\operatorname{Ind} X = 0$.

Сформулируем теперь эквивалентную переформулировку: условие $\operatorname{Ind} X > 0$ *означает существование замкнутого множества $F \subset X$ и открытого $V \supset F$ такого, что каждое* *открыто-замкнутое множество $U \supset F$ пересекает замкнутое $H := X \setminus V$. Тем самым, мы приходим к следующей варианту:* условие $\operatorname{Ind} X > 0$ равносильно существованию непересекающихся замкнутых множеств $F, H \subset X$ таких, что каждое открыто-замкнутое множество $U \supset F$ пересекает H. *Если в предыдущем утверждении в качестве X взять метрическое пространство, а условие $F \cap H = \emptyset$ заменить на $|FH| > 0$, то получим теорему Нагами–Робертса [21]:* для метрического пространства X условие $\operatorname{Ind} X > 0$ равносильно существованию замкнутых множеств $F, H \subset X$ таких, что $|FH| > 0$ и каждое открыто-замкнутое множество $U \supset F$ пересекает H.

Замечание 2. *Так как все одноточечные подмножества в X замкнуты в силу хаусдорфовости, то* $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Теорема 4 ([18]). *Для любого сепарабельного метрического пространства X выполняется* $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$.

Напомним, что топологическое пространство называется *линделефовым*, если из любого его открытого покрытия можно выделить не более чем счетное подпокрытие. Примером линделефовых пространств могут служить как компакты, так и пространства, обладающие счетной базой.

Теорема 5 ([18]). *Для любого линделефова X условия* $\dim X = 0$, $\operatorname{ind} X = 0$ *и* $\operatorname{Ind} X = 0$ *эквивалентны.*

3. Общие свойства непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа

Предложение 5. *Расстояние d_{GH}^c удовлетворяет неравенству треугольника.*

Доказательство. Пусть X, Y и Z — произвольные метрические пространства. Покажем, что

$$d_{GH}^c(X,Z) \leqslant d_{GH}^c(X,Y) + d_{GH}^c(Y,Z).$$

Если одно из расстояний $d_{GH}^c(X,Y)$ или $d_{GH}^c(Y,Z)$ бесконечно, то неравенство имеет место. Пусть теперь оба этих расстояния конечны. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $f \in C(X,Y)$ и $g \in C(Y,X)$, а также $h \in C(Y,Z)$ и $k \in C(Z,Y)$, для которых $d_{GH}^c(X,Y) \geqslant \max\bigl\{\operatorname{dis} f, \operatorname{dis} g, \operatorname{codis}(f,g)\bigr\} - \varepsilon$ и $d_{GH}^c(Y,Z) \geqslant \max\bigl\{\operatorname{dis} h, \operatorname{dis} k, \operatorname{codis}(h,k)\bigr\} - \varepsilon$. Тогда

$$\begin{gathered}
\operatorname{dis}(h \circ f) \leqslant \operatorname{dis} f + \operatorname{dis} h \leqslant d_{GH}^c(X,Y) + d_{GH}^c(Y,Z) + 2\varepsilon,\\
\operatorname{dis}(g \circ k) \leqslant \operatorname{dis} g + \operatorname{dis} k \leqslant d_{GH}^c(X,Y) + d_{GH}^c(Y,Z) + 2\varepsilon,\\
\operatorname{codis}(h \circ f, g \circ k) \leqslant \operatorname{codis}(f,g) + \operatorname{codis}(h,k) \leqslant d_{GH}^c(X,Y) + d_{GH}^c(Y,Z) + 2\varepsilon,
\end{gathered}$$

откуда

$$d_{GH}^c(X,Z) \leqslant \max\bigl\{\operatorname{dis}(h \circ f), \operatorname{dis}(g \circ k), \operatorname{codis}(h \circ f, g \circ k)\bigr\} \leqslant d_{GH}^c(X,Y) + d_{GH}^c(Y,Z) + 2\varepsilon.$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε. $\square$

Собственный класс всех непустых метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, наделенный непрерывным расстоянием Громова – Хаусдорфа обозначим $\mathcal{GH}^c$. Из сказанного выше вытекает, что d_{GH}^c является обобщенной псевдометрикой на $\mathcal{GH}^c$. Подмножество в $\mathcal{GH}^c$, состоящее из всех компактных метрических пространств, обозначим $\mathcal{M}^c$. Как и в случае обычного расстояния Громова – Хаусдорфа, ограничение d_{GH}^c на $\mathcal{M}^c$ является метрикой (теорема 6).

Основные свойства обычного расстояния Громова – Хаусдорфа также имеют место и в случае с его непрерывным аналогом.

Предложение 6. *Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}^c$ выполняется*

1. *если метрические пространства X и Y изометричны, то $d^c_{GH}(X,Y)=0$;*
2. $d_{GH}(X,Y) \leqslant d^c_{GH}(X,Y)$;
3. $2d^c_{GH}(\Delta_1, X) = \operatorname{diam} X$;
4. $2d^c_{GH}(X,Y) \leqslant \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$;
5. *если диаметр X или Y конечен, то $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant \bigl|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y\bigr|$;*
6. *если диаметр X конечен, то для любых $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ имеем $2d^c_{GH}(\lambda X, \mu X) = |\lambda-\mu| \operatorname{diam} X$, откуда мгновенно вытекает, что кривая $\gamma(t) := t\,X$ является кратчайшей между любыми своими точками, причем длина такого отрезка кривой равна расстоянию между его концами;*
7. *для любого $\lambda > 0$ имеем $d^c_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda\, d^c_{GH}(X,Y)$, а если пространства X и Y ограничены, то равенство имеет место и для $\lambda = 0$;*
8. *если $X_1, X_2, \dots$ — последовательность метрических пространств, сходящихся в метрике d^c_{GH}, то она также сходится и в метрике d_{GH}.*

Доказательство. (1) Изометрии $h\colon X \to Y$ и h^{-1} непрерывны и $\operatorname{dis} h = \operatorname{dis} h^{-1} = \operatorname{codis}(h, h^{-1}) = 0$.

(2) Неравенство имеет место, так как расстояние $d_{GH}(X,Y)$ есть инфимум по большему семейству отображений, чем для вычисления $d^c_{GH}(X,Y)$.

(3) Для любых непрерывных $\Delta_1 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} X$ имеем $\operatorname{dis} f = 0$, $\operatorname{dis} g = \operatorname{diam} X$, и если $\Delta_1 = \{p\}$, то

$$\operatorname{codis}(f,g) = \sup_{x\in X}\Bigl|\bigl|p\,g(x)\bigr| - \bigl|f(p)\,x\bigr|\Bigr| = \sup_{x \in X}\bigl|f(p)\,x\bigr| \leqslant \operatorname{diam} X,$$

что и требовалось.

(4) Для любых непрерывных $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ имеем

$$\operatorname{dis} f \leqslant \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}, \quad \operatorname{dis} g \leqslant \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\},$$
$$\operatorname{codis}(f,g) = \sup_{x\in X,\, y \in Y}\Bigl|\bigl|x\,g(y)\bigr| - \bigl|f(x)\,y\bigr|\Bigr| \leqslant \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\},$$

что и требовалось.

(5) Это вытекает из соответствующего неравенства для d_{GH} и того, что $d_{GH} \leqslant d^c_{GH}$.

(6) По свойству (5) имеем

$$2d^c_{GH}(\lambda X, \mu X) \geqslant \bigl|\operatorname{diam}(\lambda X) - \operatorname{diam}(\mu X)\bigr| = |\lambda - \mu| \operatorname{diam} X.$$

Чтобы доказать обратное неравенство, выберем в качестве непрерывных $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} X$ тождественное отображение, тогда если обозначить $\operatorname{dis}_{\lambda,\mu}$ и $\operatorname{codis}_{\lambda,\mu}$ соответственно искажение и коискажение отображений между пространствами λX и μX, то

$$\operatorname{dis}_{\lambda,\mu} f = \sup_{x,x' \in X}\Bigl|\lambda|xx'| - \mu|xx'|\Bigr| = |\lambda-\mu|\operatorname{diam} X,$$
$$\operatorname{codis}_{\lambda,\mu}(f,g) = \sup_{x,x'\in X}\Bigl|\lambda|xx'| - \mu|xx'|\Bigr| = |\lambda-\mu|\operatorname{diam} X,$$

откуда и вытекает требуемое.

(7) Выберем произвольные непрерывные $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ и обозначим $\operatorname{dis}_\lambda$ и $\operatorname{codis}_\lambda$ соответственно искажение и коискажение отображений между λX и λY. Тогда

$$\operatorname{dis}_\lambda f = \sup_{x,x' \in X} \Big| \lambda |xx'| - \lambda \big| f(x) f(x') \big| \Big| = \lambda \operatorname{dis}_\lambda f,$$

$$\operatorname{codis}_\lambda(f,g) = \sup_{x \in X,\, y \in Y} \Big| \lambda |x\, g(y)| - \lambda \big| f(x) y \big| \Big| = \lambda \operatorname{codis}(f,g),$$

откуда и вытекает декларируемое.

(8) Это следует из неравенства $d_{GH} \leqslant d_{GH}^c$. $\square$

4. Сравнение метрик (на нульмерных пространствах)

Предложение 7. *Если X и Y — дискретные метрические пространства, то $d_{GH}^c(X,Y) = d_{GH}(X,Y)$.*

Доказательство. Это вытекает из того, что все отображения между X и Y непрерывны. $\square$

Для доказательства следующего предложения нам понадобится достаточное условие непрерывности отображения метрических пространств.

Лемма 1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение метрических пространств, причем существует положительное число $\varepsilon \in \mathbb{R}$ такое, что для любых различных $y_1, y_2 \in Y$ с непустыми прообразами и любых $x_1 \in f^{-1}(y_1)$ и $x_2 \in f^{-1}(y_2)$ выполняется $|x_1x_2| > \varepsilon$. Тогда отображение f непрерывно.*

Доказательство. Действительно, пусть $y \in Y$ имеет непустой прообраз, тогда для любой точки $x \in f^{-1}(y)$ выполняется $U_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(y)$, поэтому $f^{-1}(y)$ открыто и, значит, для любого открытого $V \subset Y$ множество $f^{-1}(V) = \cup_{y \in V} f^{-1}(y)$ также открыто в X. $\square$

Предложение 8. *Пусть X и Y — произвольные метрические пространства такие, что $2d_{GH}(X,Y) < s(X)$, тогда $d_{GH}^c(X,Y) = d_{GH}(X,Y)$.*

Доказательство. Положим $s := s(X)$ и пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $2d_{GH}(X,Y) < s - \varepsilon$. Тогда существует соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$, у которого $\operatorname{dis} R < s - \varepsilon$. Множество всех таких соответствий обозначим $\mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)$.

Согласно формуле (3) имеет место равенство $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2} \inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)\big\}$. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)$. Покажем, что $\big|R(x_1)R(x_2)\big| > \varepsilon$ при $x_1 \neq x_2$. Действительно, для любых $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in R$, $x_1 \neq x_2$, выполняется неравенство $|y_1y_2| \geqslant$ $\geqslant |x_1x_2| - \operatorname{dis} R > s - (s - \varepsilon) = \varepsilon > 0$. Поэтому множества $\{R(x) : x \in X\}$ образуют открытое разбиение пространства Y.

Построим отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ так: для каждого $x \in X$ точку $f(x)$ выберем произвольно в $R(x)$, а для каждого $y \in R(x)$ положим $g(y) = x$. Так как $s(X) > 0$, то X дискретно, поэтому f непрерывно. Непрерывность g вытекает из леммы 1. По предложению 2 имеем $\operatorname{dis} R_{f,g} \leqslant \operatorname{dis} R$. Таким образом, мы построили отображение $\mathcal{R}_\varepsilon(X,Y) \to \mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)$, $R \mapsto R_{f,g}$, поэтому, в силу определения d_{GH}^c,

$$d_{GH}^c(X,Y) \leqslant \frac{1}{2} \inf\big\{\operatorname{dis} R_{f,g} : R \in \mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)\big\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)\big\} = d_{GH}(X,Y).$$

Осталось воспользоваться неравенством (2) предложения 6. $\square$

Предложение 9. *Пусть X — метрическое пространство и $\dim X = 0$. Тогда для всякого подмножества $A \subset X$ справедливо неравенство $d^c_{GH}(A, X) \leqslant d_H(A, X)$.*

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $r = d_H(A, X) + \varepsilon$, тогда, по определению расстояния Хаусдорфа, $\lambda = \bigl\{U_r(a) : a \in A\bigr\}$ — открытое покрытие пространства X. Так как $\dim X = 0$, то по теоремам Стоуна [17] (см. [18, теорема 4.4.1]) и Даукера [20] (см. [18, теорема 7.2.4]) существует вписанное в λ открытое покрытие $\mu = \{U_\beta\}$ кратности 1, т.е. μ — разбиение пространства X открытыми множествами. Следовательно, для всякого U_β существует такая точка $a_\beta \in A$, что $U_\beta \subset U_r(a_\beta)$.

Пусть $f\colon A \to X$ — включение, а отображение $g\colon X \to A$ задается формулой $g(U_\beta) = a_\beta$. Так как множества U_β открыты и попарно не пересекаются, то отображение g корректно определено и непрерывно, причем для всякой точки $x \in X$ имеет место неравенство $\bigl|x\,g(x)\bigr| < r$. Ясно, что $\operatorname{dis} f = 0$,

$$\operatorname{dis} g = \sup_{x,x' \in X} \Bigl| |xx'| - \bigl|g(x)g(x')\bigr| \Bigr| \leqslant \sup_{x,x' \in X} \Bigl(\bigl|x\,g(x)\bigr| + \bigl|x'\,g(x')\bigr| \Bigr) \leqslant 2r,$$

и, наконец,

$$\operatorname{codis}(f, g) = \sup_{x \in X,\, a \in A} \Bigl| \bigl|x\,f(a)\bigr| - \bigl|g(x)a\bigr| \Bigr| = \sup_{x \in X,\, a \in A} \Bigl| |xa| - \bigl|g(x)a\bigr| \Bigr| \leqslant \sup_{x \in X} |x\,g(x)| \leqslant r,$$

поэтому $\operatorname{dis} R_{f,g} \leqslant 2d_H(A, X) + 2\varepsilon$ и, в силу произвольности ε, имеем $\operatorname{dis} R_{f,g} \leqslant 2d_H(A, X)$, откуда $d^c_{GH}(A, X) \leqslant d_H(A, X)$, что и утверждалось. □

Следствие 2. *Для метрических пространств X, Y и любых их всюду плотных подмножеств $A \subset \overline{A} = X$, $B \subset \overline{B} = Y$ таких, что $\dim A = \dim B = 0$, справедливо равенство*

$$d^c_{GH}(A, B) = d_{GH}(X, Y).$$

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ выделим в множествах A и B дискретные ε-сети $A_\varepsilon \subset A$ и $B_\varepsilon \subset B$ соответственно. Согласно неравенству треугольника для расстояний d^c_{GH} и d_{GH}, а также предложениям 9 и 7 имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} d^c_{GH}(A, B) &\leqslant d^c_{GH}(A, A_\varepsilon) + d^c_{GH}(A_\varepsilon, B_\varepsilon) + d^c_{GH}(B_\varepsilon, B) \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon + d^c_{GH}(A_\varepsilon, B_\varepsilon) = 2\varepsilon + d_{GH}(A_\varepsilon, B_\varepsilon) \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon + d_{GH}(A_\varepsilon, A) + d_{GH}(A, X) + d_{GH}(X, Y) + d_{GH}(Y, B) + d_{GH}(B, B_\varepsilon) \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon + \varepsilon + 0 + d_{GH}(X, Y) + 0 + \varepsilon = 4\varepsilon + d_{GH}(X, Y). \end{aligned}$$

Из произвольности числа ε и неравенства (2) предложения 6 следует цепочка неравенств $d^c_{GH}(A, B) \leqslant d_{GH}(X, Y) = d_{GH}(A, B) \leqslant d^c_{GH}(A, B)$, дающая требуемое равенство. □

Следствие 3. *Для любых нульмерных метрических пространств X и Y справедливо равенство $d^c_{GH}(X, Y) = d_{GH}(X, Y)$.*

Подчеркнем, что предложение 3 является обобщением предложения 7, которым, впрочем, мы пользовались в доказательстве этого более общего утверждения.

Предложение 10. *Пусть X — метрическое пространство и $\operatorname{ind} X \neq 0$. Тогда существует такое $r > 0$, что для всякого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ в метрическое пространство Y с $\operatorname{ind} Y = 0$ имеет место неравенство $\operatorname{dis} f \geqslant r$. В частности, справедливо неравенство $2d^c_{GH}(X, Y) \geqslant r$.*

Доказательство. В силу условия $\operatorname{ind} X \neq 0$ существуют такие замкнутое подмножество $F \subset X$ и точка $x \in X \setminus F$, что всякое открыто-замкнутое множество, содержащее точку x, пересекается с множеством F. Положим $r = |xF| > 0$. Для каждого отображения $f\colon X \to Y$ справедлива альтернатива: или $\bigl|f(x)f(F)\bigr| = 0$, или $\bigl|f(x)f(F)\bigr| > 0$.

В первом случае справедлива оценка $\operatorname{dis} f \geqslant |xF| = r$.

Во втором случае условие $\operatorname{ind} Y = 0$ влечет существование у точки $f(x)$ открыто-замкнутой окрестности $U^{f(x)}$, лежащей вне замыкания $\overline{f(F)}$ множества $f(F)$. Прообраз $U^x := f^{-1}\bigl(U^{f(x)}\bigr)$ является открыто-замкнутой окрестностью точки x, причем $U^x \cap F = \emptyset$, а это — противоречие с выбором точки x и замкнутого множества F. $\square$

Предложение 11. *Пусть X — метрическое пространство и $\operatorname{Ind} X \neq 0$. Тогда существует такое $r > 0$, что для всякого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ в метрическое пространство Y с $\operatorname{Ind} Y = 0$ имеет место неравенство $\operatorname{dis} f \geqslant r$. В частности, справедливо неравенство $2d^c_{GH}(X, Y) \geqslant r$.*

Доказательство. По теореме Нагами–Робертса [21, Theorem on p. 601] существуют такие замкнутые подмножества $F, H \subset X$, что $r = |FH| > 0$ и всякое открыто-замкнутое множество, содержащее множество F, пересекается с множеством H. Для каждого отображения $f\colon X \to Y$ справедлива альтернатива: или $\bigl|f(F)f(H)\bigr| = 0$, или $\bigl|f(F)f(H)\bigr| > 0$.

В первом случае имеет место оценка $\operatorname{dis} f \geqslant |FH| = r$.

Во втором случае условие $\operatorname{Ind} Y = 0$ влечет существование у замкнутого множества $\overline{f(F)}$ открыто-замкнутой окрестности $U^{f(F)}$, лежащей вне замыкания $\overline{f(H)}$ множества $f(H)$. Прообраз $U^F = f^{-1}\bigl(U^{f(F)}\bigr)$ является открыто-замкнутой окрестностью множества F и $U^F \cap H = \emptyset$, а это — противоречие с выбором замкнутых множеств F и H. $\square$

Напомним, что топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если все его связные компоненты — одноточечны.

Предложение 12. *Пусть $K \subset X$ — связное подмножество метрического пространства X, и Y — вполне несвязное метрическое пространство. Тогда для каждого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ выполняется $\operatorname{dis} f \geqslant \operatorname{diam} K$ и, поэтому, $2d^c_{GH}(X, Y) \geqslant \operatorname{diam} K$. В частности, если X — связное метрическое пространство, а Y — вполне несвязное метрическое пространство, для которого $\operatorname{diam} X \geqslant \operatorname{diam} Y$, то $2d^c_{GH}(X, Y) = \operatorname{diam} X$. Например, это имеет место для любой дискретной ε-сети $Y \subset X$.*

Доказательство. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то, в силу связности K, ограничение отображения f на K постоянно, так что $\operatorname{dis} f \geqslant \operatorname{diam} K$, поэтому $2d^c_{GH}(X, Y) \geqslant \operatorname{diam} X$ по определению непрерывного расстояния Хаусдорфа. Второе утверждение вытекает из пункта (2) предложения 6. $\square$

5. Нулевое расстояние

Мы уже указывали, что (непрерывное) расстояние Громова – Хаусдорфа является псевдометрикой, т.е. может равняться нулю между неизометричными пространствами. Поэтому важное значение имеет описание некоторых классов метрических пространств, находящихся на нулевом расстоянии друг от друга.

Теорема 6. *Для компактных метрических пространств X и Y следующие условия эквивалентны:*

1. $d^c_{GH}(X, Y) = 0$;
2. $d_{GH}(X, Y) = 0$;

3. *пространства X и Y изометричны.*

Доказательство. Импликации (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) следуют из свойств (1) и (2) соответственно предложения 6.

Импликации (2) $\Rightarrow$ (3) — это известная глубокая теорема [8, теорема 7.3.30]. $\square$

Нам для приложений понадобится следующий вариант этой теоремы, мгновенно вытекающий из [8, Exercise 7.3.31].

Теорема 7. *Если метрическое пространство X компактно, то для метрического пространства Y следующие условия эквивалентны*:

1. $d_{GH}(X,Y)=0$;

2. *пространство Y изометрично плотному подмножеству пространства X (например, в случае $X=S^n$ имеется не менее континуума попарно неизометричных Y, см. Введение).*

Ситуация с непрерывным расстоянием Громова – Хаусдорфа существенно иная.

Фиксируем на сфере S^n, $n\geqslant 1$, некоторую метрику ρ и некоторую непрерывную свободную инволюцию σ (например антиподальное отображение). Так как непрерывная функция на компакте достигает свой минимум, то

$$d(\rho,\sigma):=\inf\Big\{\rho\big(x,\sigma(x)\big):x\in S^n\Big\}=\min\Big\{\rho\big(x,\sigma(x)\big):x\in S^n\Big\}>0.$$

Рассмотрим также число

$$d(\rho):=\sup\big\{d(\rho,\sigma):\sigma \text{ — непрерывная свободная инволюция на } S^n\big\}>0.$$

Предложение 13. *Для произвольной метрики ρ на сфере S^n и произвольного метрического пространства Y, топологически вкладывающегося в $\mathbb{R}^n$, имеют место неравенства*

$$d(\rho)\leqslant 2d^c_{GH}(S^n,Y)\leqslant\max\{\operatorname{diam}S^n,\operatorname{diam}Y\}.$$

Доказательство. Пусть $\nu\colon Y\to\mathbb{R}^n$ — топологическое вложение, $f\colon S^n\to Y$ и $g\colon Y\to S^n$ — непрерывные отображения, и $h=\nu\circ f$. Рассмотрим на сфере произвольную непрерывную свободную инволюцию σ. Согласно обобщенной теореме Борсука–Улама [14, Теорема 5], существует такая точка $x\in S^n$, что $h(x)=h\big(\sigma(x)\big)$, поэтому, в силу инъективности ν, имеем $f(x)=f\big(\sigma(x)\big)$. Это означает, что $\operatorname{dis}f\geqslant d(\rho,\sigma)$. Следовательно, $d(\rho,\sigma)\leqslant 2d^c_{GH}(S^n,Y)$. Из произвольности рассмотренной инволюции следует левое неравенство.

Правое неравенство является свойством (4) предложения 6. $\square$

Замечание 3. *Из предложения 13 вытекает, что для стандартной сферы единичного радиуса $S^n\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, наделенной геодезическим или индуцированным евклидовым расстоянием, для всякого $m>n$ имеет место равенство $2d^c_{GH}(S^n,S^m)=\operatorname{diam}S^n$. Отметим, что согласно [2], Theorem A, p. 5, имеет место $2d_{GH}(S^n,S^m)<\operatorname{diam}S^n$.*

Следствие 4. *Для произвольной метрики ρ на сфере S^n и произвольного метрического пространства Y следующие условия эквивалентны*:

1. $d^c_{GH}(S^n,Y)=0$, *и*

2. *пространство Y изометрично сфере (S^n,ρ).*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как $d_{GH}(S^n, Y) \leqslant d^c_{GH}(S^n, Y) = 0$, то согласно теореме 7 можно считать, что пространство Y изометрично лежит в сфере (S^n, ρ). Если Y является собственным подмножеством сферы, то оно топологически вкладывается в пространство $\mathbb{R}^n$ и $2d^c_{GH}(S^n, Y) \geqslant d(\rho) > 0$ согласно предложению 13.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна. □

Скажем, что метрическое пространство X *обладает свойством единственности в классе* $\mathcal{GH}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{GH}^c$, *или* $\mathcal{M}^c$, если для всякого метрического пространства Y в рассматриваемом классе из равенства $d_{GH}(X, Y) = 0$ в первых двух классах и равенства $d^c_{GH}(X, Y) = 0$ во вторых двух следует изометричность X и Y. Ясно, что теорема 6 и следствие 4 — это описание некоторых классов пространств со свойством единственности в классах $\mathcal{M}^c$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{GH}^c$ соответственно.

Предложение 14. *Если метрическое пространство X обладает свойством единственности в классе $\mathcal{GH}$, то оно является полным и дискретным.*

Доказательство. Пусть пространство X не является полным. Рассмотрим его пополнение Y. Так как пространство X можно изометрически отождествить с плотным подмножеством Y, то $d_{GH}(X, Y) \leqslant d_H(X, Y) = 0$. Сами пространства X и Y не изометричны, так как первое не является полным, а второе полно.

Пусть полное пространство X не является дискретным. Возьмем в нем не изолированную точку $x_0 \in X$. Тогда $d_{GH}(X, X \setminus x_0) = 0$, но пространства X и $X \setminus x_0$ не изометричны, так как первое является полным, а второе не полно. □

Пример 5. *В* [12], *пример* 5.11, *построен пример счетного полного ограниченного метрического пространства Y и его открыто-замкнутого подмножества X со следующими свойствами.*

1. *В пространстве Y ровно одна неизолированная точка.*

2. *Пространство X дискретно. Следовательно, пространство Y топологически (а, значит, и изометрически) не вкладывается в пространство X.*

3. $d_{GH}(X, Y) = 0$, *а следовательно и* $d^c_{GH}(X, Y) = 0$ *по следствию* 3. *Впрочем, для этих пространств соответствующие отображения $f_\varepsilon\colon X \to Y$ и $g_\varepsilon\colon Y \to X$ легко предъявить и конструктивно.*

4.
   - $0 = s(Y) = s(X) < d(X) = d(Y) = 3.5$,
   - $3 = R(Y) = R(X) < \operatorname{diam} X = \operatorname{diam} Y = 4$,
   - $d_H(X, Y \setminus X) = 3$,
   - $\bigl|X(Y \setminus X)\bigr| = 2$.

5. *Для всякого изометрического вложения $h\colon X \to Y$ имеют место следующие оценки:* $d_H\bigl(h(X), Y \setminus h(X)\bigr) = 3$ *и* $2 \leqslant \bigl|h(X)\bigl(Y \setminus h(X)\bigr)\bigr| \leqslant 3$.

Пространства X и Y показывают необратимость предложения 14.

Ясно, что из $s(X) > 0$ следует, что пространство X является полным и дискретным. Обратное, вообще говоря не имеет место.

Пример 6. *На прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим подмножество $X = \bigl\{n \pm \frac{1}{6n} : n \in \mathbb{N}\bigr\}$. Пространство X полно, дискретно и $s(X) = 0$.*

Для метрического пространства X рассмотрим множество всех расстояний в нем

$$\operatorname{dist} X = \bigl\{|xx'| : x, x' \in X\bigr\}.$$

Легко проверяется, что

- $s(X) = \Bigl|0\,\bigl(\operatorname{dist} X\setminus\{0\}\bigr)\Bigr|$ и $\operatorname{diam} X = d_H\bigl(\{0\}, \operatorname{dist} X\bigr) = \operatorname{diam}\operatorname{dist} X$;
- если пространства X и Y изометричны, то $\operatorname{dist} X = \operatorname{dist} Y$;
- если $d_{GH}(X,Y)=0$, то $d_H\bigl(\operatorname{dist} X, \operatorname{dist} Y\bigr) = 0$, т.е. $\overline{\operatorname{dist} X} = \overline{\operatorname{dist} Y}$ (см. также [16, Lemma 5.1]).

Предложение 15. *Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ выполняется*

1. $d_H\bigl(\operatorname{dist} X, \operatorname{dist} Y\bigr) \leqslant 2d_{GH}(X,Y)$;
2. $s(X) \leqslant 2d_{GH}(X,Y)$ *или* $s(Y) \leqslant s(X) + 2d_{GH}(X,Y)$;
3. $2s(X) < s(Y)$ *или* $s(Y) - s(X) \leqslant d_H(\operatorname{dist} X, \operatorname{dist} Y)$.

Доказательство. Если $d_{GH}(X,Y)=\infty$, то утверждения (1) и (2) очевидны (в утверждение (3) расстояние $d_{GH}(X,Y)$ не входит). Поэтому будем сразу предполагать, что $d_{GH}(X,Y) < \infty$.

(1) Фиксируем число $\varepsilon>0$ и такое соответствие $R\in\mathcal{R}(X,Y)$, что $\operatorname{dis} R < 2d_{GH}(X,Y)+\varepsilon$. Возьмем две произвольные точки $x, x' \in X$ и пусть $y, y' \in Y$ — это такие точки, что $(x,y),\ (x',y') \in R$. Тогда $\bigl||xx'|-|yy'|\bigr| \leqslant \operatorname{dis} R < 2d_{GH}(X,Y)+\varepsilon$. Из полученного включения $\operatorname{dist} X \subset B_{2d_{GH}(X,Y)+\varepsilon}(\operatorname{dist} Y)$, произвольности числа $\varepsilon>0$ и симметричности рассматриваемого условия вытекает первое неравенство.

(2) Пусть $s(X) > 2d_{GH}(X,Y)$. Так как при $s(Y)\leqslant s(X)$ второе неравенство автоматически выполняется, будем предполагать, что $s(Y) > s(X)$. Тогда

$$\bigl|s(X)\,0\bigr| > 2d_{GH}(X,Y) \geqslant d_H(\operatorname{dist} X, \operatorname{dist} Y) \geqslant \bigl|s(X)\operatorname{dist} Y\bigr| = \\ = \min\Bigl\{\bigl|s(X)\,0\bigr|, s(Y)-s(X)\Bigr\} = s(Y)-s(X),$$

что и требовалось.

(3) Если $s(Y)\leqslant s(X)$, то второе неравенство очевидно. Рассмотрим теперь оставшийся случай $s(X) < s(Y) \leqslant 2s(X)$. Тогда $\bigl|s(X)s(Y)\bigr| = s(Y)-s(X) \leqslant s(X) = \bigl|s(X)\,0\bigr|$, и учитывая $\bigl|s(X)\operatorname{dist} Y\bigr| \leqslant d_H(\operatorname{dist} X, \operatorname{dist} Y)$, получаем

$$\bigl|s(X)\operatorname{dist} Y\bigr| = \min\Bigl\{\bigl|s(X)\,0\bigr|,\ \bigl|s(X)s(Y)\bigr|\Bigr\} = \bigl|s(X)s(Y)\bigr| \leqslant d_H(\operatorname{dist} X, \operatorname{dist} Y),$$

что и утверждалось. □

Если диаметр X или Y конечен, то $2d_H(X,Y) \geqslant \bigl|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y\bigr|$, потому неравенство (1) предложения 15 является усилением свойства (5) из предложения 6. Отметим также, что свойство (1) влечет

Следствие 5. *Для любых $X, Y\in\mathcal{GH}$ из $d_{GH}(X,Y)=0$ следует $s(X)=s(Y)$.*

Теорема 8. *Если $s(X)>0$ и $d_{GH}(X,Y)=0$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такой гомеоморфизм $f_\varepsilon\colon X\to Y$, что $\bigl||f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')|-|xx'|\bigr| \leqslant \varepsilon$ для любых точек $x, x'\in X$.*

Доказательство. Пусть $d_{GH}(X,Y)=0$. Согласно предложению 8, $d^c_{GH}(X,Y)=0$. Пусть $0<\varepsilon<s(X)$ и $f_\varepsilon\colon X\to Y$, $g_\varepsilon\colon Y\to X$ — такие отображения, что $\operatorname{dis} R_{f_\varepsilon, g_\varepsilon} \leqslant \varepsilon$.

Покажем, что $g_\varepsilon\circ f_\varepsilon\colon X\to X$ и $g_\varepsilon\circ f_\varepsilon\colon Y\to Y$ являются тождественными отображениями. Для произвольной точки $x\in X$ и точки $y=f_\varepsilon(x)\in Y$ запишем коискажение

$$\Bigl|x\,g_\varepsilon\bigl(f_\varepsilon(x)\bigr)\Bigr| = \Bigl|\bigl|x\,g_\varepsilon(y)\bigr| - \bigl|f_\varepsilon(x)\,y\bigr|\Bigr| \leqslant \varepsilon < s(X).$$

Следовательно, $x = g_\varepsilon\bigl(f_\varepsilon(x)\bigr)$.

Следствие 5 влечет $s(Y)=s(X)$. Поэтому аналогично доказывается и равенство $g_\varepsilon\circ f_\varepsilon = \mathrm{Id}_Y$.

Неравенство $\bigl||f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')|-|xx'|\bigr| \leqslant \varepsilon$ — это в точности неравенство $\operatorname{dis} f_\varepsilon \leqslant \varepsilon$. □

Предложение 16. *Пусть для $X \in \mathcal{GH}$ существует такое число $r > 0$, что $s(\operatorname{dist} X) \geqslant r$ (расстояние между различными точками множества $\operatorname{dist} X$ не менее r). Тогда $s(X) \geqslant r$ и при $\varepsilon < r$ всякое отображение f_ε из теоремы 8 является изометрией. В частности, это пространство X обладает свойством единственности в классе $\mathcal{GH}$.*

Доказательство. Ясно, что множество $\operatorname{dist} X \subset \mathbb{R}$ замкнуто и дискретно. Пусть $d_{GH}(X,Y) = 0$. Тогда из пункта (1) предложения 15 вытекает $d_H\big(\operatorname{dist} X, \operatorname{dist} Y\big) = 0$, откуда, в силу замкнутости $\operatorname{dist} X$, получаем $\operatorname{dist} X = \overline{\operatorname{dist} X} = \overline{\operatorname{dist} Y}$, поэтому $\operatorname{dist} Y \subset \operatorname{dist} X$. Так как $\operatorname{dist} X$ дискретно, то замыкание собственного подмножества не может равняться $\operatorname{dist} X$, откуда $\operatorname{dist} X = \operatorname{dist} Y$. Согласно выбору отображения $f_\varepsilon\colon X \to Y$, для любых точек $x, x' \in X$ справедливо неравенство $\big||f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')| - |xx'|\big| \leqslant \varepsilon < r$, и если $\big|f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')\big| \neq |xx'|$, то величины $\big|f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')\big|$ и $|xx'|$ отличаются друг от друга не менее, чем на r. Последнее, вместе с предыдущим неравенством влечет $\big|f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')\big| = |xx'|$. $\square$

Следствие 6. *Всякое метрическое пространство X с конечным множеством $\operatorname{dist} X$ обладает свойством единственности в классе $\mathcal{GH}$.*

Замечание 4. *Следствие 6 также может быть мгновенно получено из [16], леммы 5.1 и 6.1.*

Гипотеза. *Всякое метрическое пространство X с замкнутым и дискретным множеством $\operatorname{dist} X$ обладает свойством единственности в классе $\mathcal{GH}$.*

Пример 7. *На $X = \{0\} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ зададим метрику*

$$|xx'| = \begin{cases} 2 & \text{при } 0 \neq x \neq x' \neq 0;\\ 1 + \frac{1}{2n} & \text{при } x = 0,\ x' \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}. \end{cases}$$

Метрическое пространство X и его открыто-замкнутое подмножество $Y = \{0\} \sqcup \mathbb{N} \subset X$ обладают следующими свойствами.

1. $\operatorname{diam} X = 2 = \operatorname{diam} Y$ *и* $s(X) = s(Y) = 1$, *поэтому пространства X и Y полны и дискретны.*

2. $\operatorname{dist} X = \{0, 1, 1 + \frac{1}{2n}, 2 : n \in \mathbb{N}\} \neq \{0, 1 + \frac{1}{2n}, 2 : n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{dist} Y$, *поэтому пространства X и Y не изометричны.*

3. $d^c_{GH}(X,Y) = 0$. *Отображение $h_m\colon X \to Y$, задаваемое формулой*

$$h_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0;\\ x & \text{при } 1 \leqslant x < m;\\ x+1 & \text{при } m \leqslant x < \infty;\\ m & \text{при } x = \infty, \end{cases}$$

   является $\frac{1}{2m}$-изометрией.

4. *Изометриями пространств X и Y являются только их тождественные отображения.*

5. $\big|Y\,(X \setminus Y)\big| = 1$ *и* $d_H(X,Y) = 1$.

6. Сравнение топологий

Обозначим $p_c\colon \mathcal{GH}^c \to \mathcal{GH}$ тождественное отображение. В силу свойства (1) предложения 6, отображение p_c является нерастягивающим, а значит и непрерывным. Напомним также, что непрерывное биективное отображение называется *уплотнением*. Это понятие также переносится на топологические классы, так что p_c — уплотнение. Напомним (предложение 12), что при этом два метрических пространства, находящихся на положительном расстоянии d^c_{GH} могут переходить в пространства с нулевым расстоянием d_{GH}.

Предложение 17. *Отображение p_c^{-1} разрывно во всякой точке $X \in \mathcal{GH}$ такой, что $\operatorname{Ind} X \ne 0$.*

Доказательство. Выберем произвольное непустое метрическое пространство X, для которого $\operatorname{Ind} X \ne 0$. В силу предложения 11 существует такое $r > 0$, что для всякого непустого метрического пространства Y с $\operatorname{Ind} Y = 0$ справедливо $d^c_{GH}(X, Y) \geqslant r$. Для каждого дискретного пространства Z выполняется $\operatorname{Ind} Z = 0$. С другой стороны, легко показать, что для каждого $\delta > 0$ существует дискретное $Y \subset X$, для которого $d_{GH}(X, Y) \leqslant d_H(X, Y) < \delta$. Последнее означает, что ни для одной окрестности $U_\delta(X)$ при $\delta < r$ не выполняется $p_c^{-1}\big(U_\delta(X)\big) \subset U_r(X)$, а это и есть разрывность p_c^{-1} в точке X. $\square$

Замечание 5. *При доказательстве предложения* 17 *мы на самом деле показали большее, а именно, что p_c^{-1} разрывно в точке X,* $\operatorname{Ind} X \ne 0$ *на меньших множествах, например,*

- *на объединении $\{X\}$ с классом всех пространств с нулевой большой индуктивной размерностью;*
- *на объединении $\{X\}$ с классом всех дискретных пространств;*
- *для компактного X — на объединении $\{X\}$ с множеством всех конечных метрических пространств.*

Напомним, что отображение p_c является изометрией на подклассе всех нульмерных пространств в смысле Лебега (*следствие* 3). *Однако, из сказанного выше заключаем, что добавление даже одной точки X может привести к появлению разрыва у p_c^{-1} и, значит, к нарушению изометричности.*

Ниже мы покажем, что отображение p_c^{-1} может быть разрывно и в точках, отвечающих дискретным пространствам, причем разрывность проявляется на достаточно тощем подмножестве в $\mathcal{GH}$. Тем не менее, на вполне дискретных пространств X, т.е. когда $s(X) > 0$, отображение p_c^{-1} непрерывно. Следующий результат мгновенно вытекает из предложения 8.

Следствие 7. *Если $s(X) > 0$, то отображение p_c^{-1} непрерывно в точке $X \in \mathcal{GH}$.*

Для компактных метрических пространств имеется естественный критерий непрерывности отображения p_c^{-1}.

Теорема 9. *Для компактного метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ следующие условия эквивалентны*

1. $\operatorname{Ind} X = 0$*;*
2. *отображение p_c^{-1} непрерывно в точке X.*

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное, т.е. что $\operatorname{Ind} X \neq 0$. По предложению 11, существует $r > 0$, зависящее только от X такое, что $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant r$. Но последнее противоречит непрерывности p_c^{-1} в точке X.

(1) $\Rightarrow$ (2). Нам надо доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $d_{GH}(X,Y) < \delta$ следует $d^c_{GH}(X,Y) < \varepsilon$. Для $0 < \varepsilon' < \varepsilon/4$ рассмотрим покрытие $\lambda = \big\{U_{\varepsilon'}(x)\big\}_{x\in X}$. Так как $\dim X = 0$, то существует открыто-замкнутое разбиение μ, вписанное в λ. Так как X компактно, что разбиение μ конечно. Пусть $\mu = \{U_1,\dots,U_m\}$, тогда $r := \min\big\{|U_iU_j| : i \neq j\big\} > 0$ и $\operatorname{diam} U_i \leqslant 2\varepsilon' < \varepsilon/2$. Положим $\delta = \min\{r/2, \varepsilon'\} < \varepsilon/4$ и покажем, что δ — искомое.

Пусть $d_{GH}(X,Y) < \delta$, тогда существует $\alpha > 0$ такое, что $d_{GH}(X,Y) < \delta - \alpha$ и, значит, можно выбрать соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$, для которого $\operatorname{dis} R < 2\delta - 2\alpha \leqslant r - 2\alpha$. Положим $V_k = R(U_k)$, тогда при $i \neq j$ имеем $V_i \cap V_j = \emptyset$, так как для любых $y_k \in V_k$ и $x_k \in U_k$ таких, что $(x_k, y_k) \in R$, выполняется

$$|y_iy_j| \geqslant |x_ix_j| - \operatorname{dis} R > r - (r - 2\alpha) = 2\alpha.$$

Таким образом, $V_k = \cup_{y\in V_k} U_\alpha(y)$ — открытое множество для каждого k, поэтому $\{V_k\}_{k=1}^m$ — разбиение Y открыто-замкнутыми множествами. Заметим, что $\operatorname{diam} V_k \leqslant \operatorname{diam} U_k + \operatorname{dis} R \leqslant$ $\leqslant 2\varepsilon' + \varepsilon' < 3\varepsilon/4$.

Выберем теперь произвольные $x_k \in U_k$, $y_k \in V_k$, $(x_k, y_k) \in R$ и зададим отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ так: $f(U_k) = y_k$ и $g(V_k) = x_k$, тогда f и g — непрерывные отображения. Покажем, что $\operatorname{dis} R_{f,g} < 2\varepsilon$, откуда $d^c_{GH}(X,Y) \leqslant \frac12 \operatorname{dis} R_{f,g} < \varepsilon$, что мы и хотим.

Выберем произвольные $x \in U_i$ и $x' \in U_j$, тогда

$$\begin{aligned}\big||xx'| - |y_iy_j|\big| &= \big||xx'| - |x'x_i| + |x'x_i| - |x_ix_j| + |x_ix_j| - |y_iy_j|\big| \leqslant\\ &\leqslant \big||xx'| - |x'x_i|\big| + \big||x'x_i| - |x_ix_j|\big| + \big||x_ix_j| - |y_iy_j|\big| \leqslant\\ &\leqslant |xx_i| + |x'x_j| + \operatorname{dis} R \leqslant \operatorname{diam} U_i + \operatorname{diam} U_j + \operatorname{dis} R < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

поэтому $\operatorname{dis} f < 2\varepsilon$.

Выберем теперь произвольные $y \in V_i$ и $y' \in V_j$, тогда

$$\begin{aligned}\big||x_ix_j| - |yy'|\big| &= \big||x_ix_j| - |y_iy_j| + |y_iy_j| - |y_jy| + |y_jy| - |yy'|\big| \leqslant\\ &\leqslant \big||x_ix_j| - |y_iy_j|\big| + \big||y_iy_j| - |y_jy|\big| + \big||y_jy| - |yy'|\big| \leqslant\\ &\leqslant \operatorname{dis} R + |y_iy| + |y_jy'| \leqslant \operatorname{dis} R + \operatorname{diam} V_i + \operatorname{diam} V_j < \varepsilon/4 + 3\varepsilon/4 + 3\varepsilon/4 < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

поэтому $\operatorname{dis} g < 2\varepsilon$.

Наконец, оценим коискажение $\operatorname{codis}(f,g)$. Для этого выберем произвольные $x \in U_i$ и $y \in V_j$, тогда

$$\begin{aligned}\big||x\,x_j| - |y_iy|\big| &= \big||x\,x_j| - |x_jx_i| + |x_jx_i| - |y_jy_i| + |y_jy_i| - |y_iy|\big| \leqslant\\ &\leqslant \big||x\,x_j| - |x_jx_i|\big| + \big||x_jx_i| - |y_jy_i|\big| + \big||y_jy_i| - |y_iy|\big| \leqslant\\ &\leqslant |xx_i| + \operatorname{dis} R + |y_jy| \leqslant \operatorname{diam} U_i + \operatorname{dis} R + \operatorname{diam} U_j < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/2 < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

откуда $\operatorname{codis}(f,g) < 2\varepsilon$ и, значит, $\operatorname{dis} R_{f,g} < 2\varepsilon$, что и завершает доказательство. □

Пример 8. *Теорема 9 утверждает, что в точке X, являющейся нульмерным компактным (полным и вполне ограниченным) пространством отображение p_c^{-1} непрерывно. Оказывается, если отказаться от условия полной ограниченности, то даже для счетных дискретных пространств непрерывность не гарантирована. Ниже дается пример такого счетного (а значит нульмерного) полного дискретного пространства X, что отображение p_c^{-1} разрывно в точке $X \in \mathcal{GH}$. Согласно следствию 7 для него $s(X) = 0$.*

Возьмем счетное число $Z = I \times \mathbb{N} = \sqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ стандартных единичных отрезков. Расстояние между точками одного отрезка возьмем стандартным, а расстояние между точками разных отрезков положим равным 1. В отрезке I_n рассмотрим подмножество $S_n = \bigl\{i/2^n : i = 0, \dots, 2^n\bigr\}$. Положим

$$X_\infty = \sqcup_{k\in\mathbb{N}} S_k \subset Z \quad \text{и} \quad X_n = \bigl(\sqcup_{k<n} S_k\bigr) \sqcup \bigl(\sqcup_{k\geqslant n} I_k\bigr) \subset Z.$$

Отметим, что X_∞ — счетное дискретное пространство, поэтому оно полное. Легко видеть, что $d_H(X_\infty, X_n) = 2^{-(n+1)}$, поэтому $X_n \xrightarrow{d_{GH}} X_\infty$. Далее, так как X_∞ — вполне несвязное пространство, а максимальный диаметр связных компонент в X_n равен 1, то в силу предложения 12, имеем $2d^c_{GH}(X_\infty, X_n) \geqslant 1$, поэтому X_n не сходится к X_∞ относительно d^c_{GH} и, значит, отображение p_c^{-1} разрывно в точке X_∞.

7. Несравнимые пространства

Скажем, что топологическое пространство X *несравнимо с* Y, если всякое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ тривиально, т.е. имеется такая точка $y_f \in Y$, что $f(X) = y_f$. Например, всякое связное пространство несравнимо со всяким вполне несвязным пространством. Отметим, что отношение несравнимости не симметрично, например, отрезок $X = [0,1]$ несравним с множеством Y его рациональных точек, однако Y сравнимо с X (включение Y в X — нетривиальное непрерывное отображение).

Предложение 18. *Пусть метрическое пространство X несравнимо с метрическим пространством Y. Тогда*

1. *для всякого отображения $f\colon X \to Y$ справедливо равенство* $\operatorname{dis} f = \operatorname{diam} X$;
2. *для всяких отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{codis}(f,g) \geqslant \max\bigl\{R(X), R(Y)\bigr\}.$$

Доказательство. (1) Имеем

$$\operatorname{dis} f = \sup_{x,x'\in X} \bigl||xx'| - |f(x)f(x')|\bigr| = \sup_{x,x'\in X} |xx'| = \operatorname{diam}(X).$$

(2) Имеем

$$\operatorname{codis}(f,g) = \sup_{x\in X,\, y\in Y} \bigl||x\,g(y)| - |f(x)y|\bigr| \geqslant \sup_{x\in X} \bigl||x\,g(y_f)| - |f(x)y_f|\bigr| =$$
$$= \sup_{x\in X} |x\,g(y_f)| = R_{g(y_f)}(X) \geqslant R(X).$$

Аналогично,

$$\operatorname{codis}(f,g) = \sup_{x\in X, y\in Y} \Bigl|\bigl|x\,g(y)\bigr| - \bigl|f(x)y\bigr|\Bigr| \geqslant \sup_{y\in Y} \Bigl|\bigl|g(y)g(y)\bigr| - \bigl|f\bigl(g(y)\bigr)y\bigr|\Bigr| =$$
$$\sup_{y\in Y} \Bigl|\bigl|g(y)g(y)\bigr| - |y_f y|\Bigr| = \sup_{y\in Y} |y_f y| = R_{y_f}(Y) \geqslant R(Y).$$

Для завершения доказательства осталось собрать вместе два полученных неравенства. □

Следствие 8. *Пусть метрическое пространство X несравнимо с метрическим пространством Y. Тогда $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant \operatorname{diam}(X)$.*

Следствие 9. *Пусть пространства X и Y взаимно несравнимы. Тогда*

$$2d^c_{GH}(X,Y) = \max\bigl\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\bigr\}.$$

Доказательство. Неравенство $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant \max\bigl\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\bigr\}$ вытекает из следствия 8. Обратным неравенством является пункт (4) предложения 6. □

8. Гиперпространство континуума Кука

Напомним, что *континуумом* называется каждое связное компактное хаусдорфово топологическое пространство. Мы же ограничимся континуумами, являющимися метрическими пространствами. Таким образом, в дальнейшем под *континуумом* понимается метризуемый континуум.

Нас также будут интересовать различные *гиперпространства*. Если X — метрическое пространство, то через $\mathcal{H}(X)$ будем обозначать семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X, наделенное расстоянием Хаусдорфа d_H. Хорошо известно [8], что d_H является метрикой на $\mathcal{H}(X)$. Это $\mathcal{H}(X)$ будет в нашем случае наиболее общим примером гиперпространств (более богатый список гиперпространств можно найти в [22]). Важным подпространством в $\mathcal{H}(X)$ является семейство $\mathcal{K}(X)$ всех непустых компактных подмножеств X. Если X компактно, что $\mathcal{K}(X) = \mathcal{H}(X)$. Еще одно "сужение" гиперпространства получается, если ограничиться подконтинуумами X. Семейство всех подконтинуумов в X обозначим $\mathcal{CK}(X)$. Так как каждая точка из X является вырожденным подконтинуумом, а расстояние Хаусдорфа d_H между одноточечными подпространствами X совпадает с расстоянием в X между соответствующими точками, имеется изометричное вложение $x \mapsto \{x\}$ из X в $\mathcal{CK}(X) \subset \mathcal{K}(X) \subset \mathcal{H}(X)$. В дальнейшем будем неформально писать $X \subset \mathcal{CK}(X)$, имея в виду это вложение.

Теорема 10. *Пространства X и $\mathcal{CK}(X)$ — замкнутые подмножества $\mathcal{K}(X)$.*

Теорема 11 ([8]). *Пространство $\mathcal{H}(X)$ полное (вполне ограниченное, компактное, ограниченно компактное), если и только если X — такое же.*

Если X — континуум, то, в силу теоремы 11 пространство $\mathcal{K}(X) = \mathcal{H}(X)$ также компактно. По теореме 10, $\mathcal{CK}(X)$ — замкнутое подмножество компакта $\mathcal{K}(X)$, а потому и само является компактном. Менее тривиальный факт состоит в том, что и связность X также наследуется. И еще интересней: $\mathcal{CK}(X)$ оказывается и линейно связным, а для невырожденного X можно оценить и размерность $\mathcal{CK}(X)$.

Теорема 12. *Для континуума X пространство $\mathcal{CK}(X)$ является линейно связным континуумом* ([22, Theorem 14.9]), *имеет тривиальный шейп* ([22, Theorem 19.10]) *и, в частности, ациклично во всех размерностях* ([22, Theorem 19.3]).

Для наследственно неразложимого или локально связного континуума X пространство $\mathcal{CK}(X)$ стягиваемо ([22, Theorem 20.3, 20.14]).

Если континуум X невырожден, то $\dim \mathcal{CK}(X) \geqslant 2$ ([22, Theorem 22.18]).

Пример 9. *1. Для стандартных отрезка I и окружности S^1 пространства $\mathcal{CK}(I)$ и $\mathcal{CK}(S^1)$ гомеоморфны двумерному диску B^2 ([22]), разделы* 5.1 *и* 5.2.

2. *Пространства $\mathcal{CK}^c_{GH}(I)$, $\mathcal{CK}_{GH}(I^1)$ и $\mathcal{CK}_{GH}(S^1)$ гомеоморфны отрезку.*

3. *Пространство $\mathcal{CK}^c_{GH}(S^1)$ гомеоморфно объединению полуинтервала и изолированной точки. Отметим, что точка $\{S^1\}$, соответствующая всей окружности, находится на расстоянии 1 в метрике d^c_{GH} от всякого собственного подмножества окружности и поэтому изолирована в $\mathcal{CK}^c_{GH}(S^1)$.*

Континуум X называется *наследственно неразложимым*, если каждый его подконтинуум Y нельзя представить в виде объединения двух собственных (непустых и отличных от Y) подконтинуумов.

Напомним, что мы называем топологическое пространство Y несравнимым с топологическим пространством X, если единственными непрерывными отображениями из X в Y являются отображения в точку.

Предложение 19. *Пусть X — линейно связное пространство, а Y — наследственно неразложимый континуум. Тогда X несравнимо с Y. В частности, $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant \operatorname{diam} X$.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — это такие непрерывное отображение, что $f(X)$ содержит не менее двух различных точек $y_0 = f(x_0) \neq f(x_1) = y_1$. Согласно условию существует такое непрерывное отображение $\varphi\colon [0,1] \to X$, что $\varphi(0) = x_0$ и $\varphi(1) = x_1$. Положим $t_0 = \sup\bigl[(f\circ\varphi)^{-1}(x_0)\bigr] = \max\bigl[(f\circ\varphi)^{-1}(x_0)\bigr]$. Ясно, что $\varphi(t_0) = x_0$. Положим $t_1 = \inf\bigl[(f\circ\varphi)^{-1}(x_1)\bigr] \cap [t_0,1] = \min\bigl[(f\circ\varphi)^{-1}(x_1)\bigr] \cap [t_0,1]$. Для произвольного $t_0 < \tau < t_1$ континуум $K = (f\circ\varphi)\bigl([t_0,t_1]\bigr) \subset Y$ представим в виде объединения двух собственных подконтинуумов $y_0 \in K_0 = (f\circ\varphi)\bigl([t_0,\tau]\bigr) \not\ni y_1$ и $y_0 \notin K_1 = (f\circ\varphi)\bigl([\tau,t_1]\bigr) \ni y_1$. Полученное представление противоречит неразложимости Y, т.е. означает тривиальность любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$. $\square$

Цепью в топологическом пространстве называется такая конечная последовательность его подмножеств, в которой пересекаются только последовательные элемент (их называют *звеньями*). Если для некоторого $\varepsilon > 0$ каждое звено в цепи, лежащей в метрическом пространстве, имеет диаметр не больше ε, то такая цепь называется *ε-цепью.* Если для любого $\varepsilon > 0$ континуум покрывается ε-цепью, то такой континуум называется *дугообразным.* Наследственно неразложимый дугообразный континуум называется *псевдодугой.* Пример невырожденной псевдодуги, являющейся подмножеством плоскости, был приведен Кнастером в [23]. Мойз [24] показал, что каждый собственный подконтинуум псевдодуги гомеоморфен самой псевдодуге. Бинг [25] доказал, что все псевдодуги гомеоморфны друг другу. Также Бинг в [9] выяснил, что почти все континуумы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ — псевдодуги. Более формально, подмножество Y топологического пространства X называется *G_δ-множеством*, если Y равно не более чем счетному пересечению открытых подмножеств X. Говорят, что *большинство элементов полного метрического пространства X являются элементами* $Y \subset X$, если Y — всюду плотное G_δ-подмножество X. Напомним, что пространство $\mathcal{CK}(\mathbb{R}^n)$ всех континуумов в $\mathbb{R}^n$ снабжено метрикой Хаусдорфа и соответствующей метрической топологией.

Теорема 13 (Бинг [9]). *Большинство континуумов в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, т.е. большинство точек из $\mathcal{CK}(\mathbb{R}^n)$ — это псевдодуги.*

Отсюда следует, что расстояние Громова – Хаусдорфа от всякого подконтинуума в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, до множества всех псевдодуг равно нулю, но непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа от всякого линейно связного подконтинуума до множества всех псевдодуг равно диаметру этого подконтинуума.

Пусть X — континуум. Расстояния d^c_{GH} и d_{GH} являются псевдометриками на множестве $\mathcal{CK}(X)$. Факторпространства $\mathcal{CK}(X)$ по псевдометрикам d^c_{GH} и d_{GH} обозначим через $\mathcal{CK}^c_{GH}(X)$ и $\mathcal{CK}_{GH}(X)$ соответственно. Проекции $p^c_{GH}\colon \mathcal{CK}^c_{GH}(X)\to\mathcal{CK}_{GH}(X)$ и $p_H\colon \mathcal{CK}_H(X)\to\mathcal{CK}_{GH}(X)$ являются нерастягивающими отображениями, поэтому они непрерывны.

Предложение 20. *Пространство $\mathcal{CK}_{GH}(X)$ является линейно связным континуумом.*

Доказательство. По теореме 12 пространство $\mathcal{CK}(X)$ — линейно связный континуум. Теперь результат следует из того, что непрерывное отображение сохраняет как компактность, так и линейную связность. $\square$

H. Cook в [26] построил пример наследственно неразложимого континуума M_1 такого, что любые два разных его невырожденных подконтинуума несравнимы.

Теорема 14 ([26]). *Континуум M_1 одномерен в смысле размерности Лебега, поэтому M_1 вкладывается в $\mathbb{R}^3$, но никакой его невырожденный подконтинуум не вкладывается в плоскость.*

Применим следствие 9.

Следствие 10. *Пусть K и H — произвольные различные подконтинуумы в континууме Кука M_1, тогда $2d^c_{GH}(K,H) = \max\{\operatorname{diam} H, \operatorname{diam} K\}$. В частности, отображение p_c^{-1} разрывно на всем $\mathcal{CK}_{GH}(M_1)$, за исключением одноточечного пространства.*

Замечание 6. *Согласно пункту (4) предложения 6 величина $d^c_{GH}(K,H)$ — максимально возможное значение d^c_{GH}-расстояния между H и K.*

9. Непрерывное GH-расстояние — внутреннее

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства, для которых $2d^c_{GH}(X,Y) < \infty$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда существуют непрерывные $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$, для которых $\operatorname{dis} R_{f,g} < 2d^c_{GH}(X,Y) + 2\varepsilon$. Для каждого $t \in (0,1)$ зададим на $R := R_{f,g}$ метрику d_t так:

$$d_t\big((x,y),(x',y')\big) = (1-t)|xx'| + t\,|yy'|$$

и полученное метрическое пространство обозначим R_t. Доопределим R_t, положив $R_0 = X$ и $R_1 = Y$.

Теорема 15. *Во введенных выше обозначениях, имеем $d^c_{GH}(R_t,R_s) \leqslant |t-s| \operatorname{dis} R$. В частности, отображение $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{GH}^c$ является непрерывной кривой, длина $|\gamma|$ которой удовлетворяет неравенству $|\gamma| < d^c_{GH}(X,Y) + \varepsilon$, а непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа — внутреннее.*

Доказательство. Пусть $0 < t, s < 1$, а $R' \in \mathcal{R}(R_t,R_s)$ — соответствие, порожденное тождественным отображением. Тогда

$$\operatorname{dis} R' = \sup_{(x,y),(x',y') \in R} \Big| d_t\big((x,y),(x',y')\big) - d_s\big((x,y),(x',y')\big) \Big| = \\ = \sup_{(x,y),(x',y') \in R} |t-s| \, \big| |xx'| - |yy'| \big| = |t-s| \operatorname{dis} R.$$

Далее, для $t = 0$, $X = R_t$ и R_s, $0 < s < 1$ в качестве $R' \in \mathcal{R}(R_t,R_s)$ выберем соответствие $R_{f',g'}$, где $f'(x) = \big(x, f(x)\big)$ для всех $x \in X$, а $g'\big((x,y)\big) = x$. Отображение f' непрерывно, так как является ограничением на $X \times f(X)$ отображения $x \mapsto \big(x, f(x)\big)$ из X в $X \times Y$ с непрерывными координатными отображениями. Отображение g' также непрерывно как ограничение проекции $X \times Y \to X$. Далее,

$$\operatorname{dis} f' = \sup_{x,x' \in X} \Big| |xx'| - (1-s)|xx'| - s\,\big|f(x)f(x')\big| \Big| = \\ = \sup_{x,x' \in X} s \Big| |xx'| - \big|f(x)f(x')\big| \Big| = |t-s| \operatorname{dis} f \leqslant |t-s| \operatorname{dis} R;$$

$$\operatorname{dis} g' = \sup_{(x,y),(x',y')\in R} \big||xx'| - (1-s)|xx'| - s\,|yy'|\big| =$$
$$= \sup_{(x,y),(x',y')\in R} s\,\big||xx'| - |yy'|\big| = |t-s| \operatorname{dis} R;$$

$$\operatorname{codis}(f',g') = \sup_{x\in X,\,(x',y')\in R} \Big|\big|x\,g'\big((x',y')\big)\big| - \big|(x',y')\,f'(x)\big|\Big| =$$
$$= \sup_{x\in X,\,(x',y')\in R} \Big||xx'| - (1-s)|xx'| - s\,\big|y'\,f(x)\big|\Big| =$$
$$= \sup_{(x,f(x)),\,(x',y')\in R} s\,\Big||xx'| - \big|y'\,f(x)\big|\Big| \leqslant |t-s| \operatorname{dis} R.$$

Тем самым мы показали, что $\operatorname{dis} R' \leqslant |t-s| \operatorname{dis} R$ и в случае $t=0$ и $0<s<1$. Аналогично разбирается случай $0<t<1$ и $s=1$. Наконец, при $t=0$ и $s=1$ мы полагаем $R'=R$, так что здесь $\operatorname{dis} R' = |t-s| \operatorname{dis} R$. Таким образом, для всех $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ имеем

$$d^c_{GH}(R_t,R_s) \leqslant \frac{1}{2}|t-s| \operatorname{dis} R,$$

откуда непосредственно вытекает, что отображение $\gamma\colon t \mapsto R_t$ непрерывно относительно d^c_{GH}, а длина $|\gamma|$ кривой γ не превосходит $\frac{1}{2}\operatorname{dis} R < d^c_{GH}(X,Y)+\varepsilon$. Так как $\varepsilon>0$ можно выбирать сколь угодно малым, приходим к выводу, что расстояние d^c_{GH} — внутреннее. $\square$

Как и в стандартной теории соответствие $R_{f,g} \in \mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $2d^c(X,Y) = \operatorname{dis} R_{f,g}$.

Следствие 11. *Если соответствие $R = R_{f,g}$ — оптимальное, то построенная выше кривая R_t — кратчайшая геодезическая, длина которой равна расстоянию между ее концами.*

10. Неполнота

Предложение 21. *Непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа, ограниченное на пространство компактов $\mathcal{M}^c$, не является полным.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $X_n = \{i/n\}_{i=0}^n$ подмножеств отрезка $[0,1]$ с индуцированным расстоянием. Так как на конечных метрических пространствах непрерывное и обычное GH-расстояния совпадают, эта последовательность фундаментальна в $\mathcal{M}^c$. Предположим, что $X_n \xrightarrow{d^c_{GH}} X$, тогда $X_n \xrightarrow{d_{GH}} X$, и так как $\mathcal{M}$ — метрическое пространство, предел определен однозначно, поэтому $X=[0,1]$. Но по предложению 12 имеем $d^c(X_n,X)=1/2$, так что последовательность X_n не сходится к X в $\mathcal{M}^c$. $\square$

Справедливость доказанного предложения обусловлена тем, что мы ограничили класс метрических пространств (компактами), в котором ищем предел заданной фундаментальной последовательности. Однако в классе всех метрических пространств эта последовательность имеет предел – любое нульмерное плотное подмножество отрезка. Построим фундаментальную последовательность, для которой никакое метрическое пространство не является её пределом в непрерывной метрике Громова – Хаусдорфа.

Нам понадобятся вспомогательные технические оценки.

Лемма 2. *Если для подмножества $A \subset X$ и отображения $f\colon X \to Y$ по крайней мере одно из множеств A или $f(A)$ имеет конечный диаметр, то справедливо неравенство $\operatorname{dis} f \geqslant \big|\operatorname{diam} f(A) - \operatorname{diam} A\big|$.*

Доказательство. Предположим, что только одно из множеств A и $f(A)$ имеет конечный диаметр. Тогда во множестве конечного диаметра каждая пара точек находится на ограниченном расстоянии, а во втором соответствующие точки (из образа или прообраза f) можно выбрать сколь угодно далекими, что доказывает $\operatorname{dis} f = \infty$, и неравенство имеет место.

Пусть теперь оба A и $f(A)$ имеют конечные диаметры. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

Возьмем такие точки $a, a' \in A$, что $|aa'| > \operatorname{diam} A - \varepsilon$. Тогда

$$\operatorname{dis} f \geqslant |aa'| - \bigl|f(a)f(a')\bigr| > \operatorname{diam} A - \varepsilon - \bigl|f(a)f(a')\bigr| \geqslant \operatorname{diam} A - \varepsilon - \operatorname{diam} f(A).$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем $\operatorname{dis} f \geqslant \operatorname{diam} A - \operatorname{diam} f(A)$.

Далее, возьмем такие точки $a, a' \in A$, что $\bigl|f(a)f(a')\bigr| > \operatorname{diam} f(A) - \varepsilon$. Тогда

$$\operatorname{dis} f \geqslant \bigl|f(a)f(a')\bigr| - |aa'| > \operatorname{diam} f(A) - \varepsilon - |aa'| \geqslant \operatorname{diam} f(A) - \varepsilon - \operatorname{diam} A.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем $\operatorname{dis} f \geqslant \operatorname{diam} f(A) - \operatorname{diam} A$, что и завершает доказательство. □

Полученное неравенство является усилением свойства (5) предложения 6.

Лемма 3. *Для любых отображений $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ и любой точки $y_0 \in Y$ справедливо неравенство* $\operatorname{codis}(f,g) \geqslant \bigl|y_0\, f(X)\bigr|$.

Доказательство. Возьмем точку $x = g(y_0) \in X$. Тогда

$$\operatorname{codis}(f,g) \geqslant \bigl|f(x)\, y_0\bigr| - \bigl|x\, g(y_0)\bigr| = \bigl|f(x)\, y_0\bigr| \geqslant \bigl|y_0\, f(X)\bigr|,$$

что и требовалось. □

Пример 10. *Рассмотрим на плоскости отрезки $J = \{(0,y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$, $I = \{(x,0) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и $I_n = \{(x,0) : \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим также триод $X = J \cup I$ и последовательность пространств $X_n = J \cup I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для простоты рассуждений на триоде $X = J \cup I$ возьмем внутреннюю метрику, а на его подмножествах — метрику, индуцированную этой внутренней метрикой триода.*

Теорема 16. *Последовательность пространств $X_n = J \cup I_n$, $n \in \mathbb{N}$ является фундаментальной в метрике d^c_{GH}, но никакое метрическое пространство не является её пределом в этой метрике.*

Доказательство. Легко видеть, что $d^c_{GH}(X_m, X_n) \leqslant \frac{m-n}{mn} < \frac{1}{n}$ при $m \geqslant n$. Следовательно последовательность компактных метрических пространств X_n является фундаментальной в метрике d^c_{GH}.

Также легко проверить, что $d_{GH}(X, X_n) \leqslant d_H(X, X_n) = \frac{1}{2n}$. Следовательно триод X является пределом последовательности X_n в метрике d_{GH}.

Пусть у этой последовательности имеется предел X_∞ в метрике d^c_{GH}.

Из неравенства $d_{GH} \leqslant d^c_{GH}$ следует, что пространство X_∞ также является пределом последовательности X_n в метрике d_{GH}. Поэтому $d_{GH}(X, X_\infty) = 0$.

Согласно теореме 7 можно считать, что пространство X_∞ изометрично лежит в триоде X (в виде плотного подмножества).

Покажем, что $\bigl\{(0,-1)\bigr\} \cup \bigl\{(0,1)\bigr\} \cup \bigl\{(1,0)\bigr\} \cup X_\infty = X$. Включение левого множества в правое очевидно.

Пусть $(x_0, y_0) \in X \setminus \Bigl(\bigl\{(0,-1)\bigr\} \cup \bigl\{(0,1)\bigr\} \cup \bigl\{(1,0)\bigr\} \cup X_\infty\Bigr)$.

а. Пусть $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Без ограничения общности можно считать, что $(x_0, y_0) = (r, 0)$, $r > 0$. Тогда одна из компонент связности K пространства $X \setminus \bigl\{(x_0, y_0)\bigr\}$ имеет диаметр $\operatorname{diam} K = 1 - r < 1$. Фиксируем такой индекс n, что $\operatorname{diam} I_n = 1 - 1/n > \operatorname{diam} K$.

Пусть $m \geqslant n$ и отображение $f\colon X_m \to X_\infty$ непрерывно. Точка $(r,0)$ разбивает пространство X_∞, поэтому всякое связное множество, пересекающееся с K, целиком лежит в K.

Если $f(J)\cap K \neq \emptyset$, то $f(J)\subset K$ и $\operatorname{dis} f \geqslant 2-(1-r)=1+r$ согласно лемме 2.

Если $f(I_m)\cap K \neq \emptyset$, то $f(I_m)\subset K$ и $\operatorname{dis} f \geqslant 1-\frac{1}{m}-(1-r)=r-\frac{1}{m}>r-\frac{1}{n}$ согласно лемме 2.

Если $f(X_m)\cap K=\emptyset$, то $\operatorname{codis}(f,g)\geqslant 1-r$ согласно лемме 3 для любого отображения $g\colon X_m\to X_\infty$.

b. Пусть $(x,y)=(0,0)$. Тогда пространство $X\setminus\bigl\{(x,y)\bigr\}=K_1\sqcup K_2\sqcup K_3$ состоит из трех компонент связности диаметра 1. Следовательно для всякого непрерывного отображения $f\colon X_m\to X_\infty\subset X$ имеется такая компонента связности K_i, что $f(J)\subset K_i$. Поэтому $\operatorname{dis}(f)\geqslant \operatorname{diam} J-\operatorname{diam} K_i=1$ согласно лемме 2.

Следовательно пространство X_∞ связно. Значит для всякого непрерывного отображения $g\colon X_\infty\to X_m$ связного пространства в пространство с двумя компонентами связности у последнего имеется такая компонента связности K, что $g(X_\infty)\cap K=\emptyset$. Согласно лемме 3, $\operatorname{codis}(f,g)\geqslant 1-\frac{1}{m}$ для любого отображения $g\colon X_m\to X_\infty$.

Следовательно ни для какого метрического пространства X_∞ последовательность расстояний $d^c_{GH}(X_m,X_\infty)$ не может стремиться к нулю. $\square$

11. Добавление: аналог топологии на собственных классах

Теория, которую мы развиваем в настоящей статье, имеет дело со всеми непустыми метрическими пространствами, рассматриваемыми с точностью до изометрии. Так как на каждом множестве можно ввести метрику, например, положив все расстояния между различными точками равными 1, семейство метрических пространств не является множеством. Для работы с такими семействами мы будем пользоваться теорией множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя [4, 5], причем всегда будем считать, что выполняется аксиома выбора. Эту теорию обычно для краткости обозначают NBGC. Напомним, что все объекты этой теории называются *классами* и бывают двух типов: *множества* — это классы, которые являются элементами других классов, и *собственные классы*, не являющиеся элементами никаких других классов. Приведем примеры важных для нас собственных классов:

- класс $\mathcal{V}$ всех множеств;
- класс ORD всех ординалов;
- класс CARD всех кардиналов;
- класс TOP всех топологий на всех множествах из $\mathcal{V}$;
- класс $\mathcal{GH}$ всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Для классов определены многие стандартные операции, например, пересечение, дополнение, произведение, отображение и др.

Мы будем пользоваться следующей терминологией: *обобщенной полуметрикой на множестве* X называется каждое отображение $\rho\colon X\times X\to[0,\infty]$, удовлетворяющее условиям $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для всех $x,y\in X$ (симметричность), $\rho(x,x)=0$ для всех $x\in X$, и $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$ для всех $x,y,z\in X$ (неравенство треугольника). Если $\rho(x,y)=0$ в точности тогда, когда $x=y$, то слово “полуметрика” заменяется на слово *метрика*. Если же $\rho(x,y)<\infty$ при всех $x,y\in X$, то слово “обобщенный” убирается. Так как произведение и отображение определены для всех классов, то описанные только-что понятия переносятся слов в слово и на произвольные классы. Ниже мы напомним определения расстояния Громова

– Хаусдорфа и непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа, которые, как будет отмечено, являются обобщенными псевдометриками на собственном классе $\mathcal{GH}$.

Интересной особенностью собственных классов является невозможность дословно перенести на них понятие топологии: действительно, все множество, на котором определяется топология, является элементом топологии, поэтому если вместо множества рассмотреть собственный класс, то он никак не может быть элементом топологии. Чтобы обойти эту проблему и ввести аналог топологии, в [27] было предложено рассматривать *классы $\mathfrak{C}$, фильтрующиеся множествами.* Последнее означает, что для каждого кардинального числа n подкласс $\mathfrak{C}_n = \{x \in \mathfrak{C} : \#x \leqslant n\}$, где $\#x$ обозначает мощность множества x, является множеством. Примером таких классов могут служить любые множества, а также собственные классы ORD, CARD и $\mathcal{GH}$. Классы $\mathcal{V}$ и TOP такими не являются.

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс, фильтрующийся множествами. Отображение $\tau\colon \mathrm{CARD} \to \mathrm{TOP}$ такое, что

- $\tau_n := \tau(n)$ — топология на $\mathfrak{C}_n$ для каждого $n \in \mathrm{CARD}$,
- для каждых $m, n \in \mathrm{CARD}$, $m \leqslant n$ топология τ_m индуцирована из τ_n.

Отметим, что если $\mathfrak{C}$ — множество мощности n, то τ_n — обычная топология на $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_n$, и для всякого $m \geqslant n$ имеем $\mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}_n$, а также $\tau_m = \tau_n$. При $m \leqslant n$ топология τ_m на $\mathfrak{C}_m$ обычным образом индуцируется из τ_n. Сказанное позволяет назвать отображение τ *топологией* даже в случае собственных классов. Фильтрующийся множествами класс $\mathfrak{C}$, для которого задана топология τ, будем называть *топологическим классом.*

Замечание 7. *Определить топологию в приведенном выше смысле можно и для любого собственного класса. Для этого достаточно изменить понятие фильтрации множествами, не привязывая ее к мощности элементов, входящих в класс. Хорошо известно, что в NBGC между любыми собственными классами существует биекция, поэтому если $\mathfrak{C}$ — топологический класс, а $\mathfrak{C}'$ — произвольный класс, скажем $\mathcal{V}$, то с помощью биекции $\varphi\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ можно перенести фильтрацию множествами $\mathfrak{C}_n$ на $\mathfrak{C}'$, положив $\mathfrak{C}'_n = \varphi(\mathfrak{C}_n)$ и проделать все приведенные выше построения топологии. Однако для наших целей вполне хватит фильтрации, заданной с помощью мощности.*

Ясно также, что если класс $\mathfrak{C}$ является множеством мощности n, то для всех $m > n$ с необходимостью выполняется $\mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}$ и $\tau_m = \tau_n$, так что фактически у нас имеется стандартное топологическое пространство $(\mathfrak{C}, \tau_n)$, индуцирующее обычным образом топологии τ_k на всех подмножествах $\mathfrak{C}_k$, $k < n$.

Важным частным случаем является метрическая топология, определенная на классе $\mathfrak{C}$, фильтрующемся множествами. Пусть $\rho\colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ — обобщенная псевдометрика, тогда для каждого $n \in \mathrm{CARD}$ определена соответствующая метрическая топология τ_n на $\mathfrak{C}_n$. Соответствующее отображение $\tau\colon \mathrm{CARD} \to \mathrm{TOP}$, $\tau\colon n \mapsto \tau_n$ назовем *метрической топологией*, а пространство $\mathfrak{C}$, наделенное такой топологией, назовем *метрическим классом.*

Отметим, что для каждых $x \in \mathfrak{C}$ и $r \in (0, \infty]$ определен *открытый шар* $U_r(x) = \{y \in \mathfrak{C} : \rho(x, y) < r\}$, представляющий собой, вообще говоря, собственный подкласс в $\mathfrak{C}$. Легко видеть, что если $m \in \mathrm{CARD}$ не меньше $\#x$, то множество $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$ является открытым шаром радиуса r в $\mathfrak{C}_m$.

Предложение 22. *Для любых $x \in \mathfrak{C}$, $r > 0$ и $m \in \mathrm{CARD}$ множество $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$ открыто в топологии τ_m.*

Доказательство. Выберем произвольное $y \in U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$, тогда $|xy| < r$. Существует $\delta > 0$ такое, что $|xy| < r - \delta$, поэтому $U_\delta(y) \subset U_r(x)$, но $U_\delta(y) \cap \mathfrak{C}_m$ является открытым шаром радиуса δ в $\mathfrak{C}_m$, и $U_\delta(y) \cap \mathfrak{C}_m \subset U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$, следовательно, $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m \in \tau_m$. $\square$

Если $f\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — отображение между двумя топологическими классами, то естественным образом определяется его непрерывность. А именно, известно, что образ каждого множества также является множеством, поэтому для каждого кардинального числа n существует такое кардинальное число m, что $f(\mathfrak{A}_n)\subset\mathfrak{B}_m$. Наименьшее из таких кардинальных чисел m обозначим n_f. Ограничивая f до отображения из $\mathfrak{A}_n$ в $\mathfrak{B}_{n_f}$, мы получаем обычное отображение топологических пространств. Легко видеть, что если вместо n_f взять кардинальное число $m\geqslant n_f$, то ограничение f на $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_m$ будет непрерывным (в точке или в целом), если и только если его ограничение на $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно. Таким образом, *непрерывность* отображения f в точке или в целом определим как непрерывность всех его ограничений $f\colon\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{B}_{n_f}$ (мы и в дальнейшем будем обозначать ограничение той же буквой, что и исходное отображение).

Теорема 17. *Пусть $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — отображение метрических классов. Тогда f непрерывно в точке $x\in\mathfrak{A}$, если и только если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $f\big(U_\delta(x)\big)\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Отображение f непрерывно в целом, если и только если оно непрерывно в каждой точке.*

Доказательство. Пусть сначала для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $f\big(U_\delta(x)\big)\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Покажем, что f непрерывно в x. Выберем произвольное n, произвольное $\varepsilon>0$ и соответствующее $\delta>0$, отвечающее сформулированному выше свойству. Так как $U_\delta(x)\cap\mathfrak{A}_n$ и $U_\varepsilon\big(f(x)\big)\cap\mathfrak{B}_{n_f}$ — открытые шары соответственно в $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_{n_f}$, причем в силу предположения образ первого из них содержится во втором, то ограничение $f\colon\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно в x.

Докажем теперь обратное утверждение методом от противного. А именно, предположим, что для некоторого f существуют такие $x\in\mathfrak{A}$ и $\varepsilon>0$, что ни для какого $\delta>0$ не выполняется $f\big(U_\delta(x)\big)\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Последнее означает, что существует последовательность $y_k\in\mathfrak{A}$, для которой $|x\,y_k|<1/k$, но $\big|f(x)f(y_k)\big|\geqslant\varepsilon$. Пусть n — мощность x, а n_k — мощность y_k. Так как ограничение $f\colon\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно, то существует $s>0$, для которого $U_s(x)\cap\mathfrak{A}_n$ переводится отображением f в $U_\varepsilon\big(f(x)\big)\cap\mathfrak{B}_{n_f}\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Таким образом, можно сразу предполагать, что все n_k не меньше n.

Так как счетное объединение множеств по-прежнему является множеством, существует $p\in\mathrm{CARD}$ такое, что $p\geqslant n_k$ для всех k. Отметим, что $x\in\mathfrak{A}_p$, $f(x)\in\mathfrak{B}_{p_f}$ и ограничение $f\colon\mathfrak{A}_p\to\mathfrak{B}_{p_f}$ непрерывно, поэтому существует $s>0$, для которого f-образ открытого в $\mathfrak{A}_p$ шара $U_s(x)\cap\mathfrak{A}_p$ радиуса s содержится в открытом в $\mathfrak{B}_{p_f}$ шаре $U_\varepsilon\big(f(x)\big)\cap\mathfrak{B}_{p_f}\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$ радиуса ε. Но тогда при $1/k<s$ выполняется $y_k\in U_s(x)\cap\mathfrak{A}_p$ и, значит, $\big|f(x)f(y_k)\big|<\varepsilon$, противоречие. □

Следствие 12. *Пусть $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — липшицево отображение метрических классов, в частности, нерастягивающее, тогда f непрерывно.*

Отображение $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ метрических классов называется *открытым в точке* $x\in\mathfrak{A}$, если для любого $r>0$ существует $s>0$ такое, что $f\big(U_r(x)\big)\supset U_s\big(f(x)\big)$. Из теоремы мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 13. *Пусть $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — биективное отображение метрических классов, тогда f^{-1} непрерывно в точке $z=f(x)\in\mathfrak{B}$, если и только если f открыто в x.*

12. Заключение

В настоящей работе мы рассказали о начальных шагах построения теории непрерывного расстояний Громова – Хаусдорфа. В отличие от [3], приводимое нами понятие удовлетворяет неравенству треугольник, что существенно облегчает работу. Излагаемый в статье подход имеет естественные обобщения: заменяя общие соответствия теми, которые порождены прямым и обратным отображениями (сравните с функциями перехода между картами многообразий), мы приходим к естественной возможности изучения расстояния Громова – Хаусдорфа разной гладкости, когда рассматриваемые пространства, например, являются гладкими многообразиями. Как и в случае квантовых метрических пространств, для которых в [1] определяется такое расстояние Громова – Хаусдорфа, которое по мнению автора “уважает” структуру рассматриваемых пространств, непрерывное и гладкое расстояние Громова – Хаусдорфа возможно также “уважают” соответствующие дополнительные структуры. Кажется перспективным применение аналогов нашей теории к изучению, скажем, схожести дифференциальных уравнений, определенных даже на разных пространствах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rieffel M. A. Gromov-Hausdorff Distance for Quantum Metric Spaces // ArXiv e-prints 2003. arXiv:math/0011063 [math.OA].
2. Lim S., Memoli F., Smith Z. The Gromov–Hausdorff distance between spheres // Geometry & Topology. 2023. Vol. 27, №9. P. 3733–3800.
3. Lee J., Morales C. A. Gromov-Hausdorff Stability of Dynamical Systems and Applications to PDEs. Birkhäuser/Springer, 2022.
4. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
5. Banach T. Classical set theory: theory of sets and classes // ArXiv e-prints 2023. arXiv:2006.01613v4[math.LO].
6. Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Edited by Lafontaine and Pierre Pansu, 1981.
7. Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Birkhäuser, 1999.
8. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
9. Bing R. H. A homogeneous indecomposable plane continuum // Duke Math. J. 1948. Vol. 15. P. 729–742.
10. Bogatyy S. A., Tuzhilin A. A. Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry // ArXiv e-prints 2021. arXiv:2110.06101[math.MG].
11. Богатый С. А., Тужилин А. А. Действие преобразования подобия на семействах метрических пространств // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 223. P. 3–13.
12. Bogataya S. I., Bogatyy S. A., Redkozubov V. V., Tuzhilin A. A. Clouds in Gromov–Hausdorff Class: their completeness and centers // Topology and its Applications. 2023. Vol. 329.
13. Bogatyy S. A., Tuzhilin A. A. Continuous Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry // ArXiv e-prints 2021. arXiv:2110.06101[math.MG].
14. Фет А. И. Обобщение теоремы Люстерника–Шнирельмана о покрытиях сфер и некоторых связанных с ней теорем // ДАН. 1954. Т. 95, №6. С. 1149–1151.

15. Вихров А. А. Проблема построения геодезических в классе Громова – Хаусдорфа: оптимальная хаусдорфова реализация не всегда существует // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, №2. С. 49–60.

16. Vikhrov A. Geometry of linear and nonlinear geodesics in the proper Gromov–Hausdorff class // Matematicki vesnik. 2025. P. 1–17.

17. Stone A. H. Paracompactness and product spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 54. P. 977–982.

18. Engelking R. General Topology. Warszawa, 1985.

19. Munkres J. R. Topology. 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

20. Dowker C. H. Mapping theorems for non-compact spaces // Amer. J. Math. 1947. Vol. 69. P. 200–242.

21. Nagami K., Roberts J. H. Metric-dependent dimension functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 16, №4. P. 601–604.

22. Illanes A., Nadler S. Jr. Hyperspaces // Marcel Dekker, New York, 1999.

23. Knaster B. Un continu dont tout sous-continu est indecomposable // Fund. Math. 1922. Vol. 3. P. 247–286.

24. Moise E. E. An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 63. P. 581–594.

25. Bing R. H. Concerning hereditarily indecomposable continua // Pacific J. Math. 1951. Vol. 1. P. 43–51.

26. Cook H. Continua which admit only the identity mapping onto non-degenerate subcontinua // Fundamenta Mathematicae 1967. Vol. 60. P. 241–249.

27. Borzov S. I., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Extendability of Metric Segments in Gromov-Hausdorff Distance // ArXiv e-prints 2020. arXiv:2009.00458[math.MG].

REFERENCES

1. Rieffel, M. A. 2003, “Gromov-Hausdorff Distance for Quantum Metric Spaces”, *ArXiv e-prints*, arXiv:math/0011063[math.OA].

2. Lim, S., Memoli, F. & Smith, Z. 2023, “The Gromov–Hausdorff distance between spheres”, *Geometry & Topology*, vol. 27, no. 9, pp. 3733–3800.

3. Lee, J. & Morales, C. A. 2022, “Gromov-Hausdorff Stability of Dynamical Systems and Applications to PDEs”, Birkhäuser/Springer.

4. Mendelson, E. 1984, “Introduction to Mathematical Logic”, M.: Nauka.

5. Banach, T. 2023, “Classical set theory: theory of sets and classes”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2006.01613v4[math.LO].

6. Gromov, M. 1981, “Structures métriques pour les variétés riemanniennes”, Edited by Lafontaine and Pierre Pansu.

7. Gromov, M. 1999, “Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces”, Birkhäuser.

8. Burago, D., Burago, Yu. & Ivanov, S. 2001, “A Course in Metric Geometry”, Providence.

9. Bing, R. H. 1948, “A homogeneous indecomposable plane continuum”, *Duke Math. J.*, vol. 15, pp. 729–742.

10. Bogatyy, S. A. & Tuzhilin, A. A. 2021, “Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2110.06101[math.MG].

11. Bogatyy, S. A. & Tuzhilin, A. A. 2023, “Action of similarity transformation on families of metric spaces”, *Itogi Nauki i Tekhn.*, vol. 223, pp. 3–13.

12. Bogataya, S. I., Bogatyy, S. A., Redkozubov, V. V. & Tuzhilin, A. A. 2023, “Clouds in Gromov–Hausdorff Class: their completeness and centers”, *Topology and its Applications*, vol. 329.

13. Bogatyy, S. A. & Tuzhilin, A. A. 2021, “Continuous Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2110.06101[math.MG].

14. Fet, A. I. 1954, “A generalization of the Lyusternik-Shnirelman theorem on coverings of spheres and some related theorems”, *DAN*, vol. 95, no. 6, pp. 1149–1151.

15. Vikhrov, A. A. 2025, “The problem of constructing geodesics in the Gromov–Hausdorff class: an optimal Hausdorff implementation does not always exist”, *Chebyshevski sb.*, vol. 26, no. 2, pp. 49–60.

16. Vikhrov, A. 2025, “Geometry of linear and nonlinear geodesics in the proper Gromov–Hausdorff class”, *Matematicki vesnik*, pp. 1–17.

17. Stone, A. H. 1948, “Paracompactness and product spaces”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 54, pp. 977–982.

18. Engelking, R. 1985, “General Topology”, Warszawa.

19. Munkres, J. R., 2000, “Topology”, 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River.

20. Dowker, C. H. 1947, “Mapping theorems for non-compact spaces”, *Amer. J. Math.*, vol. 69, pp. 200–242.

21. Nagami, K. & Roberts, J. H. 1965, “Metric-dependent dimension functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 16, no. 4, pp. 601–604.

22. Illanes, A. & Nadler, S. Jr. 1999, “Hyperspaces”, Marcel Dekker, New York.

23. Knaster, B. 1922, “Un continu dont tout sous-continu est indecomposable”, *Fund. Math.*, vol. 3, pp. 247–286.

24. Moise, E. E. 1948, “An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 63, pp. 581–594.

25. Bing, R. H. 1951, “Concerning hereditarily indecomposable continua”, *Pacific J. Math.*, vol. 1, pp. 43–51.

26. Cook, H. 1967, “Continua which admit only the identity mapping onto non-degenerate subcontinua”, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 60, pp. 241–249.

27. Borzov, S. I., Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2020, "Extendability of Metric Segments in Gromov-Hausdorff Distance", *ArXiv e-prints*, arXiv:2009.00458[math.MG].

Получено: 27.11.2025
Принято в печать: 12.02.2026