

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 1.

УДК: 511.325

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-4-18

Об одновременном представлении чисел в виде суммы простых чисел

И. Аллаков, Б. Х. Эрдонов, О. Ш. Имамов

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Эрдонов Бекмурод Холбой угли — доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, Термезский университет экономики и сервиса (г. Термез, Узбекистан).

e-mail: bekmurod.erdonov@mail.ru

Имамов Ойбек Шаназарович — преподаватель, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан)

e-mail: oybekimamov000@gmail.com

Аннотация

В работе получены оценки: для количества натуральных чисел $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_s \leq X$, удовлетворяющих условиям конгруэнц-разрешимости и положительной разрешимости; для исключительного множества в задаче об одновременном представлении s чисел b_1, b_2, \dots, b_s в виде суммы m ($s < m \leq 2s$) простых чисел, а также новая оценка снизу для чисел представлений b_1, b_2, \dots, b_s в указанном виде.

Ключевые слова: система линейных уравнений, асимптотическая формула, степенная оценка, конгруэнц-разрешимость, положительная разрешимость, характер Дирихле, главный характер Дирихле, L -функция Дирихле, исключительный характер, исключительный нуль, функция Мангольдта, малые дуги, большие дуги, сингулярный ряд, сингулярный интеграл.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Аллаков И., Эрдонов Б. Х., Имамов О. Ш. Об одновременном представлении чисел в виде суммы простых чисел // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 4–18.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 1.

UDC: 511.325

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-4-18

On the simultaneous representation of numbers as a sum of prime numbers

I. Allakov, B. Kh. Erdonov, O. Sh. Imamov

Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Termez, Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Erdonov Bekmurod Kholboy ugli — doctor of philosophy (PhD) in physical and mathematical sciences, Termez University of Economics and Service (Termez, Uzbekistan).

e-mail: bekmurod.erdonov@mail.ru

Imamov Oybek Shanazarovich — lecturer, Termez State University (Termez, Uzbekistan).

e-mail: oybekimamov000@gmail.com

Abstract

In the paper, we estimate the cardinality of the set of positive integers $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_s \leq X$ satisfying to the conditions of congruent-solvability and positive solvability, and of the exceptional set in the problem of simultaneous representation of s numbers b_1, b_2, \dots, b_s the sums of m ($s < m < 2s$) primes. We also obtain a new lower estimate for the number of such representations.

Keywords: system of linear equations, asymptotic formula, power estimate, congruent solvability, positive solvability, Dirichlet character, principal Dirichlet character, Dirichlet L -function, exceptional character, exceptional zero, Mangoldt function, minor arcs, major arcs, singular series, singular integral.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Allakov, I., Erdonov, B. Kh., Imamov, O. Sh. 2026, "On the simultaneous representation of numbers as a sum of prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 4–18.

1. Введение

Пусть b_1, b_2, \dots, b_s — натуральные числа, $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ — целые числа, p_1, p_2, \dots, p_m — простые числа. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{im}p_m, \quad (i = 1, 2, \dots, s; m > s). \quad (1)$$

Обозначим через $U_{s,m}(X)$ — множество наборов (b_1, b_2, \dots, b_s) , $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_s \leq X$, для которых система (1) неразрешима в простых числах и пусть $E_{s,m}(X) = \text{card } U_{s,m}(X)$.

При $m \geq 2s + 1$ В. Фанг [1], исследуя систему (1), в некоторых дополнительных условиях, получил асимптотическую формулу для числа решений системы (1).

Известно, что разрешимость системы (1) связана следующими двумя условиями (см. [2]):

а) для любого простого p существуют такие целые числа l_1, \dots, l_m с условиями $1 \leq l_1, \dots, l_m \leq p - 1$, которые удовлетворяют систему линейных сравнений: $a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \dots + a_{im}l_m \equiv b_i \pmod{p}$, $(i = 1, \dots, s)$;

б) существуют действительные положительные числа y_1, \dots, y_m для которых выполняются равенства $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{im}y_m = b_i$, ($i = 1, \dots, s$).

Пусть $W_{s,m}(X)$ —множество векторов $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s)$, $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_s \leq X$, которые удовлетворяют условиям а), б) и $R(\vec{b})$ —число решений системы (1) в простых числах, и $B = \max_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq m}} \{3|a_{ij}|\}$.

Исследованию функций $E_{s,m}(X)$, $W_{s,m}(X)$ и $R(\vec{b})$, при различных значениях s и m посвящены работы М.Ч. Лю и К.М. Тсанг [2, 3], И. Аллакова [4, 5, 6], Хуа Ло-Кен (см. стр. 163, [7]), Б.Х.Абраева [8, 9], Б.Х.Эрдонова [10, 11] и других. Не смотря на это в случае $s < m \leq 2s$, ($s > 3$) до сих пор не только не получена асимптотическая формула для $R(\vec{b})$, но в общем случае даже не установлено существование решений системы (1).

В настоящей работе рассмотрим именно этот общий случай. Положим $s = n$, $m = n + k$, ($1 < k \leq n$), и рассмотрим следующую систему:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{i,n+k}p_{n+k}, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2)$$

Как выше было подчеркнуто, разрешимость системы (2) зависит от условий а) и б). Легко увидеть, что $\text{card}W_{n,n+1}(X) \leq \text{card}W_{n,n+k}(X)$. Отсюда и из теоремы 3.1.1 работы [4] следует, что множество $W_{n,n+k}(X)$ содержит достаточно много элементов. Обозначим:

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n} = \det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \dots & a_{1i_n} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \dots & a_{2i_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ni_1} & a_{ni_2} & \dots & a_{ni_n} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n+k, \quad i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n.$$

Кроме того, для удобства используем обозначения $\Delta_{12\dots n} = \Delta$, $\Delta_{k+1, \dots, k+n} = \bar{\Delta}$ и $\Delta_{i,j}$ определитель, полученный из Δ , заменой элементов i —столбца с элементами j —ого столбца. Чтобы избежать тривиальности и вырожденности наложим на коэффициенты следующие условия: $\Delta_{i_1 \dots i_n} \neq 0$, для всех ($1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n+k$) и взаимно простые.

Основным результатом работы является следующая теорема:

ТЕОРЕМА. Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое действительное число, тогда:

а) существует достаточно большое число A , такое, что при $X \geq B^A$ справедлива оценка $E_{n,n+k}(X) \leq X^{n-\varepsilon}$;

б) если $R(\vec{b})$ —количество решений системы (2) в простых числах $p_j \leq N$, тогда для $R(\vec{b})$ при заданном $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, справедлива оценка $R(\vec{b}) \gg \mathcal{K}^{k-\varepsilon} (\ln \mathcal{K})^{-n-k}$, для всех (b_1, \dots, b_n) , $1 \leq b_1, \dots, b_n \leq X$ за исключением не более чем $X^{n-\varepsilon}$ из них, где $N = 3(n!)^2 B^{2n-1} X$, $\mathcal{K} = 3(n!)^2 B^{2n-1} |\vec{b}| (\sqrt{n})^{-1}$.

2. Обозначения и идея доказательства теоремы

Пусть a_{ij} ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n+k}$) целые числа удовлетворяющие условию $a_{i1}y_1 + \dots + a_{i,n+k}y_{n+k} > 0$, ($i = \overline{1, n}$), c_1, c_2, \dots —эффективно вычисляемые положительные константы и δ достаточно малое эффективно вычисляемое положительное число. \mathbb{R} —множество действительных чисел и пусть $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n$.

Для любого целого $q \geq 1$ через $\sum_{(q)}$ обозначим суммирование по всем l_1, \dots, l_{n+k} удовлетворяющие условиям $1 \leq l_j \leq q$, $(l_j, q) = 1$, $\sum_{j=1}^{n+k} a_{ij} l_j \equiv b_i \pmod{q}$ и пусть $N(q) = \sum_{(q)} 1$.

Пусть n фиксированное натуральное число и $X \geq B^{\exp(\delta^{-2})}$. Положим

$$N = 3(n!)^2 B^{2n-1} X, \quad Q := N^\delta, \quad L := NQ^{-\frac{1}{90}}, \quad T := Q^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$B \leq Q^\delta. \quad (4)$$

Через $\chi \pmod{q}$ и $\chi_0 \pmod{q}$ обозначим характер Дирихле и главный характер Дирихле по модулю q соответственно. Для произвольного $y \in \mathbb{R}$ и положительного целого q определим $e(y) = e^{2\pi iy}$ и $e_q(y) = e\left(\frac{y}{q}\right)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} S(y) := \sum_{L < n \leq N} \Lambda(n) e(ny), \quad S_\chi(y) := \sum_{L < n \leq N} \Lambda(n) \chi(n) e(ny), \\ I(y) := \int_L^N e(xy) dx, \quad \tilde{I}(y) := \int_L^N x^{\beta-1} e(xy) dx, \quad I_\chi(y) := \int_L^N e(xy) \sum'_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} dx, \end{array} \right. \quad (5)$$

где $\sum'_{|\gamma| \leq T}$ — означает, что суммирование ведётся по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ в области $0,5 \leq \beta \leq 1 - c_1 \ln^{-1} T$, $|\gamma| \leq T$ (кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$) (см. [4]) и $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта. Пусть $\tau = N^{-1} T^{1/2n}$. Для произвольных целых чисел h_1, h_2, h_3, q с условием

$$1 \leq h_1, \dots, h_n \leq q \leq Q \text{ и } (h_1, \dots, h_n, q) = 1, \quad (6)$$

определим

$$m(h_1, \dots, h_n, q) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \left| x_i - \frac{h_i}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q}, \quad i = \overline{1, n} \right\}$$

а M_1 и M_2 определим равенством

$$M_1 = \cup m(h_1, \dots, h_n, q), \quad M_2 = [\tau, 1 + \tau]^n \setminus M_1. \quad (7)$$

В равенстве (7) объединение берётся по всем h_1, \dots, h_n, q , которые удовлетворяют условию (6). В дальнейшем M_1 будем называть большой дугой, а M_2 малой дугой.

Нетрудно видеть, что эти n -мерные кубы $m(h_1, \dots, h_n, q)$ взаимно не пересекаются (см. [4]) и лежат в $[\tau, 1 + \tau]^n$.

Для произвольного $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in W_{n, n+k}(X)$ и $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\bar{x}_b = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n, \quad \bar{x}_j = a_{1j} x_1 + \dots + a_{nj} x_n, \quad (j = \overline{1, n+k}) \quad (8)$$

и

$$I(\vec{b}) = \sum \Lambda(m_1) \dots \Lambda(m_{n+k}). \quad (9)$$

В равенстве (9) суммирование ведётся по всем m_j , которые удовлетворяют условиям

$L < m_1, \dots, m_{n+k} \leq N$ и $\sum_{j=1}^{n+k} a_{ij} m_j = b_i, \quad (i = \overline{1, n})$. Используя (5) и (7) $I(\vec{b})$ можем представить в виде:

$$\begin{aligned} I(\vec{b}) &= \int_\tau^{\tau+1} \dots \int_\tau^{\tau+1} e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^{n+k} S(\bar{x}_j) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \left(\int_{M_1} \dots \int + \int_{M_2} \dots \int \right) e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^{n+k} S(\bar{x}_j) dx_1 \dots dx_n = I_1(\vec{b}) + I_2(\vec{b}). \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь, если мы покажем, что $I(\vec{b}) > 0$, то можно утверждать, что система (2) разрешима в простых числах. В силу $I(\vec{b}) > I_1(\vec{b}) - |I_2(\vec{b})|$ теорема следует из следующих двух лемм.

ЛЕММА 2.1. Для всех наборов (b_1, \dots, b_n) , $(1 \leq b_1, \dots, b_n \leq X)$ за исключением не более чем $X^n Q^{-k/7(n-1)}$ наборов из них, справедлива оценка $|I_2(\vec{b})| < N^k Q^{-k/6(n-1)}$.

ЛЕММА 2.2. Для всех наборов $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n,n+k}(X)$, за исключением не более чем $X^n Q^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов, справедлива оценка $I_1(\vec{b}) \gg N^k Q^{-\left(\frac{k}{16n(n+1)} + \frac{k}{14(n-1)}\right)}$.

Доказательство леммы 2.1 мы привели в [12]. Ниже мы докажем лемму 2.2.

3. Упрощение интеграла по большой дуге

Для произвольного характера $\chi(\text{mod } q)$ обозначим

$$C_\chi(m) := \sum_{1 \leq l \leq q} \chi(l) e_q(ml) \text{ и } C_q(m) = C_{\chi_0}(m).$$

По аналогии с (8) обозначим: $\bar{h}_j := a_{1j}h_1 + \dots + a_{nj}h_n$, $\bar{h}_b := b_1h_1 + \dots + b_nh_n$, $\bar{\eta}_j := a_{1j}\eta_1 + \dots + a_{nj}\eta_n$, $\bar{\eta}_b := b_1\eta_1 + \dots + b_n\eta_n$, $(j = \overline{1, n+k})$ тогда $\bar{x}_j = \frac{\bar{h}_j}{q} + \bar{\eta}_j$, $(j = \overline{1, n+k})$. Используя свойство ортогональности характеров [13, 14] и свойства сумм Рамануджана [15], сумму $S(\bar{x}_j)$ можем представить в следующем виде:

$$S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(\text{mod } q)} C_{\bar{\chi}}(\bar{h}_j) S_\chi(\bar{\eta}_j) + O(\ln^2 N).$$

Далее, при $1 \leq j \leq n+k$ обозначим

$$\begin{cases} G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) := \sum_{\chi(\text{mod } q)} C_{\bar{\chi}}(\bar{h}_j) I_\chi(\bar{\eta}_j) & \text{и} \\ H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) := C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j) - \delta_q C_{\bar{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j) - G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) \end{cases} \quad (11)$$

здесь если $\tilde{r}|q$, то $\delta_q = 1$ и если $\tilde{r} \nmid q$, то $\delta_q = 0$, где \tilde{r} —модуль исключительного характера $\tilde{\chi}$.

Тогда для всех векторов $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ за исключением не более чем $X^n Q^{-1}$ наборов из них $I_1(\vec{b})$ можно представить в виде [12]

$$I_1(\vec{b}) = \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^{n+k}(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int e_q(-\bar{\eta}_b) \prod_{j=1}^{n+k} H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) d\eta_1 \dots d\eta_n + O(N^k Q^{-1}), \quad (12)$$

где $\sum_{\bar{h}}'$ — означает суммирование по всем h_1, \dots, h_n , удовлетворяющие условию (6).

4. Сингулярный ряд и сингулярный интеграл задачи

Для произвольного целого $q \geq 1$ и для любого простого p обозначим

$$A(q) := \frac{1}{\varphi^{n+k}(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{n+k} C_q(\bar{h}_j), \quad s(p) := 1 + A(p). \quad (13)$$

Пусть $\chi_j \pmod{r_j}$, ($j = \overline{1, n+k}$)- примитивные характеры и $r = [r_1, \dots, r_{n+k}]$ наименьшее общее кратное чисел r_1, \dots, r_{n+k} . В дальнейшем нам необходима оценка суммы вида:

$$Z(q) = Z(q, \chi_1, \dots, \chi_{n+k}) = \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{n+k} C_{\chi_j \chi_0}(\bar{h}_j),$$

где число q кратно r и χ_0 -главный характер по модулю q .

Сингулярный ряд задачи исследован в работе [12], а для сингулярного интеграла справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. Если ρ_j ($j = \overline{1, n+k}$), произвольные комплексные числа с условием $0 < \operatorname{Re} \rho_j \leq 1$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} \dots \int \left(\prod_{j=1}^{n+k} \int_L^N x^{\rho_j-1} e(\bar{\eta}_j x) dx_j \right) e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 \dots d\eta_n = \frac{N^k}{|\bar{\Delta}|} \int_D \dots \int \prod_{j=1}^{n+k} (Nx_j)^{\rho_j-1} dx_1 \dots dx_k, \quad (14)$$

где x_{k+1}, \dots, x_{n+k} и область интегрирования D определяются следующими равенствами:

$$x_i = \bar{\Delta}^{-1} (\bar{\Delta}_{i,b} N^{-1} - \bar{\Delta}_{i,1} x_1 - \bar{\Delta}_{i,2} x_2 - \dots - \bar{\Delta}_{i,k} x_k), \quad (i = \overline{k+1, k+n}) \quad (15)$$

и

$$D = \{x_1, \dots, x_k : LN^{-1} \leq x_{k+1}, \dots, x_{k+n} \leq 1\}. \quad (16)$$

Кроме того, если $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n, n+k}(X)$, то

$$\int_D \dots \int dx_1 \dots dx_k \gg Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}}. \quad (17)$$

за исключением $X^n Q^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов (b_1, \dots, b_n) из $W_{n, n+k}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство равенств (14), (15), (16) аналогично доказательству леммы 3.6.1 работы [4]. Поэтому опускаем их.

Докажем оценку (17). В зависимости от знака $\bar{\Delta}$ разобьем доказательство на два случая.

1-случай. Пусть $\bar{\Delta} > 0$. Согласно (15) и (16) кратный интеграл в (17) равен сумме

$$\frac{LN^{-1}\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_{i,b}N^{-1} + \sum_{1 \leq j \leq k} \bar{\Delta}_{i,j}x_j - \bar{\Delta}_{i,\xi}x_\xi}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}} \leq x_\xi \leq \frac{\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_{i,b}N^{-1} + \sum_{1 \leq j \leq k} \bar{\Delta}_{i,j}x_j - \bar{\Delta}_{i,\xi}x_\xi}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}},$$

($i = \overline{k+1, k+n}$, $\xi = \overline{1, k}$), k мерных кубов, принадлежащих $[LN^{-1}, 1]^k$. Здесь мы считаем, что $-\bar{\Delta}_{i,\xi}$, ($i = \overline{k+1, k+n}$, $\xi = \overline{1, k}$) положительны. Это всегда возможно, в противном случае мы можем переобозначить индексы коэффициентов a_{ij} . Поэтому оценим разницу между верхним и нижним пределами x_ξ , т.е.

$$\frac{\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_{i,b}N^{-1}}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}} - \frac{LN^{-1}\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_{i,b}N^{-1}}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}}, \quad (i = \overline{k+1, k+n}, \xi = \overline{1, k}). \quad (18)$$

Для $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n, n+k}(X)$ выполняется $|\bar{\Delta}_{i,b}| \leq n!B^{n-1}X$ и для второго слагаемого в (18) согласно (3) и (4) выполняется

$$\leq \left(n!B^n Q^{-1/90} + n!B^{n-1}XN^{-1} \right) |\bar{\Delta}_{i,\xi}|^{-1} \leq ((3n! - 1)B^n)^{-1},$$

и для первого слагаемого,

$$\geq (1 - n!B^{n-1}XN^{-1}) |\bar{\Delta}_{i,\xi}|^{-1} \geq \frac{1}{n!B^n} - \frac{1}{3(n!)^2 B^{2n}} \geq \geq \frac{1}{2n!B^n} \left(2 - \frac{2}{3 \cdot k \cdot n!B^n}\right) \geq (2n!B^n)^{-1}.$$

Таким образом, для каждой разности в (18) подходит оценка $\gg B^{-n}$. Если учесть, что таких разностей k , то для первой области имеет место оценка $\gg B^{-kn}$. Поэтому

$$\int_D \dots \int dx_1 \dots dx_k \gg B^{-kn} \gg Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}}$$

выполняется для всех $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n,n+k}(X)$ и $\delta < \frac{1}{16n^2(n+1)}$.

2-случай. Пусть $\bar{\Delta} < 0$. В этом случае интеграл $\int_D \dots \int dx_1 \dots dx_k$ также равен сумме

$$\frac{\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_{i,b}N^{-1} + \sum_{1 \leq j \leq k} \bar{\Delta}_{i,j}x_j - \bar{\Delta}_{i,\xi}x_\xi}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}} \leq x_\xi \leq \frac{LN^{-1}\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_{i,b}N^{-1} + \sum_{1 \leq j \leq k} \bar{\Delta}_{i,j}x_j - \bar{\Delta}_{i,\xi}x_\xi}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}}, \quad (19)$$

($i = \overline{k+1, k+n}$, $\xi = \overline{1, k}$), k мерных кубов, принадлежащих $[LN^{-1}, 1]^k$. Поэтому, оценим разницу между верхней и нижней границами x_ξ в (19), т.е.

$$\frac{LN^{-1}\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_{i,b}N^{-1}}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}} - \frac{\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_{i,b}N^{-1}}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}}, \quad (i = \overline{k+1, k+n}, \xi = \overline{1, k}). \quad (20)$$

Поскольку $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n,n+k}(X)$, по определению $W_{n,n+k}(X)$ система линейных уравнений $\bar{\Delta} y_i = \bar{\Delta}_{i,b} - \bar{\Delta}_{i,1}y_1 - \dots - \bar{\Delta}_{i,k}y_k$, ($i = \overline{k+1, k+n}$) имеет положительное вещественное решение. Отсюда следует, что $\bar{\Delta}_{i,b} < 0$ для всех $i = \overline{k+1, k+n}$. Для каждого фиксированного целого числа $k \geq 1$ существует не более чем X^{n-1} значений (b_1, \dots, b_n) удовлетворяющих условию $k = -\bar{\Delta}_{i,b}$, принадлежащем $[1; X]^n$. Следовательно, если $k = -\bar{\Delta}_{i,b} \leq \leq \bar{\Delta}_{i,\xi}NQ^{-1/16n(n+1)}$, то существует значение $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n,n+k}(X)$, не превышающее $\leq \bar{\Delta}_{i,\xi}X^{n-1}NQ^{-1/16n(n+1)}$, ($\xi = \overline{1, k}$), для которых справедливо соотношение $\bar{\Delta}_{i,b}\bar{\Delta}_{i,\xi}^{-1} \leq \leq NQ^{-1/16n(n+1)}$. Таким образом, для всех $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n,n+k}(X)$, кроме $X^n Q^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов из них, имеет место неравенство

$$\bar{\Delta}_{i,b}(N\bar{\Delta}_{i,\xi})^{-1} > Q^{-1/16n(n+1)}, \quad (i = \overline{k+1, k+n}, \xi = \overline{1, k}). \quad (21)$$

Поскольку $\bar{\Delta} < 0$, $|\bar{\Delta}_{i,b}N^{-1}| \leq (3n!B^n)^{-1}$, имеем: $\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_{i,b}N^{-1} < 0$, ($i = \overline{k+1, k+n}$). В то же время согласно (21) и (3) неравенство

$$\geq Q^{-1/16n(n+1)} - n!B^n Q^{-1/90} > \frac{1}{2}Q^{-1/16n(n+1)}$$

выполняется для первого слагаемого в (20). Таким образом, соотношение

$$\int_D \dots \int dx_1 \dots dx_k \geq \left(\frac{1}{2}Q^{-\frac{1}{16n(n+1)}} - LN^{-1}\right)^k \gg Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}}$$

справедливо для всех $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n,n+k}(X)$, кроме не более чем $X^n Q^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов из них. \square

5. Доказательство теоремы

В силу (11) при раскрытии произведения $\prod_{j=1}^{n+k} H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta})$ получается 3^{n+k} слагаемых. Их разделим на три группы следующим образом:

в группу T_1) включим только один член $\prod_{j=1}^{n+k} C_q(\bar{h}_j) I(\bar{h}_j)$;

в группу T_2) включаем, те члены, которые содержат хотя бы один множитель $G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta})$ (их количество равно $3^{n+k} - 2^{n+k}$);

в группу T_3) включаем остальные слагаемые (их количество равно $2^{n+k} - 1$).

При $i = 1, 2, 3$ введем следующие обозначения:

$$M_i := \sum_{q \leq Q} \varphi^{-n-k}(q) \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} \{ \text{сумма членов в } T_i \} e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 \dots d\eta_n. \quad (22)$$

В силу (22), для всех рассматриваемых наборов $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n, n+k}(X)$ за исключением не более чем $X^n Q^{-1}$ значений из них, равенство (12) можно переписать в виде:

$$I_1(\vec{b}) = M_1 + M_2 + M_3 + O(N^k Q^{-1}). \quad (23)$$

Пусть

$$M_0 = \frac{N^k}{|\Delta|} \prod_p s(p) \int \dots \int_D dx_1 \dots dx_k. \quad (24)$$

Тогда в силу утверждения с) леммы 5.2 работы [12] и леммы 4.1 справедлива оценка

$$M_0 \gg N^k B^{-n} Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}} \quad (25)$$

за исключением не более чем $X^n Q^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n, n+k}(X)$.

ЛЕММА 5.1. *Для всех $\vec{b} \in W_{n, n+k}(X)$ справедливо равенство $M_1 = M_0 + O(N^k Q^{-4/5})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (14) $\rho_j = 1$ и используя лемму 5.2 d) работы [12] из (22) находим

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^{n+k}(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{n+k} C_q(\bar{h}_j) \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^{n+k} \int_L^N e(\bar{\eta}_j x) dx_j \right) e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 \dots d\eta_n = \\ &= \frac{N^k}{|\Delta|} \int \dots \int_D dx_1 \dots dx_k \left(\sum_{q \leq Q} A(q) \right) = \frac{N^k}{|\Delta|} \int \dots \int_D dx_1 \dots dx_k \left(\sum_{q=1}^{\infty} A(q) \right) + \\ &\quad + O(N^k Q^{-1} N^{c_2/\ln \ln N} \ln^{c_3} Q). \end{aligned} \quad (26)$$

В силу леммы 5.2 b), c) работы [12] и (13) имеем $\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_p (1 + A(p)) = \prod_p s(p)$ и ясно, что $N^{c_2/\ln \ln N} \ln^{c_3} Q < Q^{1/5}$. Отсюда учитывая равенства (24), (26) получим лемму 5.1. \square

Пусть m_1, m_2, \dots различные целые числа из множества $\{1, \dots, n+k\}$ и

$$\mathcal{G}(m_1, m_2, \dots) := \sum_{(\vec{r})} \tilde{\chi}(l_{m_1}) \tilde{\chi}(l_{m_2}) \dots, \quad (27)$$

$$\mathcal{P}(m_1, m_2, \dots) := \int \dots \int_D \left[(Nx_{m_1})^{\tilde{\beta}-1} (Nx_{m_2})^{\tilde{\beta}-1} \dots \right] dx_1 \dots dx_k,$$

где область D определена в (16). Очевидно,

$$|\mathcal{P}(m_1, m_2, \dots)| \leq 1. \quad (28)$$

ЛЕММА 5.2. *Имеют место следующие оценки:*

a) $|\mathcal{G}(m_1, m_2, \dots)| \leq N(\tilde{r}) \leq \varphi^k(\tilde{r});$

b) $\mathcal{G}(m_1, m_2, \dots) \ll B^{\frac{1}{2}nk\lambda_1} \tilde{r}^{\frac{n+k}{2n}}$ за исключением не более, чем $X^n \tilde{r}^{-\frac{k}{n}}$ наборов $(b_1, \dots, b_n) \in [1, X]^n$, где $\lambda_1 = \frac{(n+k)!}{n!k!}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) следует из утверждений а) и б) леммы 5.1 работы [12].

Доказательство утверждения б). Для удобства рассмотрим конкретное множество из $\{1, 2, \dots, n+k\}$, например $1, 2, \dots, n$, то есть $\mathcal{G}(1, \dots, n)$. Согласно (27) $\mathcal{G}(1, \dots, n)$ можно представить в виде (см. [4], стр. 101)

$$\mathcal{G}(1, \dots, n) = \frac{1}{\tilde{r}^n} \sum_{1 \leq h_1, \dots, h_n \leq \tilde{r}} e_{\tilde{r}}(-\bar{h}_b) C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1) \dots C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_n) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+1}) \dots C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+k}).$$

Используя тождество Парсеваля (см. [16], стр. 152), находим

$$\sum_{1 \leq b_1, \dots, b_n \leq \tilde{r}} |\mathcal{G}(1, \dots, n)|^2 = \frac{1}{\tilde{r}^n} \left| \sum_{1 \leq h_1, \dots, h_n \leq \tilde{r}} C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1) \dots C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_n) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+1}) \dots C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+k}) \right|^2.$$

Так как $\tilde{\chi}$ —является примитивным характером, то $C_{\tilde{\chi}}(m) = \tilde{\chi}(m) C_{\tilde{\chi}}(1)$ и $C_{\tilde{\chi}}(1) = \sqrt{\tilde{r}}$. Поэтому

$$\sum_{1 \leq b_1, \dots, b_n \leq \tilde{r}} |\mathcal{G}(1, \dots, n)|^2 \leq \sum_{\substack{1 \leq h_1, \dots, h_n \leq \tilde{r} \\ (h_1, \dots, h_n, \tilde{r})=1}} |C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+1}) \dots C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+k})|^2. \quad (29)$$

Известно, что (см. стр. 35, [14]) модуль квадратичного характера $\tilde{\chi}$ должен иметь вид $\tilde{r} = \nu_1 \nu_2 \dots \nu_\kappa$ (здесь $\nu_1 = 2^t$, $t = \{0, 2, 3\}$ и $\nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_\kappa$ нечетные простые числа). Пусть

$$U_1 = \left\{ \nu_j \mid \nu_j \nmid \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_n < n+k} \Delta_{i_1 \dots i_n}, j \geq 2 \right\} \text{ и } U_2 = \{ \nu_j \mid \nu_j \notin U_1 \},$$

а также обозначим $u_i = \prod_{\nu_j \in U_i} \nu_j$, ($i = 1, 2$), из чего следует, что $\tilde{r} = u_1 u_2$ и

$$u_2 = \prod_{\nu_j \in U_2} \nu_j = \nu_1 \prod_{\nu_j \in U_2 \setminus \{\nu_1\}} \nu_j \leq 8 \left| \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_n < n+k} \Delta_{i_1 \dots i_n} \right| \ll B^{\lambda_1 n}, \text{ где } \lambda_1 = \frac{(n+k)!}{n!k!}.$$

Подобным способом, который был использован при доказательстве леммы 3.5.1 работы [4] нетрудно показать, что

$$\sum_{\substack{1 \leq h_1, \dots, h_n \leq \tilde{r} \\ (h_1, \dots, h_n, \tilde{r})=1}} |C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+1}) \dots C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+k})|^2 = \prod_{j=1}^{\kappa} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq h_1, \dots, h_n \leq \nu_j \\ (h_1, \dots, h_n, \nu_j)=1}} |C_{\nu_j}(\bar{h}_{n+1}) \dots C_{\nu_j}(\bar{h}_{n+k})|^2 \right\}. \quad (30)$$

Фиксируем $\nu_j \in U_1$ и рассмотрим соответствующую сумму в правой части равенства (30)

$$C_{\nu_j}(\bar{h}_i) = \sum'_{l \leq \nu_j} e\left(\frac{l \bar{h}_i}{\nu_j}\right) = \begin{cases} \varphi(\nu_j), & \text{если } \nu_j \mid \bar{h}_i, \\ -1, & \text{если } \nu_j \nmid \bar{h}_i, \end{cases} \quad (i = \overline{n+1, n+k}),$$

и существуют $(\nu_j - 1)^{n-k}$ значений (h_1, \dots, h_n) , для которых $\nu_j | \bar{h}_i$, $(i = \overline{n+1, n+k})$. Поэтому из (30) находим

$$\sum_{\substack{1 \leq h_1, \dots, h_n \leq \nu_j \\ (h_1, \dots, h_n, \nu_j) = 1}} |C_{\nu_j}(\bar{h}_{n+1}) \dots C_{\nu_j}(\bar{h}_{n+k})|^2 \leq \varphi^{n+k}(\nu_j) \quad (31)$$

для всех $\nu_j \in U_1$. Если $\nu_j \in U_2$, то очевидно, что сумма в левой части неравенства (31) не превосходит ν_j^{n+2k} .

Из (29)-(31) получим

$$\sum_{1 \leq b_1, \dots, b_n \leq \tilde{r}} |\mathcal{G}(1, \dots, n)|^2 \ll \prod_{\nu_j \in U_1} \varphi^{n+k}(\nu_j) \prod_{\nu_j \in U_2} \nu_j^{n+2k} \leq \tilde{r}^{n+k} u_2^k \ll \tilde{r}^{n+k} B^{nk\lambda_1}.$$

Последняя оценка показывает, что количество наборов $(b_1, \dots, b_n) \in [1, \tilde{r}]^n$, для которых $\mathcal{G}(1, \dots, n) \gg \tilde{r}^{\frac{nk+k}{2n}} B^{\frac{1}{2}nk\lambda_1}$ не превосходит $\tilde{r}^{\frac{n^2-k}{n}}$. Ясно, что $\mathcal{G}(1, \dots, n)$ зависит от классов вычетов по модулю \tilde{r} . Таким образом исключая не более, чем $\left(\frac{X}{\tilde{r}}\right)^n \tilde{r}^{\frac{n^2-k}{n}} = X^n \tilde{r}^{-\frac{k}{n}}$ наборов $(b_1, \dots, b_n) \in [1, X]^n$, имеем

$$\mathcal{G}(1, \dots, n) \ll \tilde{r}^{\frac{nk+k}{2n}} B^{\frac{1}{2}nk\lambda_1}. \quad (32)$$

Для остальных наборов чисел m_1, m_2, \dots из $\{1, 2, \dots, n+k\}$ функция $\mathcal{G}(m_1, m_2, \dots)$ оценивается аналогично и (32) остается в силе. \square

ЛЕММА 5.3. Для M_3 справедливо равенство

$$M_3 = \frac{N^k \tilde{r}^n}{|\bar{\Delta}| \varphi^{n+k}(\tilde{r})} \left(\sum_{\substack{q \leq Q/\tilde{r} \\ (\tilde{r}, q) = 1}} A(q) \right) \left[- \sum_{1 \leq j \leq n+k} \mathcal{G}(j) \mathcal{P}(j) + \sum_{1 \leq i < j \leq n+k} \mathcal{G}(i, j) \mathcal{P}(i, j) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n+k} \mathcal{G}(i_1, i_2, i_3) \mathcal{P}(i_1, i_2, i_3) + \dots + (-1)^{n+k} \mathcal{G}(1, \dots, n+k) \mathcal{P}(1, \dots, n+k) \right]. \quad (33)$$

Доказательство этой леммы аналогично лемме 3.7.3 работы [4].

Когда Q/\tilde{r} — "большое" сумма $\sum_{q \leq Q/\tilde{r}, (\tilde{r}, q) = 1} A(q)$ в (33) является достаточно длинной и в силу леммы 5.2 d) работы [12] мы можем представить ее в виде:

$$\sum_{q \leq Q/\tilde{r}, (\tilde{r}, q) = 1} A(q) = \prod_{p|\tilde{r}} s(p) + O\left(\tilde{r}Q^{-9/10}\right). \quad (34)$$

Обозначая через $A(\mathcal{G}, \mathcal{P})$ выражение, стоящее в квадратной скобке в (33) и используя (34), находим $M_3 = \frac{N^k \tilde{r}^n}{|\bar{\Delta}| \varphi^{n+k}(\tilde{r})} \left(\prod_{p|\tilde{r}} s(p) + O\left(\tilde{r}Q^{-9/10}\right) \right) A(\mathcal{G}, \mathcal{P})$. В силу (28) из леммы 5.2 а) имеем

$$M_3 = \frac{N^k \tilde{r}^n}{|\bar{\Delta}| \varphi^{n+k}(\tilde{r})} \prod_{p|\tilde{r}} s(p) A(\mathcal{G}, \mathcal{P}) + O\left(N^k \tilde{r}Q^{-9/10} (\ln \ln Q)^n\right). \quad (35)$$

С другой стороны, согласно лемме 5.1 е) работы [12] имеет место равенство

$$\prod_{p|\tilde{r}} s(p) = \tilde{r}^n \varphi^{-n-k}(\tilde{r}) \sum_{(\tilde{r})} 1. \quad (36)$$

Поэтому из леммы 5.1 и (24) получим

$$M_1 = \frac{N^k \tilde{r}^n}{|\bar{\Delta}| \varphi^{n+k}(\tilde{r})} \prod_{p|\tilde{r}} s(p) \sum_{(\tilde{r})} \int \dots \int_D dx_1 \dots dx_k + O\left(N^k Q^{-4/5}\right). \quad (37)$$

Из (35) и (37) следует

$$M_1 + M_3 = \frac{N^k \tilde{r}^n}{|\bar{\Delta}| \varphi^{n+k}(\tilde{r})} \prod_{p|\tilde{r}} s(p) \sum_{(\tilde{r})} \int \dots \int_D \prod_{j=1}^{n+k} \left(1 - \tilde{\chi}(l_j) (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) dx_1 \dots dx_k + O\left(N^k \tilde{r} Q^{-4/5}\right). \quad (38)$$

В силу (16) $Nx_j > L$ так, что

$$\prod_{j=1}^{n+k} \left(1 - \tilde{\chi}(l_j) (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) \geq \left(\left(1 - \tilde{\beta}\right) \ln T\right)^{n+k} = \omega^{n+k}, \quad (39)$$

где

$$\omega = \begin{cases} \left(1 - \tilde{\beta}\right) \ln T, & \text{если существует исключительный нуль } \tilde{\beta}, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, из (39), (36) и (38) приходим к заключению

$$M_1 + M_3 \geq \omega^{n+k} M_0 - O\left(N^k \tilde{r} Q^{-4/5}\right). \quad (40)$$

В случае, когда Q/\tilde{r} является “малым” для суммы $\sum_{q \leq Q/\tilde{r}, (\tilde{r}, q)=1} A(q)$ мы не можем получить оценку, типа (34). В этом случае ограничимся для оценки этой суммы леммой 5.2 b) работы [12] и тогда для M_3 из (33) получим следующую оценку $M_3 \ll N^k \tilde{r}^n \varphi^{-n-k}(\tilde{r}) A(\mathcal{G}, \mathcal{P})$. В силу леммы 5.2 b) и (28) имеем оценку $A(\mathcal{G}, \mathcal{P}) \ll B^{\frac{1}{2}nk\lambda_1} \tilde{r}^{\frac{nk+k}{2n}}$, справедливую за исключением $X^n \tilde{r}^{-\frac{k}{n}}$ наборов $(b_1, \dots, b_n) \in [1, X]^n$. Поэтому

$$M_3 \ll \frac{N^k \tilde{r}^n}{\varphi^{n+k}(\tilde{r})} B^{\frac{1}{2}nk\lambda_1} \tilde{r}^{\frac{nk+k}{2n}} (\ln \ln N)^{c_4} \ll N^k \tilde{r}^{\frac{k-nk}{2n}} B^{\frac{1}{2}nk\lambda_1} (\ln \ln N)^{c_5}. \quad (41)$$

ЛЕММА 5.4. Для всех $\vec{b} \in [1, X]^n$ имеет место оценка $M_2 \ll M_0 \omega^{n+k} \exp\left(-c_6 \delta^{-\frac{1}{2}}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Члены, содержащиеся в T_2 имеют вид

$$(-1)^m \prod_{j=1}^l G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) \prod_{j=l+1}^m \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^{n+k} C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j)$$

или

$$(-1)^m \prod_{j=1}^l G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) \prod_{j=l+1}^m C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^{n+k} \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j),$$

где $1 \leq l \leq m \leq n+k$. Эти выражения оцениваются одинаково, поэтому ограничимся рассмотрением первого из них. Его вклад в M_2 обозначим через $M_2(m, l)$, тогда из (22) находим

$$M_2(m, l) = (-1)^m \sum_{\substack{q \leq Q, \\ \tilde{r}|q}} \frac{1}{\varphi^{n+k}(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_{l+1}) \dots C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_m) C_q(\bar{h}_{m+1}) \dots C_q(\bar{h}_{n+k}) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{x_1} \dots \sum_{x_l} C_{\tilde{\chi}_1}(\bar{h}_1) \dots C_{\tilde{\chi}_l}(\bar{h}_l) \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} I_{\chi_1}(\bar{\eta}_1) \dots I_{\chi_l}(\bar{\eta}_l) \tilde{I}_{\chi_l}(\bar{\eta}_{l+1}) \dots \tilde{I}_{\chi_l}(\bar{\eta}_m) \times \\ & \quad \times I_{\chi_1}(\bar{\eta}_{m+1}) \dots I_{\chi_l}(\bar{\eta}_{n+k}) d\eta_1 \dots d\eta_n. \end{aligned}$$

Интеграл по \mathbb{R}^n обозначим через J , тогда в силу (5) и (14) имеем

$$J = \frac{N^k}{|\bar{\Delta}|} \sum'_{|\gamma_l| \leq T} \dots \sum'_{|\gamma_l| \leq T} \int \dots \int_D \prod_{j=1}^l (Nx_j)^{\rho_j-1} \prod_{j=l+1}^m (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 \dots dx_k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_2(m, l) &= -\frac{N^k}{|\bar{\Delta}|} \int \dots \int_D \prod_{j=l+1}^m (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} \left(\prod_{j=l+1}^m \sum_{r_j \leq Q} \sum_{\chi_j \pmod{r_j}} * \sum_{|\gamma_j| \leq T} (Nx_j)^{\rho_j-1} \right) \times \\ & \quad \times \sum_{\substack{q \leq Q \\ [\tilde{r}, r_1, \dots, r_l] | q}} \varphi^{-n-k}(q) Z(q; \bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_l, \tilde{\chi}_{l+1}, \dots, \tilde{\chi}_m, \chi_{m+1}^o, \dots, \chi_{n+k}^o) dx_1 \dots dx_k, \end{aligned}$$

где $\tilde{\chi}_{l+1} = \dots = \tilde{\chi}_m = \tilde{\chi}$ и $\chi_{m+1}^o = \dots = \chi_{n+k}^o = \chi_0$.

Так как $Nx_j \geq L \geq \sqrt{N}$, то в лемме 4.2 работы [4] заменяя ω^{n+1} на ω^{n+k} можно вычислить тройную сумму в скобках, а лемму 5.3 с) работы [12] можно применить для оценки последней суммы по q и тогда получим

$$M_2(m, l) \ll M_0 \left(\omega^{n+k} \exp \left(-c_6 \delta^{-1/2} \right) \right)^l \ll M_0 \left(\omega^{n+k} \exp \left(-c_6 \delta^{-1/2} \right) \right).$$

Собирая вклад всех таких слагаемых, получим утверждение леммы. \square

Теперь мы можем доказать лемму 2.2. Рассмотрим следующие три случая.

1-случай. Пусть не существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$, тогда отсутствует M_3 и из (23) за исключением не более чем $\ll X^n Q^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n, n+k}(X)$ справедлива оценка

$$I_1(\vec{b}) = M_1 + M_2 + O\left(N^k Q^{-1}\right) \gg N^k B^{-n} Q^{-k/16n(n+1)}.$$

2-случай. Если существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$ и $\tilde{r} \leq Q^{\lambda_2}$, $\lambda_2 = k(7(n-1)(n+k))^{-1}$. Тогда в силу леммы 5.4, (40) и из (23), (24) имеем

$$I_1(\vec{b}) \gg M_0 \left(1 - \exp \left(-c_6 \delta^{-1/2} \right) \right) \omega^{n+k} + O\left(N^k Q^{-\frac{4}{5} + \lambda_2}\right) \quad (42)$$

за исключением не более чем $\ll X^n Q^{-1}$ наборов $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n, n+k}(X)$ из них. Согласно неравенству (9) из работы [10], $\omega = \left(1 - \tilde{\beta} \right) \ln T \gg c_7 \left(\sqrt{\delta} Q^{\lambda_2/2} \ln Q \right)^{-1}$, поэтому, учитывая (25) из (42), при достаточно малом δ получим

$$I_1(\vec{b}) \gg N^k \left(B^n Q^{\frac{k}{16n(n+1)} + \frac{k}{14(n-1)}} \ln^{n+k} Q \right)^{-1} + O\left(N^k Q^{-\frac{4}{5} + \lambda_2}\right) \gg N^k Q^{-\left(\frac{k}{16n(n+1)} + \frac{k}{14(n-1)} + (n+k)\delta\right)}$$

за исключением не более чем $\ll X^n Q^{-k/16n(n+2)}$ наборов $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n, n+k}(X)$ из них.

3-случай. Существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$ и пусть $\tilde{r} > Q^{\lambda_2}$. В этом случае применим лемму 5.1, (41) и лемму 5.4 в (23) имеем

$$I_1(\vec{b}) = M_0 \left(1 + O\left(\omega^{n+k} \exp \left(-c_6 \delta^{-1/2} \right)\right) \right) + O\left(N^k Q^{-\frac{k^2}{14n(n+k)}}\right)$$

за исключением не более чем $X^n \tilde{r}^{-\frac{k}{n}} \leq X^n Q^{-\lambda_3}$, $\lambda_3 = k^2(7n(n-1)(n+k))^{-1}$ наборов $(b_1, \dots, b_n) \in [1, X]^n$ из них.

Как и в предыдущих двух случаях, требуемая нижняя оценка $I_1(\vec{b})$ следует из (25):

$$I_1(\vec{b}) \gg N^k B^{-n} Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}} - c_7 N^k Q^{-\frac{k^2}{14n(n+k)}} \gg N^k Q^{-\left(\frac{k}{16n(n+1)} + \frac{k}{14(n-1)} + (n+k)\delta\right)}. \quad (43)$$

Поэтому, на основании (43) и леммы 2.1 из (10) имеем следующую оценку:

$$I(\vec{b}) > I_1(\vec{b}) - |I_2(\vec{b})| > c_8 N^k Q^{-\left(\frac{k}{16n(n+1)} + \frac{k}{14(n-1)} + (n+k)\delta\right)} - N^k Q^{-\frac{k}{6(n-1)}} \gg N^k Q^{-\frac{k}{10(n-1)}}, \quad (44)$$

то есть оценка $I(\vec{b}) > 0$ справедлива для всех $(b_1, \dots, b_n) \in W_{n,n+k}(X)$ за исключением не более, чем $X^n Q^{-\frac{k}{7(n-1)}} + X^n Q^{-1} + X^n Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}} + X^n Q^{-\lambda_3} \leq X^{n-\varepsilon}$ наборов из них.

Таким образом, мы доказали лемму 2.2 и утверждение а) теоремы.

Теперь оценим, количество решений $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ системы (2). Известно, что в (9) суммирование ведётся по всем m_j для которых выполняются условия $L < m_1, \dots, m_{n+k} \leq N$ и $\sum_{j=1}^{n+k} a_{ij} m_j = b_i$ ($i = \overline{1, n}$). Тогда из (9) имеем

$$I(\vec{b}) \leq R(\vec{b}) \ln^{n+k} N + O\left(N^{\frac{k}{2}} \ln^n N\right).$$

Из этого неравенства и из неравенства (44) получим оценку $R(\vec{b}) \gg N^{k-\frac{k\delta}{10(n-1)}} \ln^{-n-k} N$ для всех (b_1, \dots, b_n) за исключением не более, чем $X^{n-\varepsilon}$ значений $1 \leq b_1, \dots, b_n \leq X$ из них. Учитывая, что $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2} \leq \sqrt{n}X$ и $N = 3(n!)^2 B^{2n-1} X \geq \frac{3(n!)^2 B^{2n-1} |\vec{b}|}{\sqrt{n}}$, отсюда получим утверждение б) теоремы.

6. Заключение

Таким образом доказали что система линейных диофантовых уравнений с целыми коэффициентами состоящая из s уравнений с m ($s < m \leq 2s$) неизвестными разрешима в простых числах с некоторыми исключениями. Получена оценка для исключительного множества и оценка снизу для числа решений рассматриваемой системы. Эта оценка не значительно отличается от предполагаемого главного члена при достаточно малом $\delta > 0$ и достаточно большом X . Полученные результаты дополняют соответствующие результаты Wu Fang [1], M.C.Liu, K.M.Tsang [2, 3] и И.Аллакова [4, 5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables. Acta Math.Sinica. 1957. № 7. pp. 102-121.
2. Liu M. C., Tsang K. M. On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach's problem, J. reine angew. Math. 1989. vol. 399. pp. 109-136.
3. Liu M. C., Tsang K. M. Small prime solutions of linear equations. Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York. 1989. pp. 595-624.
4. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. – Термез: Сурхон нашр. 2021. 160 с.

5. Аллаков И. Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах, Изв. вузов. Матем., 2006, № 9. с. 10-16.
6. Аллаков И., Исраилов М. И. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах. Докл. АН РУз. –Ташкент, 1992. - № 10-11. с. 12-15.
7. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел, Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1947, том 22, с. 3-179.
8. Abrayev V.Kh., Allakov I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. Uzbek Mathematical journal. Tashkent. 2020. № 3. pp. 16-24.
9. Аллаков И., Абраев Б.Х. Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами. Чебышевский сборник т.24 №2. 2023. с.15-37.
10. Аллаков И., Эрдонов Б.Х. Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел. Чебышевский сборник т.25 №3. 2024. с.11-36.
11. Allakov I., Erdonov B. On the simultaneous representation of three natural numbers by the sum of prime numbers. Bull. Inst. Math. 2025. Vol.8. No 2. pp. 1-23.
12. Эрдонов Б.Х. О сходимости сингулярного ряда в задаче о представлении натуральных чисел в виде суммы простых чисел. Научный вестник СамГУ, 2024. №5. с. 42-51.
13. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. Москва, Наука, 1983. 240 с.
14. Davenport H. Multiplicative number theory. Third edition. Springer. 2000. 177 p.
15. Аллаков И., Музропова Н., Джураева З. Об оценке суммы Раманауджана. Материалы международной конференции «Современные проблемы математики» посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана, Душанбе, 2023. с. 22-23.
16. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976 г. 543 с.

REFERENCES

1. Wu Fang. 1957. “On the solutions of the systems of linear equations with prime variables”, *Acta Math.Sinica.*, № 7. pp. 102-121.
2. Liu M. C., Tsang K. M. 1989. “On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach’s problem”, *J. reine angew. Math.*, vol. 399. pp. 109-136.
3. Liu M. C., Tsang K. M. 1989. “Small prime solutions of linear equations”, *Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York.*, pp. 595–624.
4. Allakov I. 2021. “Estimation of trigonometric sums and their applications to the solution of some additive problems in number theory”, *Termez, Surxon nashr.* 160 p.
5. Allakov I. 2006. “On conditions for the solvability of a system of linear Diophantine equations in prime numbers”, *Iz. VUZ. Mat.*, № 9. pp. 10–16.
6. Allakov I., Israilov M.I. 1992. “On the solvability of a system of linear equations in prime numbers”, *Dokl. AN RUz. Tashkent*, № 10-11. pp. 12–15.

7. Hua Lo-Ken. 1947. "Additive prime number theory", *Tr. Math. Institute named after V.A. Steklova*, vol.22. pp. 3–179.
8. Abrayev B.Kh., Allakov I. 2020. "On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers", *Uzbek Mathematical journal. Tashkent*, № 3. pp. 16–24.
9. Allakov I., Abrayev B.Kh. 2023. "On the exceptional set of one system of linear equations with prime numbers", *Chebyshevskii Sbornik*, vol.24, № 2. pp. 15–37.
10. Allakov I., Erdonov B.Kh. 2024. "On the simultaneous representation of numbers by the sum of five prime numbers", *Chebyshevskii Sbornik*, vol.25, № 3. pp. 11–36.
11. Allakov, I., Erdonov, B. 2025, "On the simultaneous representation of three natural numbers by the sum of prime numbers", *Bull. Inst. Math.*, Vol.8, № 2, pp. 1-23.
12. Erdonov B.Kh. 2024. "On the convergence of the singular series in the problem of representing natural numbers as a sum of prime numbers". *Scientific bulletin of SamSU*, № 5. pp. 42–51.
13. Karatsuba A.A. 1983. "Fundamentals of analytic number theory", *Moscow, Nauka*. 240 p.
14. Davenport H. 2000. "Multiplicative number theory. Third edition", *Springer*. 177 p.
15. Allakov I., Muzropova N., Juraeva Z. 2023. "On estimating the Ramanujan sum", *Proceedings of the international conference "Modern Problems of Mathematics" dedicated to the 50th anniversary of the A. Juraev Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Dushanbe*. pp. 22-23.
16. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. 1976. "Elements of the theory of functions and functional analysis", *Moscow, Nauka*. 543 p.

Получено: 14.10.2025

Принято в печать: 12.02.2026