ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 511.36

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОЧТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ РЯДОВ

В. Ю. Матвеев (г. Москва)

Аннотация

На кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел можно ввести топологию τ, рассматривая множество идеалов (m) в качестве полной системы окрестностей нуля аддитивной группы целых чисел. При этом операции сложения и умножения непрерывны и кольцо целых чисел с введенной топологией имеет структуру топологического кольца. Обозначим это кольцо $\mathbb{Z}_\tau$.

Бесконечная последовательность x_1, x_2, $\ldots$ целых чисел называется фундаментальной, если для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $m, n > \mathcal{N}$ справедливо сравнение $x_m \equiv x_n \pmod{k!}$.

Метрическое пространство $\mathbb{Z}_\tau$ не является полным. Например, последовательность $1!, 1!+2!, \ldots, 1!+2!+\ldots+n!, \ldots$ является фундаментальной, но не имеет предела в $\mathbb{Z}_\tau$. Для фундаментальных последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ рассмотрим последовательности $\{x_k+y_k\}$, $\{x_k-y_k\}$, $\{x_k \cdot y_k\}$. Эти последовательности также являются фундаментальными. Таким образом, фундаментальные последовательности элементов из кольца $\mathbb{Z}_\tau$ образуют кольцо.

Будем называть последовательность $c_1, c_2, \ldots$ нулевой последовательностью, если $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, где предел понимается в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$.

Назовем фундаментальные последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ эквивалентными, если их разность $\{x_k - y_k\}$ является нулевой последовательностью. Это свойство является рефлексивным, симметричным и транзитивным, то есть определяет отношение эквивалентности.

Полиадическим числом будем называть класс эквивалентных фундаментальных последовательностей из $\mathbb{Z}_\tau$.

Легко проверить, что если последовательность $\{x_k\}$ эквивалентна последовательности $\{u_k\}$, а последовательность $\{y_k\}$ эквивалентна $\{v_k\}$, то $\{x_k+y_k\}$ эквивалентна $\{u_k+v_k\}$, $\{x_k-y_k\}$ эквивалентна $\{u_k-v_k\}$, $\{x_k \cdot y_k\}$ эквивалентна $\{u_k \cdot v_k\}$. Поэтому на множестве полиадических чисел можно ввести операции сложения и умножения, что позволяет говорить о кольце $\mathfrak{G}$ целых полиадических чисел. Вложение кольца $\mathbb{Z}$ в $\mathfrak{G}$ осуществляется сопоставлением элементу $x \in \mathbb{Z}$ класса $\mathfrak{x}$ фундаментальных последовательностей, эквивалентных последовательности $x, x, x, \ldots$.

Так как $\mathbb{Z}_\tau$ — метрическое пространство, его пополнение приводит к топологическому пространству $\mathfrak{G}_\tau$.

Элементы $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_t$ имеют каноническое представление в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n!$$

где $a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ является прямым произведением колец $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i, при этом ряд $\mathfrak{a}$ сходится в любом $\mathbb{Z}_{p_i}$. Действительно, степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители, равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n — сумма цифр в p-ичном разложении числа n. Следовательно, для любого p_i при $n \to \infty$

$$|a_n \cdot n!|_{p_i} \to 0,$$

что является достаточным условием сходимости ряда $\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n!$ в $\mathbb{Z}_{p_i}$.

В работе исследуются арифметические свойства почти полиадических чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i \left(a_i + b_i\right) \ldots \left(a_i + (n-1)b_i\right), i = 1, ..., m,$$

где числа $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $(a_i, b_i) = 1$.

Вводятся понятия алгебраическое полиадическое число, трансцендентное полиадическое число, бесконечно трансцендентное полиадическое число, глобально трансцендентное полиадическое число, алгебраически зависимые полиадические числа, алгебраически независимые полиадические числа, бесконечно алгебраически независимые полиадические числа, глобально алгебраически независимые полиадические числа.

Доказана теорема о бесконечной алгебраической независимости почти полиадических чисел $\mathfrak{a}_i$, определенных равенствами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i \left(a_i + b_i\right) \ldots \left(a_i + (n-1)b_i\right) = \mathfrak{a}_i,$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $(a_i, b_i) = 1$, $i = 1, \ldots, m$.

$$\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_j}{b_j} \notin \mathbb{Z}, \quad i \neq j.$$

Для доказательства теоремы о бесконечной алгебраической независимости почти полиадических чисел использовалась теорема:

Пусть $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ входят в рассматриваемый подкласс F-рядов, составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$Y_i' = \sum_{j=1}^{m} B_{i,j}(z)Y_i,\ i = 1,\ldots,m,$ *и алгебраически независимы над* $\mathbb{Q}(z)$. *Пусть число* $\xi \in \mathbb{Z},\ \xi \neq 0$ *и отлично от особых точек системы*

$$Y_i' = \sum_{j=1}^{m} B_{i,j}(z)Y_i,\ i = 1,\ldots,m.$$

Тогда почти полиадические числа

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i\,(a_i + b_i)\ldots(a_i + (n-1)b_i) = \mathfrak{a}_i$$

бесконечно алгебраически независимы.,
которая получена с помощью модифицированного метода Зигеля — Шидловского для F-рядов, и теорема доказывающая алгебраическую независимость над $\mathbb{Q}(z)$ рядов $f_1(z),\ldots,f_m(z)$:

Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ *— различные рациональные числа, отличные от* 0 *и пусть* $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z},\ i \neq j,$ *. Тогда ряды* $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ *алгебраически независимы над* $\mathbb{Q}(z)$.,
которая имеет ту же схему доказательства, что и доказательства теорем В. Х. Салихова.

Ключевые слова: почти полиадические числа.

Библиография: 15 названий.

ALGEBRAIC INDEPENDENCE OF CERTAIN ALMOST POLYADIC SERIES

V. Yu. Matveev

Abstract

We study the arithmetic properties of almost polyadic numbers

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i\,(a_i + b_i)\ldots(a_i + (n-1)\,b_i)\,, i = 1, ..., m,$$

where the numbers $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $(a_i, b_i) = 1$.

Keywords: almost polyadic numbers.

Bibliography: 15 titles.

1. Почти полиадические числа

Напомним основные понятия теории полиадических чисел.

Элементы кольца целых полиадических чисел имеют каноническое представление в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \tag{1}$$

где $a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Кольцо целых полиадических чисел является прямым произведением колец целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i, при этом ряд $\mathfrak{a}$ сходится в любом кольце $\mathbb{Z}_{p_i}$. Действительно, степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители, равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n — сумма цифр в p-ичном разложении числа n. Следовательно, для любого p_i при $n \to \infty$

$$|a_n \cdot n!|_{p_i} \to 0,$$

что является достаточным условием сходимости ряда (1) в $\mathbb{Z}_{p_i}$, соответствующую сумму будем обозначать $a^{(p_i)}$.

Таким образом, бесконечный набор элементов $a^{(p_i)} \in \mathbb{Z}_{p_i}$, соответствующих всем простым числам p_i, можно рассматривать, как совокупность координат элемента $\mathfrak{a}$ кольца целых полиадических чисел, представленного в виде вектора. Поэтому для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ имеет в кольце $\mathbb{Z}_p$ координату $P(a^{(p)})$.

В работе [1] предложен следущий класс периодических полиадических чисел.

Назовем полиадическое число $\mathfrak{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ равно нулю, то есть для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a^{(p)}) = 0$.

Полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным полиадическим числом.* В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадическое число *глобально трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathfrak{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p.

Назовем полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ *алгебраически зависимыми*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m)$ равно нулю, то есть для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) = 0$.

Полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ называются *алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадические числа *бесконечно алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадические числа *глобально алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Рассмотрим почти полиадические числа вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i\,(a_i + b_i)\ldots(a_i + (n-1)\,b_i) = \mathfrak{a}_i, \tag{2}$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $(a_i, b_i) = 1$, $i = 1, \ldots, m$.

$$\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_j}{b_j} \notin \mathbb{Z}, \quad i \neq j$$

Термин почти полиадическое число использован для обозначения того случая, когда рассматриваемый ряд сходится во всех полях $\mathbb{Q}_p$, кроме быть может конечного их числа.

На почти полиадические числа переносятся все введенные выше понятия: алгебраическое полиадическое число, трансцендентное полиадическое число, бесконечно трансцендентное полиадическое число, глобально трансцендентное полиадическое число, алгебраически зависимые полиадические числа, алгебраически независимые полиадические числа, бесконечно алгебраически независимые полиадические числа, глобально алгебраически независимые полиадические числа.

2. Бесконечная алгебраическая независимость

Теорема 1. *Почти полиадические числа $\mathfrak{a}_i$, определенные равенствами* (2)*, бесконечно алгебраически независимы.*

Доказательство. Для доказательства используется модифицированный метод Зигеля — Шидловского для F–рядов [2].

Будем далее рассматривать ряды

$$f_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i\,(\lambda_i + 1)\ldots(\lambda_i + (n-1))\,(b_i z)^n, \tag{3}$$

где $\lambda_i = \frac{a_i}{b_i}$, $i = 1, \ldots, m$.

Тогда

$$\mathfrak{a}_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_i\,(a_i+b_i)\ldots(a_i+(n-1)b_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i\,(\lambda_i+1)\ldots(\lambda_i+(n-1))\,b_i^n = f_i(1).$$

Здесь мы ограничимся рассмотрением подкласса F-рядов, который состоит из рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n\,,$$

у которых $a_n \in \mathbb{Q}$ и $|a_n| \leq e^{c_1 n}$, $n = 0, 1, ...$, где c_1 — некоторая постоянная. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел d_n таких, что $d_n a_k \in \mathbb{Z},\ k = 0, \ldots, n$. При этом $d_n = d_{0,n} d^n,\ d_{0,n} \in \mathbb{N},\ n = 0, 1, \ldots,\ d \in \mathbb{N}$ и для любого n число $d_{0,n}$ делится только на простые числа p, для которых выполнено неравенство $p \leq c_2 n$. Предполагаем также, что степень, в которой число p входит в разложение числа $d_{0,n}$, обозначаемая $ord_p n$, удовлетворяет при всех n неравенству

$$ord_p n \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2}\right).$$

При выполнении этих условий говорим, что рассматриваемый ряд принадлежит классу $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d)$.

Сформулируем теорему из [3], которая будет применена к значениям рядов (3).

Пусть ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ принадлежат некоторому классу

$$F(\mathbb{Q}, C_1, C_2, C_3, d_0)\,.$$

Пусть $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$Y_i' = \sum_{j=1}^{m} B_{i,j}(z) Y_i,\ i = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

$B_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$. Пусть $T_0(z) \in \mathbb{Z}[z]$ и $T_0(z) \cdot B_{i,j}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $i, j = 1, \ldots, m$, причем пусть степень $T_0(z)$ — наименьшая возможная, а коэффиценты $T_0(z)$ — взаимно-простые целые числа.

Теорема 2. *Пусть $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ входят в рассматриваемый подкласс F-рядов, составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений (4) и алгебраически независимы над $\mathbb{Q}(z)$. Пусть число $\xi \in \mathbb{Z},\ \xi \neq 0$ и отлично от особых точек системы (4). Тогда почти полиадические числа (2) бесконечно алгебраически независимы.*

Таким образом, следует сначала проверить, что рассматриваемые ряды

$$f_i(z) = \sum \lambda_i (\lambda_i + 1) \dots (\lambda_i + (n-1)) (b_i z)^n =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_i (\lambda_i + 1) \dots (\lambda_i + n - 1)}{n!} n! \, (b_i z)^n$$

входят в класс F-рядов.

Все коэффициенты $a_n = \frac{\lambda_i(\lambda_i+1)\dots(\lambda_i+n-1)}{n!} \cdot b_i^n$ — рациональные числа.

При $n \to \infty$

$$|a_n| = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\lambda_1 - 1}{k}\right) b_i = e^{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{\lambda_i-1}{k}\right) + \ln b_i}$$

так как

$$\ln\left(1 + \frac{\lambda_i - 1}{k}\right) \sim \frac{\lambda_i - 1}{k}$$

при $k \to \infty$, так как

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_i - 1}{k} = (\lambda_i - 1) \ln n + C + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

мы получаем, что с некоторым C_1 выполняется неравенство $|a_n| \leqslant e^{C_1 n}$.

Так как $\lambda_i = \frac{a_i}{b_i}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{N}$, $d_n = d_{0,n} \cdot b_i^n$, то есть $d = b_i$, поэтому для всех рядов сразу годится $d =$ Н.О.К. $(b_1, \dots, b_m)$.

Далее, знаменатель дроби

$$\frac{a_i (a_i + b_i) \dots (a_i + b_i(n-1))}{n!}$$

делится только на простые числа $p \leqslant n$, то есть для всех рядов $C_2 = 1$. Аналогично получаем, что с некоторым C_3

$$ord_p \left(\frac{a_i (a_i + b_i) \dots (a_i + b_i(n-1))}{n!} \right) \leqslant C_3 \left(\frac{n}{p^2} + \frac{\ln n}{\ln p} \right)$$

Таким образом, ряды $f_i(z)$ входят в класс $F(\mathbb{Q}, C_1, C_2, C_3, d)$.

Легко проверить, что ряды (3) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$y_i' = \frac{1 - a_i z}{b_i z^2} y_i - \frac{\lambda_i}{z}, i = 1, \dots, m. \tag{5}$$

Для доказательства теоремы 1 осталось доказать алгебраическую независимость над $\mathbb{Q}(z)$ рядов $f_1(z), \dots, f_m(z)$. Она следует из доказываемой ниже теоремы 3. Доказательство теоремы 3 имеет ту же схему, что и доказательства теорем В. Х. Салихова [5], (см. также [4], стр. 198, 199).

Теорема 3. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – различные рациональные числа, отличные от 0 и пусть $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$, $i \neq j$, . Тогда ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}(z)$.*

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

Лемма 1. *Уравнение $y' = \frac{1-az}{bz^2}y - \frac{\lambda}{z}$ не имеет решений, которые являются алгебраическими функциями от z.*

Доказательство. Предположим противное, что уравнение

$$y' = \frac{1-az}{bz^2}y - \frac{\lambda}{z} \tag{6}$$

имеет решения, которые являются алгебраическими функциями от z.

Известно, что алгебраическая функция в комплексной области допускает разложение в окрестности 0 вида

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{r_n}, \tag{7}$$

где $r_0, r_1, \ldots$ – возрастающая последовательность рациональных чисел с одним и тем же знаменателем.

Тогда

$$y' \cdot bz^2 = (1-az)y - az,$$

удовлетворяет уравнению (7).

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} r_k a_k z^{r_k - 1}$$

$$bz^2 y' = \sum_{k=0}^{\infty} r_k a_k b z^{r_k + 1}$$

где r_k — неотрицательные рациональные числа с одинаковым знаменателем.

Сравнивая наименьшие степени z в левой и правой частях получим что в правой части $r_0 + 1 \geqslant 1$

$$(1-az)\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{r_k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{r_k} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k a z^{r_k+1} - az$$

в правой части либо r_0, либо 1.

Если $r_0 \neq 1$, то наименьшая степень в правой части меньше, чем в левой части то есть $r_0 = 1$ а $a_0 = a$.

При $r_0 = 1$ имеем

$$y = az + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{r_k}$$

$$y' = a + \sum_{k=1}^{\infty} r_k a_k z^{r_k - 1}$$

$$bz^2 y' = abz^2 + \sum_{k=1}^{\infty} ba_k r_k z^{r_k+1} = (1 - az)\left(az + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{r_k}\right) - az =$$

$$= az + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{r_k} - a^2 z^2 - \sum_{k=1}^{\infty} aa_k z^{r_k+1} - az$$

$$abz^2 + a^2 z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} ba_k r_k z^{r_k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{r_k} - \sum_{k=1}^{\infty} aa_k z^{r_k+1}$$

$$a(b+a)z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} ba_k r_k z^{r_k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{r_k} - \sum_{k=1}^{\infty} aa_k z^{r_k+1}$$

Наименьшая степень правой части в которой входит z меньше, чем в левой части, то есть $r_1 = 2$, что противоречит сделанному предположению. □

Лемма 2. *Пусть ряды y_i удовлетворяют системе уравнений* (5) *где λ_i, $i = 1, \ldots, m$ — попарно различные числа, отличные от* 0. *Тогда ряды $y_1, \ldots, y_m$ и* 1 *линейно независимы над $\mathbb{Q}(z)$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть размерность векторного простванства над $\mathbb{Q}(z)$, порожденного этими рядами, равна k, $k < m$. Так как из леммы 1 следует, что среди рядов $y_1, \ldots, y_m$ нет рациональных функций, $k \geqslant 2$. Предположим, что $1, y_1, \ldots, y_{k-1}$ линейно независимы, а $1, y_1, \ldots, y_k$ — линейно зависимы и имеет место равенство

$$q_0 + q_1 y_1 + \ldots + q_k y_k = 0, \quad \text{где} \quad q_i \in \mathbb{Q}(z), i = 0, 1, \ldots, k. \tag{8}$$

Заметим, что по выбору k функция $q_k \neq 0$. Кроме того, так как среди $y_1, \ldots, y_k$ нет рациональных функций, существует номер l, $1 \leqslant l \leqslant k-1$ такой, что $q_l \neq 0$.

Кроме того, так как среди $y_1, \ldots, y_k$ нет рациональных функций, существует номер l, $1 \leqslant l \leqslant k-1$ такой, что $q_l \neq 0$.

Продифференцируем равенство (8), используя систему (5):

$$q_0{}' + q_1{}' y_1 + q_1\left(1 - \frac{a_1 z}{b_1 z^2} y_1 - \frac{\lambda_1}{z}\right) + \ldots +$$

$$+ q_l{}' y_l + q_l\left(1 - \frac{a_l z}{b_l z^2} y_l - \frac{\lambda_l}{z}\right) + \ldots +$$

$$+ q_k{}' y_k + q_k\left(1 - \frac{a_k z}{b_k z^2} y_k - \frac{\lambda_k}{z}\right) = 0$$

или

$$\begin{aligned} &{q_0}' + \frac{1}{z}(q_1 + \ldots + q_k) + \left({q_1}' + q_1\frac{1-a_1z}{b_1z^2}\right)y_1 + \ldots + \\ &+ \left({q_l}' + q_l\frac{1-a_lz}{b_lz^2}\right)y_l + \ldots + \left({q_k}' + q_k\frac{1-a_kz}{b_kz^2}\right)y_k = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\frac{{q_l}'}{q_l} + \frac{1-a_lz}{b_lz^2} = \frac{{q_k}'}{q_k} + \frac{1-a_kz}{b_kz^2}, \tag{10}$$

иначе бы из этих двух уравнений можно было бы исключить переменную y_k и получить нетривиальное уравнение, связывающие над $\mathbb{Q}(z)$ ряды $1, y_1, \ldots, y_{k-1}$. Равенство (10) преобразуем к виду

$$\frac{{q_l}'}{q_l} - \frac{{q_k}'}{q_k} = \frac{\lambda_l - \lambda_k}{z} + \frac{1}{b_kz^2} - \frac{1}{b_lz^2},$$

$$\frac{{q_l}'}{q_l} - \frac{{q_k}'}{q_k} = \frac{1}{b_kz^2} - \frac{1}{b_lz^2} + \frac{\lambda_l}{z} - \frac{\lambda_k}{z},$$

$$(\ln l)' - (\ln k)' = \left(-\frac{1}{b_kz}\right)' + \left(\frac{1}{b_lz}\right)' + \left(\ln z^{\lambda_l}\right)' - \left(\ln z^{\lambda_k}\right)',$$

$$\left(\ln\frac{q_l}{q_k}\right)' = \left(\frac{1}{b_lz} - \frac{1}{b_kz}\right)' + \left(\ln z^{\lambda_l-\lambda_k}\right)',$$

$$\ln\frac{q_l}{q_k} = \frac{1}{b_lz} - \frac{1}{b_kz} + \ln z^{\lambda_l-\lambda_k} + \ln C,$$

$$\frac{q_l}{q_k} = e^{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{b_l}-\frac{1}{b_k}\right)} \cdot z^{\lambda_l-\lambda_k} \cdot C.$$

Если $b_l \neq b_k$, то это не рациональная функция. Если $b_l = b_k$, то так как $\lambda_l - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, правая часть этого равенства также не является рациональной функцией и не может быть равна $\frac{q_l}{q_k}$. Лемма 2 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы по индукции. Пусть $m > 1$, пусть ряды

$$f_1 = f(\lambda_1 z), \ldots, f_m = f(\alpha_m z) \tag{11}$$

алгебраически зависимы над $\mathbb{Q}(z)$, а число l таково, что любые $l-1$ среди этих рядов алгебраически независимы, но существуют l рядов таких, что они алгебраически зависимы. Так как нумерация рядов (11) в нашем распоряжении, можно считать, что $f_1, \ldots, f_{l-1}$ алгебраически независимы, а $f_1, \ldots, f_l$ алгебраически зависимы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений которой удовлетворяют ряды $f_1, \ldots, f_l$

$$ {w_i}' = \frac{1-a_iz}{b_iz^2}w_i - \frac{\lambda_i}{z}, \quad i = 1, \ldots, l \tag{12}$$

и соответствующий системе (12) дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{1 - a_i z}{b_i z^2} w_i - \frac{\lambda_i}{z} \right) \frac{\partial}{\partial w_i} \tag{13}$$

Пусть $P = P(z, w_1, \ldots, w_l) \in \mathbb{Q}[z, w_1, \ldots, w_l]$ отличный от тождественного нуля и неприводимый многочлен такой, что

$$P(z, f_1, \ldots, f_l) = 0. \tag{14}$$

Применяя лемму 4 из книги [4] (глава 4, стр. 161–162) получаем, что с некоторым $Q(z) \in \mathbb{Q}(z)$ выполнено равенство многочленов из $\mathbb{Q}[z, w_1, \ldots, w_l]$

$$DP = QP. \tag{15}$$

Пусть степень многочлена P по совокупности переменных $w_1, \ldots, w_l$ равна s. Представим многочлен P в виде

$$P = \sum_{k_1 + \ldots + k_l \leqslant s} P_{\overline{k}} \cdot {w_1}^{k_1} \ldots {w_l}^{k_l}, \tag{16}$$

где $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_l)$, $P_{\overline{k}} \in \mathbb{Q}[z]$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, l$. Из (12) – (16) следует, что

$$D \left(\sum_{k_1 + \ldots + k_l \leqslant s} P_{\overline{k}} \, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l} \right) = Q \left(\sum_{k_1 + \ldots + k_l \leqslant s} P_{\overline{k}} \, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l} \right),$$

откуда

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1 + \ldots + k_l \leqslant s} \left(P'_{\overline{k}} + \sum_{i=1}^{l} P_{\overline{k}} \, \left(\frac{b_i k_i {w_1}^{k_1} \ldots {w_l}^{k_l}}{a_i z^2} - \frac{k}{z} w_1^{k_1} \ldots w_i^{k_{i-1}} \ldots w_l^{k_l} \right) \right) = \\ &= \sum_{k_1 + \ldots + k_l \leqslant s} Q P_{\overline{k}} \, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l}. \end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим произвольный отличный от нуля член многочлена P, имеющий наибольшую степень s по совокупности переменных $w_1, \ldots, w_l$. Пусть он имеет вид $P_{\overline{r}} \, w_1^{r_1} \ldots w_l^{r_l}$, где $r_1 + \ldots + r_l = s$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_l)$, $P_{\overline{r}} \neq 0$.

Из (17) следует, что $P_{\overline{r}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} r_i \left(\frac{1 - a_i z}{b_i z^2} \right) \right) y. \tag{18}$$

Аналогичное равенство с заменой r_i на t_i выполняется для любого коэффициента $P_{\overline{t}}$ с индексом $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_l)$, удовлетворяющим условию $t_1 + \ldots + t_l = s$.

Пусть j выбрано так, что $r_j > 0$ и пусть $P_{\overline{k}}$ – коэффициент многочлена P с индексом $\overline{k} = (k_1, \dots, k_l)$, для которого выполнены равенства: $k_i = r_i$, $i \neq j$, $k_j = r_j - 1$. Из (17) следует, что

$$P_{\overline{k}}{}' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i \left(\frac{1 - a_i z}{b_i z^2}\right)\right) P_{\overline{k}} + \sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \frac{\lambda_j}{z} P_{\overline{k}}, \tag{19}$$

где

$$\overline{k}_j = (k_1, \dots, k_{j-1}, k_j + 1, k_{j+1}, \dots, k_l) \tag{20}$$

Рассмотрим ряд

$$\Phi = \overline{\Phi}(z) = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) P_{\overline{k}_j} f_j \tag{21}$$

и вычислим, используя (18), (21) (так как для $P_{\overline{k}_j}$ сумма индексов равна s)

$$\begin{aligned} \Phi' = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left(P'_{\overline{k_j}} f_j + P_{\overline{k_j}} f_j{}'\right) = \\ = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left(f_j \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i \left(\frac{1 - a_i z}{b_i z^2}\right) - \left(\frac{1 - a_j z}{b_j z^2}\right)\right) P_{\overline{k}_j} + \right. \\ \left. + P_{\overline{k}_j} \left(\frac{1 - a_j z}{b_j z^2} f_j\right) - \frac{\lambda_j}{z} P_{\overline{k}_j}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\Phi' = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i \left(\frac{1 - a_i z}{b_i z^2}\right)\right) P_{\overline{k}_j} f_j + \sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \frac{\lambda_j}{z} P_{\overline{k}_j}$$

Из уравнений (19), (22) следует, что

$$P_{\overline{k}}{}' - \Phi' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i \left(\frac{1 - a_i z}{b_i z^2}\right)\right) (P_{\overline{k}} - \Phi). \tag{23}$$

Обозначим $Y_{\overline{k}} = P_{\overline{k}} - \Phi$. Пусть

$$w = \frac{Y_{\overline{k}}}{P_{\overline{k}_j}},$$

где $P_{\overline{k}_j} = P_{\overline{r}} \neq 0$ по определению $\overline{k}_j$. Тогда согласно (18), (23)

$$\frac{w'}{w} = \frac{Y'_{\overline{k}}}{Y_{\overline{k}}} - \frac{P'_{\overline{k}_j}}{P_{\overline{k}_j}} =$$

$$= \left(Q - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l} k_i \left(\frac{1 - a_i z}{b_i z^2}\right)\right) - \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i \left(\frac{1 - a_i z}{b_i z^2}\right) - \left(\frac{1 - a_j z}{b_j z^2}\right)\right) = \frac{1 - a_j z}{b_j z^2}.$$

Следовательно,

$$w' = \frac{1 - a_j z}{b_j z^2} w. \tag{24}$$

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned}
\Omega &= f_j - \frac{1}{k_j+1} w = f_j - \frac{1}{k_j+1}\left(\frac{P_{\overline{k}} - \Phi}{P_{\overline{r}}}\right) = \\
&= \frac{1}{(k_j+1)\,P_{\overline{r}}}\left(P_{\overline{r}} {f_j}^{(k_j+1)} - P_{\overline{k}} + \Phi\right) = \\
&= \frac{1}{(k_j+1)\,P_{\overline{r}}}\left(P_{\overline{r}} {f_j}^{(k_j+1)} - P_{\overline{k}} + \sum_{i=1}^{l} (k_i+1)\,P_{\overline{k}_i} \cdot f_i\right) = \\
&= -\frac{1}{(k_j+1)\,P_{\overline{r}}}\left(P_{\overline{k}} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{l} (k_i+1)\,P_{\overline{k}_i} f_i\right),
\end{aligned} \tag{25}$$

так как $\overline{r} = \overline{k}_j$, ввиду определения $\overline{k}$ и равенства (20).

Поскольку, ввиду (12) и (24)

$$\begin{aligned}
{f_j}' &= \frac{1 - a_j z}{b_j z^2} f_j - \frac{\lambda_j}{z}, \\
w' &= \frac{1 - a_j z}{b_j z^2} w, \\
\frac{w'}{k_j+1} &= \frac{w\,(1 - a_j z)}{b_j z^2\,(k_j+1)},
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
\Omega' &= \left(f_j - \frac{1}{k_j+1} w\right)' = f_j' - \frac{1}{k_j+1} \cdot \left(\frac{1 - a_j z}{b_j z^2}\right) w = \\
&= \frac{1 - a_j z}{b_j z^2} f_j - \frac{\lambda_j}{z} - \left(\frac{1 - a_j z}{b_j z^2}\right) \cdot \frac{w}{k_j+1} = \\
&= \frac{1 - a_j z}{b_j z^2}\left(f_j - \frac{w}{k_j+1}\right) - \frac{\lambda_j}{z},
\end{aligned}$$

т.е. Ω является решением того же уравнения, что и f_j, но равенство (25) означает, что ряды $\Omega, 1, f_1, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, \ldots, f_l$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}(z)$. Но это противоречит лемме 2. Теорема доказана. □

□

3. Заключение

Полученные результаты продолжают исследования арифметических свойств полиадических и почти полиадических чисел проведенные в работах автора и В. Г. Чирского.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика. 2014. Т. 439, № 6. С. 677–679.

2. Bertrand D., Chirskii V. G, Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 2004. Vol. (6) 13, no. 2. P. 241–260.

3. В. Г. Чирский Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 254–264.

4. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: "Наука". 1987. 417 с.

5. Салихов В. Х. Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 1. С. 29–40.

6. Чирский. В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 2. С. 123–127.

7. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита-Паде обобщённых гипергеометрических функций // Мат. сборник. 1994. Т. 185, № 10. С. 39–72.

8. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского Университета., Серия 1: Математика. Механика. 2015. № 1. С. 59–61.

9. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука. 1971.

10. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука. 1984.

11. Новоселов Е. В. Топологическая теория делимости целых чисел // Учен. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та 1960. № 3. С. 3–23.

12. Чирский В. Г., Шакиров Р. Ф. О представлении натуральных чисел с использованием нескольких оснований // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, № 1. С. 86–93.

13. Dimitrov V. S., Jullien G. A. and Miller W. C. An Algorithm for Modular Exponentiation // Inform. Process. Lett. 1998. Vol. 66, no. 3, pp. 155–159.

14. Матвеев В. Ю., Чирский В. Г. О ряде из произведений членов арифметической прогрессии // Преподаватель XXI век. 2013. № 4, ч. 2. С. 249–254.

15. Матвеев В. Ю. О значениях некоторого ряда в полиадических точках, хорошо приближаемых натуральными числами // Преподаватель XXI век. 2013. № 4, ч. 2. С. 255–259.

REFERENCES

1. Chirskii, V. G. 2014, ”The arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients.”, *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 439, № 6, pp. 677 – 679. (Russian)

2. Bertrand, D., Chirskii, V. G. & Yebbou, J. 2004, ”Effective estimates for global relations on Euler-type series”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, vol. (6) 13, № 2, pp. 241 – 260.

3. Chirskii, V. G. 2015, "The arithmetic properties of polyadic integers" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 1(53), pp. 254 – 264. (Russian)

4. Shidlovskii, A. B. 1987, "Transtsendentnye chisla." [Transcendental numbers] *“Nauka”, Moscow*, 448 pp. (Russian)

5. Salihov, V. H. 1973, "The algebraic independence of the values of E-functions that satisfy first order linear differential equations" , *Mat. Zametki*, vol. 13, № 1, pp. 29—40. (Russian)

6. Chirskii, V. G. 1990, "Global relations" , *Mat. Zametki*, vol. 48, no. 2, pp. 123–127, 160 (Russian); translation in *Math. Notes*, vol. 48, no. 1-2, pp. 795–798.

7. Nesterenko, Yu. V. 1994, "Pade-Hermite approximants of generalized hypergeometric functions" , *Mat. Sb.* vol. 185, no. 10, pp. 39–72. (Russian); translation in *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, vol. 83 (1995), no. 1, pp. 189–219.

8. Chirskii, V. G. 2015, "On the arithmetic properties of Euler’s series" , *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* № 1, pp. 59–61. (Russian)

9. Postnikov, A. G. 1971, "Vvedenie v analiticheskuyu teoriyu chisel" , [Introduction to analytic number theory] *Izdat. “Nauka”, Moscow*, 416 pp. (Russian)

10. Pontryagin, L. S. 1984, "Nepreryvnye gruppy" , [Continuous groups] Fourth edition. *“Nauka”, Moscow*, 520 pp. (Russian)

11. Novoselov, E. V. 1960, "The topological theory of divisibility of integers" , *Scientists. Rec. Elabuzh. state. ped. Inst.* № 3, pp. 3–23. (Russian)

12. Chirskii, V. G. & Shakirov, R. F. 2013, "On the representation of positive integers using a number system of several bases" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 14, no. 1(45), 86–93. (Russian)

13. Dimitrov, V. S., Jullien, G. A. & Miller, W. C. 1998, "An Algorithm for Modular Exponentiation" , *Inform. Process. Lett.*, vol. 66, no. 3, pp. 155–159.

14. Matveev, V. Yu. & Chirskii, V. G. 2013, "On series of product by members of the arithmetic progression" , *Teacher XXI Century*, № 4, part. 2. pp. 249–254. (Russian)

15. Matveev, V. Yu. 2013, The values of a certain series of points in polyadic, closely approximated the natural numbers // *Teacher XXI Century*, № 4, part. 2. pp. 255–259. (Russian)

Получено 15.06.2015