ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 511.361

О СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

П. Л. Иванков(г. Москва)
ivankovpl@mail.ru

Аннотация

В работе рассматриваются обобщенные гипергеометрические функции и их производные (см. (2) и (3)). Изучение арифметической природы значений таких функций обычно начинается с построения функциональной линейной приближающей формы, имеющей достаточно высокий порядок нуля в начале координат. Если параметры изучаемых функций (в данном случае это числа (1)) рациональны, то построение такой формы можно осуществить с помощью принципа Дирихле. Дальнейшие рассуждения опираются на использование построенной формы, а вся схема получила название метода Зигеля, см. [1] и [2].

Если некоторые из чисел (1) иррациональны, то функции (2) и (3) не сводятся к так называемым E-функциям и применить метод Зигеля (в его классической форме) не удается, причем схема не срабатывает в самом начале: невозможно с помощью принципа Дирихле построить первую приближающую линейную функциональную форму (в ходе рассуждений по методу Зигеля используется целая совокупность таких форм).

Было замечено, что в некоторых случаях первую приближающую форму можно построить эффективно (см., например, [3] и [4]). Имея в своем распоряжении такую форму можно, рассуждая по схеме Зигеля (или используя специальные свойства эффективно построенной линейной формы), получить требуемые результаты. Эти результаты в смысле общности обычно значительно уступают тем, которые могут быть получены методом Зигеля, однако у метода, основанного на применении эффективных конструкций, есть и свои достоинства. Одно из них состоит в том, что этот метод во многих случаях применим и тогда, когда некоторые из параметров (1) иррациональны. Другим достоинством является бóльшая точность оценок (если речь идет, например, об оценке мер линейной назависимости), получаемых этим методом.

Все вышесказанное относится к случаю, когда рассматриваемые функции не продифференцированы по параметру. Применение метода Зигеля для продифференцированных по параметру функций (таких, например, как функции (4) и (5)) возможно, и оно было фактически осуществлено в ряде работ; см. замечания к седьмой главе книги А. Б. Шидловского [5]. Но по-прежнему здесь требуется рациональность параметров изучаемых функций, а получаемые количественные результаты недостаточно точны.

Проведенные исследования показывают, что использование совместных приближений вместо построения линейной приближающей формы практически всегда дает лучшие результаты. Поэтому, хотя появление (относительно недавно) эффективных конструкций линейных приближающих форм для продифференцированных по параметру гипергеометрических функций и позволило решить ряд относящихся сюда задач, основные новые результаты были получены именно с помощью совместных приближений, которые также могут быть построены эффективно.

В настоящей работе предлагается новая эффективная конструкция совместных приближений для продифференцированных по параметру гипергеометрических функций в однородном случае. Относительно возможных приложений этой конструкции даются лишь краткие указания: можно получить результаты о линейной независимости значений функций вида (5) в случае иррациональности некоторых из чисел (1); можно также уточнить некоторые из относящихся сюда количественных результатов.

Ключевые слова: обобщенные гипергеометрические функции, иррациональные параметры, дифференцирование по параметру, оценки линейных форм.

Библиография: 15 названий.

ON SIMULTANEOUS APPROXIMATIONS

P. L. Ivankov(Moscow)

Abstract

In this paper we consider hypergeometric functions and their derivatives (see (2) and (3)). One begins the investigation of arithmetic nature of the values of such functions with the construction of functional linear approximating form having sufficiently high order of zero at the origin. If the parameters of functions under consideration (in our case these are numbers (1)) are rational the construction of such a form can be fulfilled by means of the Dirichlet principle. Further reasoning is based on the employment of the constructed form and the whole scheme is called Siegel's method, see [1] and [2]. If some of the numbers (1) are irrational the functions (2) and (3) cannot be reduced to the so called E-functions and it is impossible to use Siegel's method (in its classic form) for such functions: the scheme doesn't work at the very beginning of reasoning for we cannot use the Dirichlet principle for the construction of the first approximating linear functional form (in the process of reasoning by Siegel's method we get several such forms). It was noticed that in some cases the first approximating form can be constructed effectively (see for example [3] and [4]). Having at one's disposal such a form one can reason as in Siegel's method (or it is possible in some cases to use special properties of the effectively constructed linear form) and receive required results. These results are not so general as those received by Siegel's method but the method based on effectively constructed approximating form has its own advantages. One of them consists in the possibility of its application also in case when some of the parameters (1) are irrational. The other advantage is the more precise estimates (if we consider for instance the measure of linear independence) that can be obtained by this method.

The above concerns the case when the functions under consideration are not differentiated with respect to parameter. Application of Siegel's method for the differentiated with respect to parameter functions (for example such functions as (4) and (5)) is possible also and it has been in fact fulfilled in a series of works; see the remarks to chapter 7 of the book by A.B.Shidlovskii [5]. But as before the parameters of the functions under consideration must be rational and the obtained results are not sufficiently precise.

The performed investigations show that the employment of simultaneous approximations instead of construction of linear approximating form almost always gives better results. For that reason the main new results concerning differentiated with respect to parameter hypergeometric functions have been obtained exactly by means of the effective constructions of simultaneous approximations although the appearance (comparatively recently) of effective constructions of linear approximating forms for such functions did make it possible to solve some related problems.

In this paper we propose a new effective construction of simultaneous approximations for the differentiated with respect to parameter hypergeometric functions in homogeneous case. On possible applications of this construction we give only brief instructions: one can obtain some results on linear independence of the values of functions of the type (5) in case of irrationality of some of the numbers (1); it is possible also to improve some of the related quantitative results.

Keywords: generalized hypergeometric functions, differentiation with respect to parameter, estimates of linear forms.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

В работе рассматриваются обобщенные гипергеометрические функции и их производные (см. (2) и (3)). Изучение арифметической природы значений таких функций обычно начинается с построения функциональной линейной приближающей формы, имеющей достаточно высокий порядок нуля в начале координат. Если параметры изучаемых функций (в данном случае это числа (1)) рациональны, то построение такой формы можно осуществить с помощью принципа Дирихле. Дальнейшие рассуждения опираются на использование построенной формы, а вся схема получила название метода Зигеля, см. [1] и [2].

Если некоторые из чисел (1) иррациональны, то функции (2) и (3) не сводятся к так называемым E-функциям и применить метод Зигеля (в его классической форме) не удается, причем схема не срабатывает в самом начале:

невозможно с помощью принципа Дирихле построить первую приближающую линейную функциональную форму (в ходе рассуждений по методу Зигеля используется целая совокупность таких форм).

Было замечено, что в некоторых случаях первую приближающую форму можно построить эффективно (см., например, [3] и [4]). Имея в своем распоряжении такую форму можно, рассуждая по схеме Зигеля (или используя специальные свойства эффективно построенной линейной формы), получить требуемые результаты. Эти результаты в смысле общности обычно значительно уступают тем, которые могут быть получены методом Зигеля, однако у метода, основанного на применении эффективных конструкций, есть и свои достоинства. Одно из них состоит в том, что этот метод во многих случаях применим и тогда, когда некоторые из параметров (1) иррациональны. Другим достоинством является бóльшая точность оценок (если речь идет, например, об оценке мер линейной назависимости), получаемых этим методом.

Все вышесказанное относится к случаю, когда рассматриваемые функции не продифференцированы по параметру. Применение метода Зигеля для продифференцированных по параметру функций (таких, например, как функции (4) и (5)) возможно, и оно было фактически осуществлено в ряде работ; см. замечания к седьмой главе книги А. Б. Шидловского [5]. Но по-прежнему здесь требуется рациональность параметров изучаемых функций, а получаемые количественные результаты недостаточно точны.

Проведенные исследования показывают, что использование совместных приближений вместо построения линейной приближающей формы практически всегда дает лучшие результаты. Поэтому, хотя появление (относительно недавно) эффективных конструкций линейных приближающих форм для продифференцированных по параметру гипергеометрических функций и позволило решить ряд относящихся сюда задач, основные новые результаты были получены именно с помощью совместных приближений, которые также могут быть построены эффективно.

В настоящей работе предлагается новая эффективная конструкция совместных приближений для продифференцированных по параметру гипергеометрических функций в однородном случае. Относительно возможных приложений этой конструкции даются лишь краткие указания: можно получить результаты о линейной независимости значений функций вида (5) в случае иррациональности некоторых из чисел (1); можно также уточнить некоторые из относящихся сюда количественных результатов.

2. Основной результат

Пусть

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r,\ \beta_1, \ldots, \beta_m,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_t \tag{1}$$

— комплексные числа, и пусть

$$a(x) = (x+\alpha_1)\dots(x+\alpha_r),\ b(x) = (x+\beta_1)\dots(x+\beta_m)\,,$$

причем

$$a(x)b(x)(x+\lambda_1)\dots(x+\lambda_t) \neq 0 \ \text{ при } \ x = 1, 2, \dots\ .$$

Рассмотрим обобщенные гипергеометрические функции

$$F_{k0j}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)(x+\lambda_k)} \tag{2}$$

и

$$\tilde{F}_{k0j}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)(x+\lambda_k)}{b(x)}\,, \tag{3}$$

где $j = 1, \dots, u$; $u = m+1$ для функций (2) и $u = m$ для функций (3). После дифференцирования по параметру λ_k получим функции

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{d^{\,l_k}}{d\,\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x+\lambda_k} \tag{4}$$

и

$$\tilde{F}_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{d^{\,l_k}}{d\,\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}(x+\lambda_k)\,, \tag{5}$$

где $k = 1, \dots, t$, $l_k = 0, \dots, \tau_k - 1$, $j = 1, \dots, u$; $\tau_1, \dots, \tau_t$ — натуральные числа.

Если числа (1) рациональны, то для исследования арифметической природы значений функций (4) и (5) можно применить метод Зигеля, см. [11, гл. 7]; в замечаниях к указанной главе имеются также ссылки на работы этого направления. Для случая иррациональных параметров, а также для уточнения оценок мер линейной независимости обычно применяют методы, основанные на эффективном построении линейных приближающих форм. Такая (неоднородная) приближающая форма для функций (4) имеет вид

$$R(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u} P_{kl_kj}(z)F_{kl_kj}(z), \tag{6}$$

где $P_0(z)$, $P_{kl_kj}(z)$ — многочлены, степени которых ограничены сверху некоторым натуральным числом n. При этом порядок нуля линейной формы $R(z)$ при $z = 0$ должен быть близок к максимально возможному значению, равному $n + uT(n+1)$; $T = \tau_1 + \dots + \tau_t$. Применение эффективных конструкций позволяет (при известной потере общности) улучшить результаты, получаемые методом Зигеля. Явные формулы для коэффициентов многочленов, входящих в правую часть (6), оказываются при этом слишком сложными и по этой причине здесь не приводятся. Эффективные конструкции, о которых идет речь, появились относительно недавно; см. работы [6] — [8]. В работе [9] дается условие линейной независимости функций вида (4) над полем рациональных дробей, которое используется при решении рассматриваемых задач в качестве вспомогательного средства.

При рассмотрении функций, не содержащих производных по параметру, выяснилось, что более удобным инструментом исследования (по сравнению с использованием функциональных приближающих форм вида (6) при условии $\tau_1 = \cdots = \tau_t = 1$) являются совместные приближения, построение которых также можно провести эффективно. Аналогичная ситуация имеет место и для функций вида (4) и (5). Эффективные конструкции совместных приближений для продифференцированных по параметру гипергеометрических функций использовались для решения различных задач, аналогичных упомянутым выше, в работах [10] — [14].

Мы рассмотрим здесь эффективную конструкцию совместных приближений, учитывающую специфику однородного случая, для функций вида (5). Такая конструкция не встречается в перечисленных выше работах и, по-видимому, является новой.

Пусть

$$\tilde{F}_{lj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \frac{d^l}{d\,\lambda^l} \prod_{x=1}^{\nu} (x+\lambda), \tag{7}$$

$j = 1, \ldots, m,\ l = 0, 1$, причем $b(0) = 0$; n — некоторое натуральное число, $N_1 = [2mn/(2m-1)]$.

Пусть, далее,

$$P(z) = \sum_{\mu=0}^{N_1} p_{\mu} z^{\mu} \tag{8}$$

— многочлен с неопределенными коэффициентами,

$$P(z)\tilde{F}_{lj}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{lj\mu} z^{\mu}, \tag{9}$$

$$P_{lj}(z) = \sum_{\mu=0}^{N_1} p_{lj\mu} z^{\mu}\,. \tag{10}$$

При любых коэффициентах p_{μ} многочлена (8) функция

$$P_{lj}(z)\tilde{F}_{l'j'}(z) - P_{l'j'}(z)\tilde{F}_{lj}(z) \tag{11}$$

имеет при всех допустимых значениях индексов ($l, l' = 0, 1,\ j, j' = 1, \ldots, m$) порядок нуля при $z = 0$ не меньше $N_1 + 1$. Пользуясь этим можно построить совместные приближения для функций (7). Подберем коэффициенты p_{μ} так, чтобы в равенстве (10) было

$$p_{lj\nu} = 0,\ \nu = n+1, \ldots, N_1\,. \tag{12}$$

С этой целью рассмотрим вспомогательную функцию

$$Q(z)=\prod_{x=0}^{N_2-1}(z-\lambda+N_3-x)^2,$$

где $N_2=[mn/(2m-1)]$ и $N_3=[n/(2m-1)]-1$. С помощью теории рядов Ньютона (см., например, [15, с. 40 – 41]) определим числа $\vartheta_\mu,\ \mu=0,1,\ldots,N_1$, так, чтобы тождественно по z выполнялось равенство

$$\sum_{\mu=0}^{N_1}\vartheta_\mu\prod_{x=1}^{N_1-\mu}(z+x)=Q(z)\,. \tag{13}$$

Т.к. $2N_2\leqslant N_1$, то такие числа существуют, и их можно записать в виде интегралов

$$\vartheta_\mu=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma\frac{Q(\zeta)\,d\zeta}{\prod_{x=1}^{N_1-\mu+1}(\zeta+x)}\,,$$

где Γ — положительно ориентированная окружность, охватывающая все полюсы подынтегральной функции.

Лемма 1. *Для любого многочлена $B(\mu)$ степени не выше N_2-1 выполняется равенство*

$$\sum_{\mu=0}^{N_1}\vartheta_\mu B(\mu)\frac{d^l}{d\lambda^l}\prod_{x=1}^{N_1-\mu}(\lambda-N_3+x)=0,\quad l=0,1. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $l=0$. Подставим $z=\lambda-N_3+\sigma,\ 0\leqslant\sigma\leqslant N_2-1$, в (13). Тогда $Q(z)=0$, и мы получаем такое равенство

$$0=\sum_{\mu=0}^{N_1}\vartheta_\mu\prod_{x=1}^{N_1-\mu}(\lambda-N_3+\sigma+x)=\sum_{\mu=0}^{N_1}\vartheta_\mu B_\sigma(\mu)\prod_{x=1}^{N_1-\mu}(\lambda-N_3+x)\,,$$

где

$$B_\sigma(\mu)=\prod_{x=1}^{\sigma}\frac{\lambda-N_3+N_1-\mu+x}{\lambda-N_3+x}\,.$$

Т.к. любой многочлен от μ степени не выше N_2-1 может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов $B_\sigma(\mu)$, то (14) при $l=0$ справедливо. Если $l=1$, то, дифференцируя (13) по z и подставляя $z=\lambda-N_3+\sigma$, получим равенство

$$0=\sum_{\mu=0}^{N_1}\left(\vartheta_\mu\frac{\partial\,B_\sigma(\mu)}{\partial\lambda}\prod_{x=1}^{N_1-\mu}(\lambda-N_3+x)+\vartheta_\mu B_\sigma(\mu)\frac{d}{d\lambda}\prod_{x=1}^{N_1-\mu}(\lambda-N_3+x)\right)=$$
$$=\sum_{\mu=0}^{N_1}\vartheta_\mu B_\sigma(\mu)\frac{d}{d\lambda}\prod_{x=1}^{N_1-\mu}(\lambda-N_3+x)\,.$$

Отсюда, рассуждая как и выше, получаем требуемое. Лемма доказана. □

Пусть теперь
$$p_\mu = \vartheta_\mu \prod_{x=1}^{N_1-\mu} b(x). \tag{15}$$
Тогда при $n+1 \leqslant \nu \leqslant N_1$ имеем
$$p_{0j\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} p_\mu (\nu-\mu)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-\mu} \frac{x+\lambda}{b(x)} = \sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_\mu B(\mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} (\lambda - N_3 + x);$$
$$p_{1j\nu} = \sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_\mu \left(\frac{\partial B(\mu)}{\partial\lambda} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} (\lambda - N_2 + x) + B(\mu) \frac{d}{d\lambda} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} (\lambda - N_3 + x) \right),$$
где
$$B(\mu) = (\nu-\mu)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} b(x-\mu) \prod_{x=1}^{\nu+N_3-N_1} (\lambda - N_3 + N_1 - \mu + x) \prod_{x=0}^{N_3-1} \frac{1}{\lambda - x}.$$
Возможность заменить верхний индекс суммирования ν на N_1 обеспечивается условием $b(0)=0$. Отметим также неравенство $\nu+N_3-N_1 \geqslant 0$, которое показывает, что $B(\mu)$ действительно является многочленом. Т.к. степень многочлена $B(\mu)$ ограничена сверху числом N_2-1, то по доказанной лемме равенства (12) выполняются.

Таким образом, если считать, что числа p_μ определяются равенством (15), то для функций (11) многочлены $P_{lj}(z)$ и $P_{l'j'}(z)$ имеют степени не выше n, а порядок нуля этих функций при $z=0$ не меньше, чем N_1. Это замечание показывает, что мы действительно получили совместные приближения (учитывающие специфику однородного случая) для рассматриваемых функций. Порядок нуля функций (11) при $z=0$ при этом лишь на константу отличается от максимально достижимого. Можно получить и максимальный порядок нуля, но тогда пришлось бы уделить больше внимания выбору чисел N_1, N_2 и N_3. Формулы для коэффициентов $p_{lj\mu}$ многочленов $P_{lj}(z)$ легко находятся из (8),(9),(10) и (15). Без труда проверяется, что для построенных приближений (при определенных ограничениях на параметр λ и на корни многочлена $b(x)$) выполняются все требования, необходимые для получения соответствующих арифметических результатов.

3. Заключение

Предложенная конструкция может быть использована для решения различных задач. Здесь представляют интерес результаты, относящиеся к оценкам снизу модуля однородных форм вида
$$\sum_{l=0}^{1} \sum_{j=1}^{m} h_{lj} \tilde{F}_{lj}(\xi)$$

от значений функций $F_{lj}(z)$ в ненулевой рациональной точке ξ в случае иррациональности корней многочлена $b(x)$.

Отметим также, что до сих пор не удается получить эффективные конструкции для функций, продифференцированных по нескольким параметрам. Недоступны исследованию эффективными методами также продифференцированные по параметру функции, значения которых вычисляются в нескольких различных точках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929-1930. № 1. S. 1–70.

2. Siegel C. L. Transcendental numbers. Princeton: Princeton University Press, 1949.

3. Фельдман Н. И. Оценки снизу для некоторых линейных форм // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1967, № 2. С. 63–72.

4. Галочкин А. И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, № 1. С. 19–28.

5. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.

6. Иванков П. Л. О дифференцировании гипергеометрической функции по параметру // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, вып. 6. С. 91–94.

7. Иванков П. Л. О значениях продифференцированных по параметру гипергеометрических функций // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 2. С. 64–70.

8. Иванков П. Л. О дифференцировании по параметру некоторых функций // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2012, № 5. С. 141–156.

9. Иванков П. Л. О линейной независимости некоторых функций // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 145–151.

10. Иванков П. Л. Об использовании совместных приближений для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2012. № 12. С. 135–142.

11. Иванков П. Л. Об использовании теории делимости в квадратичных полях для получения оценок некоторых линейных форм // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 11. С. 129–140.

12. Иванков П. Л. О значениях некоторых функций, удовлетворяющих однородным дифференциальным уравнениям // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 2. С. 104–112.

13. Иванков П. Л. О некоторых линейных формах // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 3. С. 56–64.

14. Иванков П. Л. Уточнение некоторых оценок для значений гипергеометрических функций // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2014. № 4. С. 175–186.

15. Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта. — М.: Издательство Московского университета. 1982.

REFERENCES

1. Siegel, C. L. 1929–1930, "Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen" , *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* № 1. S. 1–70.

2. Siegel, C. L. 1949, "Transcendental numbers." , *Princeton: Princeton University Press*

3. Fel'dman, N. I. 1967, "Estimates from below for certain linear forms" , *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, vol. 22, no. 2, pp. 63–72. (Russian)

4. Galockin, A. I. 1970, "Estimates from below of linear forms in the values of certain hypergeometric functions" , *Mat. Zametki*, vol. 8, pp. 19–28. (Russian)

5. Shidlovskii, A. B. 1987, "Transtsendentnye chisla" [Transcendental numbers] *"Nauka", Moscow,* 448 pp. (Russian)

6. Ivankov, P. L. 2010, "On the differentiation of a hypergeometric function with respect to a parameter" , *Fundam. Prikl. Mat.* vol. 16, no. 6, pp. 91–94 (Russian); translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)*vol. 182 (2012), no. 4, pp. 505–507.

7. Ivankov, P. L. 2012, "On the values of hypergeometric functions differentiated with respect to the parameter" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 13, no. 2(42), pp. 64–70. (Russian)

8. Ivankov, P. L. 2012, "Differentiation of the parameter of certain functions" , *Science and Education: electronic science and technology publication.* № 5, pp. 141–156. (Russian)

9. Ivankov, P. L. 2010, "On the linear independence of some functions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 11, no. 1(33), pp. 145–151. ISBN: 978-5-87954-524-1 (Russian)

10. Ivankov, P. L. 2012, "On the use of simultaneous approximation for the study of arithmetic the nature of the values of hypergeometric functions", *Science and Education: electronic science and technology publication.*, № 12, pp. 135–142. (Russian)

11. Ivankov, P. L. 2013, "On the use of the theory of divisibility in quadratic fields for estimates of certain linear forms", *Science and Education: electronic science and technology publication.* № 11, pp. 129–140. (Russian)

12. Ivankov, P. L. 2013, "The values of certain functions, satisfying homogeneous differential equations", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 14, no. 2, pp. 104–112. (Russian)

13. Ivankov, P. L. 2013, "Some linear forms", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 14, no. 3, pp. 56–64. (Russian)

14. Ivankov, P. L. 2014, "Refinement of estimates for some of the values of hypergeometric functions", *Science and Education: electronic science and technology publication.*, № 4, pp. 175–186. (Russian)

15. Fel'dman, N. I. 1982, "Sed'maya problema Gil'berta." [Hilbert's seventh problem]*Moskov. Gos. Univ., Moscow*, 312 pp. (Russian)

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана.
Поступило 31.05.2015