ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 511.361

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ПО ПАРАМЕТРУ

П. Л. Иванков (г. Москва)
ivankovpl@mail.ru

Аннотация

Исследование арифметической природы значений продифференцированных по параметру обобщенных гипергеометрических функций проводилось во многих работах, см. [1]–[7], а также соответствующие главы в книгах [8] и [9]. Первоначально для этих целей использовался метод Зигеля. Этот метод применим для исследования гипергеометрических функций с рациональными параметрами и с его помощью были получены результаты о трансцендентности и алгебраической независимости значений таких функций, а также соответствующие количественные результаты (например, оценки мер алгебраической независимости).

Возможности применения метода Зигеля в случае гипергеометрических функций с иррациональными параметрами ограничены. В классической форме метод Зигеля не удается применить в этой ситуации, и здесь потребовались некоторые дополнительные соображения. Следует, однако, отметить, что наиболее общие результаты об арифметической природе значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами получены с помощью метода Зигеля (в модифицированном виде, см. по этому поводу [10] и [11]). Здесь речь не идет об алгебраической независимости и приходится ограничиться лишь результатами о линейной независимости соответствующих значений.

Рассуждения по методу Зигеля начинаются с построения функциональной линейной приближающей формы, имеющей в начале координат достаточно высокий порядок нуля. Такая форма строится с помощью принципа Дирихле. Именно невозможность провести соответствующее рассуждение для функций с иррациональными параметрами служит препятствием при попытках применить метод Зигеля в случае иррациональных параметров.

Уже давно было замечено, что в некоторых случаях линейную приближающую форму можно построить эффективно, указав явные формулы для ее коэффициентов. Этот метод значительно уступает методу Зигеля в общности получаемых результатов. Однако, именно с помощью метода, основанного на эффективном построении линейных приближающих форм, были получены наиболее точные оценки снизу модулей линейных форм от значений гипергеометрических функций, а также во многих случаях были получены результаты об арифметической природе значений таких функций в случае иррациональных параметров (см., например, [12]).

Эффективная конструкция линейных приближающих форм для функций (2) была предложена в работе [13]. Эта конструкция использовала контурный интеграл, который применялся ранее для получения результатов об оценках линейных форм от значений гипергеометрических функций с различными параметрами, см. [14].

В настоящей работе предлагается новый подход к построению линейной приближающей формы для функций (2). Используется связь между гипергеометрическими функциями различных типов, которая позволяет упомянутое построение линейной приближающей формы свести к более простой задаче.

В заключении даны краткие указания относительно возможных приложений.

Ключевые слова: простейшая гипергеометрическая функция, дифференцирование по параметру, оценки линейных форм.

Библиография: 15 названий.

ON DIFFERENTIATION WITH RESPECT TO PARAMETER

P. L. Ivankov (Moscow)

Abstract

The investigation of the arithmetic nature of the values of differentiated with respect to parameter generalized hypergeometric functions was carried out in many works; see [1]–[7] and also corresponding chapters of the books [8] and [9]. Primarily the method of Siegel was used for these purposes. This method can be applied for the investigation of hypergeometric functions with rational parameters and the results concerning transcendence and algebraic independence of the values of such functions and corresponding quantitative results (for example estimates of the measures of algebraic independence) were obtained by means of it. The possibilities of application of Siegel's method in case of hypergeometric functions with irrational parameters are restricted. In its classic form Siegel's method cannot be applied in this situation and here were required some new considerations. But it must be noted that the most general results concerning the arithmetic nature of the values of hypergeometric functions with irrational parameters were obtained exactly by Siegel's method (by modified form of it, see [10] and [11]). In this case it's impossible to say of the results of transcendence or algebraic independence and one must restrict oneself by the results concerning linear independence of the corresponding values.

In Siegel's method reasoning begins with the construction of functional linear approximating form which has a sufficiently high order of zero at the origin of coordinates. Such a form is constructed by means of the Dirichlet principle. The impossibility to realize the corresponding reasoning for the functions with irrational parameters is an obstacle for the attempts to apply Siegel's method in case of irrational parameters.

It was noted long ago that in some cases the linear approximating form can be constructed effectively and explicit formulae can be pointed out for its coefficients. This method is inferior to Siegel's one in the sense of the generality of the results obtained. But by means of the method based on the effective construction of linear approximating form the most precise low estimates of the modules of linear forms in the values of hypergeometric functions were obtained and in many cases were established linear independence of the values of functions with irrational parameters (see for example [12]).

The effective construction of linear approximating form for the function (2) was proposed in the work [13]. In this work the construction was based on a contour integral which was earlier used for the achievement of results concerning the estimates of linear forms of the values of hypergeometric functions with different parameters; see [14]. In this paper we propose a new approach for the construction of linear approximating form for functions (2). Here we make use of a connection between hypergeometric functions of different types which makes it possible to reduce above mentioned constructing of linear approximating form to less difficult task. In the conclusion we give short directions concerning possible applications.

Keywords: the simplest hypergeometric function, differentiation with respect to parameter, estimates of linear forms.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Исследование арифметической природы значений продифференцированных по параметру обобщенных гипергеометрических функций проводилось во многих работах, см. [1]–[7], а также соответствующие главы в книгах [8] и [9]. Первоначально для этих целей использовался метод Зигеля. Этот метод применим для исследования гипергеометрических функций с рациональными параметрами и с его помощью были получены результаты о трансцендентности и алгебраической независимости значений таких функций, а также соответствующие количественные результаты (например, оценки мер алгебраической независимости).

Возможности применения метода Зигеля в случае гипергеометрических функций с иррациональными параметрами ограничены. В классической форме метод Зигеля не удается применить в этой ситуации, и здесь потребовались некоторые дополнительные соображения. Следует, однако, отметить, что наиболее общие результаты об арифметической природе значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами получены с помощью метода Зигеля (в модифицированном виде, см. по этому поводу [10] и [11]). Здесь речь не идет об алгебраической независимости и приходится ограничиться лишь результатами о линейной независимости соответствующих значений.

Рассуждения по методу Зигеля начинаются с построения функциональной линейной приближающей формы, имеющей в начале координат достаточно высокий порядок нуля. Такая форма строится с помощью принципа Дирихле. Именно невозможность провести соответствующее рассуждение для функций с иррациональными параметрами служит препятствием при попытках применить метод Зигеля в случае иррациональных параметров.

Уже давно было замечено, что в некоторых случаях линейную приближающую форму можно построить эффективно, указав явные формулы для ее коэффициентов. Этот метод значительно уступает методу Зигеля в общности получаемых результатов. Однако, именно с помощью метода, основанного на эффективном построении линейных приближающих форм, были получены наиболее точные оценки снизу модулей линейных форм от значений гипергеометрических функций, а также во многих случаях были получены результаты об арифметической природе значений таких функций в случае иррациональных параметров (см., например, [12]).

Эффективная конструкция линейных приближающих форм для функций (2) была предложена в работе [13]. Эта конструкция использовала контурный интеграл, который применялся ранее для получения результатов об оценках линейных форм от значений гипергеометрических функций с различными параметрами, см. [14].

В настоящей работе предлагается новый подход к построению линейной приближающей формы для функций (2). Используется связь между гипергеометрическими функциями различных типов, которая позволяет упомянутое построение линейной приближающей формы свести к более простой задаче.

2. Основной результат

Пусть

$$\omega_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}(\lambda+\nu)^j \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x}\left(\frac{\lambda-1+x}{\lambda+x}\right)^2 = \lambda^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!(\lambda+\nu)^{2-j}}\,, \tag{1}$$

где $\lambda \notin \mathbb{Z}$, $j=0,1,2$. Используя функции $\omega_j(z)$ в качестве вспомогательного средства, построим функциональную линейную приближающую форму для функций

$$\phi_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x}$$

и

$$\frac{\partial \phi_\lambda(z)}{\partial \lambda} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x}\left(\frac{1}{\lambda+1}+\cdots+\frac{1}{\lambda+\nu}\right). \tag{2}$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta = \left| (\nu+\lambda-s)^j \prod_{x=0}^{s-1}(\nu-x)(\nu+\lambda-x)^2 \prod_{x=1}^{n-s}(\nu+\lambda-1-n+x)^2 \right|_{\substack{j=0,1,2,\ s=0,1,\dots,n,\\ \nu=n,\dots,4n+2}}.$$

В этом определителе столбцы расположены в порядке возрастания s и в порядке возрастания j при равных s; строки расположены в порядке возрастания ν.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\Delta = 1!2!\cdots(3n+2)! \prod_{s=0}^{n-1}((s+1-\lambda)(s+1)^2)^{2(n-s)}. \tag{3}$$

Доказательство. Данное равенство непосредственно вытекает из [15, лемма 1, с. 193]. □

С помощью многочленов

$$P_j(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{js} z^s,\ j=0,1,2, \tag{4}$$

с неопределенными коэффициентами составим линейную форму

$$\sum_{j=0}^{2} P_j(z)\omega_j(z) = R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu. \tag{5}$$

Тогда при $\nu \geqslant n$ справедливы равенства

$$c_\nu = \frac{\lambda^2}{\nu!} \sum_{j=0}^{2}\sum_{s=0}^{n} \frac{p_{js}\prod_{x=0}^{s-1}(\nu-x)}{(\lambda+\nu-s)^{2-j}}\,; \tag{6}$$

$$c_\nu = Q(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x(\lambda+x)^2} \prod_{x=1}^{\nu-n}(\lambda-1+x)^2\,, \tag{7}$$

где

$$Q(\nu) = \sum_{j=0}^{2}\sum_{s=0}^{n} p_{js}(\nu+\lambda-s)^j \prod_{x=0}^{s-1}(\nu-x)(\nu+\lambda-x)^2 \prod_{x=1}^{n-s}(\nu+\lambda-1-n+x)^2\,. \tag{8}$$

Из (3) следует, что при $\lambda \notin \mathbb{N}$ определитель $\Delta \neq 0$. Поэтому существуют числа p_{js}, $j=0,1,2$, $s=0,1,\dots,n$, для которых тождественно по z выполняется равенство

$$Q(z) = \prod_{x=0}^{3n+1}(z-x). \tag{9}$$

Считая, что в качестве коэффициентов многочленов (4) взяты именно те числа p_{js}, существование которых мы доказали, напишем равенство, которое легко выводится из (6), (7) и (9):

$$\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{2} p_{js}\frac{\prod_{x=0}^{s-1}(z-x)}{(z+\lambda-s)^{2-j}} = \frac{\prod_{x=0}^{3n+1}(z-x)}{\prod_{s=0}^{n}(z+\lambda-s)^2}\,. \tag{10}$$

Это равенство справедливо при целых рациональных $z \geqslant n$, а, значит, при всех z, для которых имеют смысл его левая и правая части. Отсюда можно найти простые формулы для чисел p_{js}. Умножим обе части (10) при $j = 0, 1$ на $(z+\lambda-s)^{1-j}$ и проинтегрируем по окружности ра(диуса 1/2 с центром в точке $-\lambda+s$; тогда (приводится лишь формула для $j = 0$)

$$p_{0s} = \prod_{x=1}^{s}\frac{1}{x-\lambda}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z+\lambda-s|=\frac{1}{2}}\frac{(z+\lambda-s)\prod_{x=0}^{3n+1}(z-x)}{\prod_{x=0}^{n}(z+\lambda-x)^2}\,dz\,.$$

Для определения p_{2s}, $s = 0, 1, \dots, n$, разделим обе части (10) на $\prod_{x=0}^{s}(z-x)$ и проинтегрируем по контуру Γ, охватывающему все точки $0, 1, \dots, s$ и не содержащему внутри себя точек вида $-\lambda, -\lambda+1, \dots, -\lambda+n$. Такой контур существует, если считать, что $\lambda \notin \mathbb{Z}$. В результате получим такое равенство

$$p_{2s} + \sum_{\mu=0}^{s}\sum_{j=0}^{1} p_{j\mu}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{\prod_{x=\mu}^{s}(z-x)(z+\lambda-\mu)^{2-j}} = 0.$$

Отсюда видно, что p_{2s} выражаются через найденные ранее коэффициенты $p_{j\mu}$, у которых $j = 0, 1$, $\mu = 0, 1, \dots, n$.

Из (7) и (9) следует, что $c_\nu = 0$ при $n \leqslant \nu \leqslant 3n+1$. Если $0 \leqslant \nu < n$, то для c_ν имеем равенство

$$c_\nu = \sum_{s=0}^{\nu}\sum_{j=0}^{2} p_{js}(\lambda+\nu-s)^j\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{x}\left(\frac{\lambda-1+x}{\lambda+x}\right)^2 = Q(\nu)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x(\lambda+x)^2}\prod_{x=1}^{n-\nu}\frac{1}{(\lambda-x)^2}. \tag{11}$$

Здесь верхний индекс ν суммирования по s после вынесения соответствующих множителей можно заменить на n в силу наличия скобки $(\nu - x)$ в правой части (8). Из (8), (9) и (11) следует, что $c_\nu = 0$ также и при $0 \leqslant \nu < n$. Поэтому линейная форма $R(z)$, определяемая равенством (5), имеет при $z = 0$ порядок нуля равный $3n+2$. Без труда доказывается, что большего порядка нуля здесь добиться невозможно, т.к. получится форма, тождественно равная нулю.

Воспользуемся теперь тем, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!(\lambda+\nu)} = \frac{1}{\lambda}e^z\phi_\lambda(-z)\,; \tag{12}$$

см., например, [9, с. 195, равенство (46)]. Функция $\phi_\lambda(z)$ из правой части (12) задается равенством (2). Из (1) следует, что

$$\omega_1(z) = \lambda^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!(\lambda+\nu)}\,,$$

а тогда

$$\omega_1(z) = \lambda e^z \phi_\lambda(-z)\,. \tag{13}$$

Дифференцируя по λ последнее равенство, получаем

$$\frac{2}{\lambda}\,\omega_1(z) - \omega_0(z) = e^z\phi_\lambda(-z) + \lambda e^z \frac{\partial\,\phi_\lambda(-z)}{\partial\lambda}\,,$$

откуда

$$\omega_0(z) = e^z\phi_\lambda(-z) - \lambda e^z \frac{\partial\,\phi_\lambda(-z)}{\partial\lambda}\,. \tag{14}$$

Кроме того, очевидно, $\omega_2(z) = \lambda^2 e^z$. Из последнего равенства, а также из (13) и (14) получаем

$$\lambda^2 P_2(-z) + (P_0(-z) + \lambda P_1(-z))\phi_\lambda(z) - \lambda P_0(-z)\frac{\partial\,\phi_\lambda(z)}{\partial\lambda} = e^z R(-z)\,. \tag{15}$$

3. Заключение

Таким образом, мы построили неоднородную линейную приближающую форму для функций

$$\phi_\lambda(z) \quad \text{и} \quad \frac{\partial\,\phi_\lambda(z)}{\partial\lambda}, \tag{16}$$

имеющую при $z = 0$ максимально возможный порядок нуля. Коэффициенты многочленов $P_j(z)$, $j = 0, 1, 2$, могут быть записаны в виде относительно простых формул, которые удобны при исследовании арифметических свойств этих коэффициентов (это исследование необходимо, например, при решении сформулированной ниже задачи об оценке линейной формы от значений функций (16)).

Метод построения формы (15) существенно отличается от предложенного в работе [13].

Достоинством рассмотренной конструкции является очевидная возможность обобщения на случай, когда функция $\phi_\lambda(z)$ дифференцируется по параметру λ более одного раза. При таком обобщении появляется возможность, например, получить оценку снизу модуля линейной формы вида

$$h_0 + \sum_{l=0}^{\tau} h_l \frac{\partial^{\,l}\,\phi_\lambda(\xi)}{\partial\lambda^{\,l}}$$

в зависимости от максимума абсолютных величин целых рациональных коэффициентов $h_0, h_1, \ldots, h_\tau$ при некоторых ограничениях на параметр λ и ненулевое число ξ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белогривов И. И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1967, № 2. С. 55–62.

2. Белогривов И. И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций // Математический сборник. 1970. Т. 82 (124), № 3(7). С. 387–408.

3. Белогривов И. И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций одного класса // Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14, № 1. С. 16–35.

4. Väänänen K. On a cojecture of Mahler concerning the algebraic independence of the values of some E-functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. 1972. Vol. 512. P. 3–46.

5. Väänänen K. On the transcendence and algebraic independence of the values of certain E-functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. 1973. Vol. 537. P. 3–15.

6. Väänänen K. On the algebraic independence of some E-functions related to Kummer's functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. 1975. Vol. 1. P. 183–194.

7. Väänänen K. On the algebraic independence of the values of some E-functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. 1975. Vol. 1. P. 93–109.

8. Mahler K. Lectures on Transcendental Numbers. Berlin: Springer Verlag. 1976.

9. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука. 1987.

10. Галочкин А. И. О некотором аналоге метода Зигеля //Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. — 1986, № 2. — С. 30–34.

11. Иванков П. Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. — Том 34, № 5. — 1993. — С. 53–62.

12. Галочкин А. И. О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм // Математический сборник. 1984. Т. 124 (166), № 3(7). С. 416–430.

13. Иванков П. Л. О дифференцировании гипергеометрической функции по параметру // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 16, выпуск 6. 2010. С. 91–94.

14. Иванков П. Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с различными параметрами // Математические заметки. Т. 52, выпуск 6. 1992. С. 25–31.

15. Иванков П. Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, № 1. С. 191-206.

REFERENCES

1. Belogrivov, I. I. 1967, "Transcendentality and algebraic independence of values of certain E-functions" , *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, vol. 22, no. 2, pp. 55–62. (Russian)

2. Belogrivov, I. I. 1970, "The transcendence and algebraic independence of the values of certain hypergeometric E-functions" , *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 82(124), pp. 387–408. (Russian)

3. Belogrivov, I. I. 1973, "The transcendence and algebraic independence of the values of a certain class of E-functions" , *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 14, pp. 16–35, 235. (Russian)

4. Väänänen, K. 1972, "On a cojecture of Mahler concerning the algebraic independence of the values of some E-functions" , *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math.*, vol. 512, pp. 3–46.

5. Väänänen, K. 1973, "On the transcendence and algebraic independence of the values of certain E-functions" , *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math.*, vol. 537, pp. 3–15.

6. Väänänen, K. 1975, "On the algebraic independence of some E-functions related to Kummer's functions" , *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math.*, vol. 1, pp. 183–194.

7. Väänänen, K. 1975, "On the algebraic independence of the values of some E-functions" , *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math.*, vol. 1, pp. 93–109.

8. Mahler, K. 1976, "Lectures on Transcendental Numbers." *Berlin: Springer Verlag.*

9. Shidlovskii, A. B. 1987, "Transtsendentnye chisla" [Transcendental numbers] *"Nauka", Moscow,* 448 pp. (Russian)

10. Galochkin, A. I. 1986, "An analogue of Siegel's method" , *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, no. 2, pp. 30–34, 113. (Russian)

11. Ivankov, P. L. 1993, "Linear independence of values of entire hypergeometric functions with irrational parameters" *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 34, no. 5, pp. 53–62, ii, vii (Russian); translation in *Siberian Math. J.*, vol. 34 (1993), no. 5, pp. 839—847.

12. Galochkin, A. I. 1984, "Estimates, unimprovable with respect to height, for certain linear forms", *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 124(166), no. 3, pp. 416–430. (Russian)

13. Ivankov, P. L. 2010, "On the differentiation of a hypergeometric function with respect to a parameter", *Fundam. Prikl. Mat.* vol. 16, no. 6, pp. 91–94 (Russian); translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)*vol. 182 (2012), no. 4, pp. 505–507.

14. Ivankov, P. L. 1992, "Arithmetic properties of values of hypergeometric functions with different parameters", *Mat. Zametki*, vol. 52, no. 6, pp. 25–31, 157 (Russian) ; translation in *Math. Notes*, vol. 52 (1992), no. pp. 5–6, 1188—1192 (1993).

15. Ivankov, P. L. 1995, "On the linear independence of the values of some functions", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 1, no. 1, pp. 191—206. (Russian)

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана.
Поступило 31.05.2015