

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 539.3:534.26

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-323-335

Дифракция звуковых волн, излучаемых линейным источником, на неоднородном проницаемом сфериоде с твердым шаровым включением

Л. А. Толоконников, Д. В. Окороков

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Окороков Данила Витальевич — магистрант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: danila_okorokov@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача о дифракции цилиндрической гармонической звуковой волны на неоднородном жидкоком сфероиде с абсолютно жестким шаровым включением. Полагается, что квадрат эксцентриситета сфероида является малой величиной. Сфериод помещен в бесконечную однородную сжимаемую идеальную жидкость. Линейный источник, генерирующий звуковые волны, параллелен оси вращения сфероида. Материал сфероида характеризуется переменными плотностью и скоростью звука, которые являются непрерывными функциями радиальной координаты.

Методом возмущений получено приближенное аналитическое решение задачи с использованием разложений по волновым сферическим функциям.

Представлены результаты численных расчетов диаграмм направленности рассеянного акустического поля в дальней зоне.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, линейный источник, проницаемый неоднородный сфероид, шаровое включение.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Толоконников Л. А., Окороков Д. В. Дифракция звуковых волн, излучаемых линейным источником, на неоднородном проницаемом сфероиде с твердым шаровым включением // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 323–335.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 539.3:534.26

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-323-335

Diffraktion of sound waves emitted by a linear source on a inhomogeneous permeable spheroid with a solid spherical inclusion

L. A. Tolokonnikov, D. V. Okorokov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Okorokov Danila Vitalevich — master's student, Tula State University (Tula).

e-mail: danila_okorokov@mail.ru

Abstract

In paper the problem of diffraction of a cylindrical harmonic sound wave on an inhomogeneous liquid spheroid with an absolutely rigid spherical inclusion is considered.

It is assumed that the square eccentricity of the spheroid is a small value. The spheroid is placed in an infinite homogeneous incompressible ideal liquid. A linear source generating sound waves is parallel to the axis of rotation of the spheroid. The material of the spheroid is characterized by variable density and speed of sound which are continuous functions of the radial coordinate.

An approximate analytical solution is obtained by the perturbation method problems with using decompositions in a row by spherical wave functions.

The results of numerical calculations of the directional patterns of the scattered acoustic field in the far zone are presented.

Keywords: diffraction, sound waves, linear source, permeable inhomogeneous spheroid, spherical inclusion.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

Tolokonnikov, L. A., Okorokov, D. V. 2025, "Diffraction of sound waves emitted by a linear source on a inhomogeneous permeable spheroid with a solid spherical inclusion", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 323–335.

1. Введение

Дифракция гармонических звуковых волн на жидкостных сферидах и сфероидальных телах из подобных жидкости материалов, в которых не распространяются сдвиговые волны, исследовалась в ряде работ.

В [1 – 4] получены решения задач о рассеянии плоских звуковых волн на однородных проницаемых (жидких) сферидах.

Работы [5, 6] посвящены изучению дифракции плоских звуковых волн на неоднородных жидкостных сферидах, находящихся в однородной идеальной жидкости.

Дифракция плоских звуковых волн на абсолютно жестком сфериоде, окруженном неоднородным жидким слоем, обсуждалась в [7].

В [8] решена задача о рассеянии плоской звуковой волны неоднородным проницаемым сфериодом с жестким шаровым включением.

Непрерывно-неоднородное тело можно аппроксимировать дискретно-слоистым, то есть телом состоящим из совокупности тонких однородных слоев. Подобный подход для сфериодальных тел реализован в работах [9 – 11]. Задача о рассеянии сферической волны на многослойном проницаемом сфериоде с жестким сфериодальным включением решена в [9]. На основе полученного решения рассмотрен случай одного сфериодального жидкого слоя, окружающего жесткий сфериод [10]. В [11] рассматривается дифракция цилиндрических звуковых волн на многослойном проницаемом сфериоде с абсолютно жестким сфериодальным включением.

В настоящей работе рассматривается задача о дифракции звуковых волн, излучаемых линейным источником, на неоднородном жидком сфериоде с абсолютно жестким шаровым включением.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородный жидкий сфериод с полуосью вращения a и второй полуосью b , эксцентриситет которого ε . Причем для вытянутого сфериода ($a > b$) $\varepsilon = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$, а для сплюснутого сфериода ($a < b$) $\varepsilon = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^{1/2}$. Сфериод имеет абсолютно жесткое шаровое включение радиуса r_0 . Центры сфериода и шара совмещены. Сфериод помещен в безграничную однородную сжимаемую идеальную жидкость, которая характеризуется плотностью в невозмущенном состоянии ρ_1 и скоростью звука c_1 .

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с началом в центре сфериода так, чтобы ось вращения сфериода располагалась на оси z . Связем с координатной системой x, y, z сферическую r, θ, φ и цилиндрическую r, φ, z системы координат, начала которых совмещены с центром сфериода:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta;$$

$$x = \hat{r} \cos \varphi, \quad y = \hat{r} \sin \varphi, \quad z = z.$$

Уравнение сфериода в сферической системе координат имеет вид

$$r(\theta) = a(1 - e \sin^2 \theta)^{-1/2}, \quad (2.1)$$

где $e = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}$ для вытянутого сфериода и $e = \varepsilon^2$ для сплюснутого сфериода.

Будем полагать, что материал сфериода характеризуется переменными плотностью ρ и скоростью звука c , которые являются непрерывными функциями радиальной координаты r :

$$\rho = \rho(r); \quad c = c(r).$$

Из внешнего пространства на сфериод падает гармоническая симметричная цилиндрическая звуковая волна давления p_0 , излучаемая бесконечно длинным линейным источником с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота; t — время (в дальнейшем временной множитель будем опускать). Линейный источник параллелен оси вращения сфериода и имеет цилиндрические координаты (\hat{r}_0, φ_0) (рис. 1). Без ограничения общности положим $\varphi_0 = 0$.

Падающая волна имеет вид

$$p_0 = AH_0(k_1 R), \quad R = [\hat{r}^2 + \hat{r}_0^2 - 2\hat{r}\hat{r}_0 \cos \varphi]^{1/2},$$

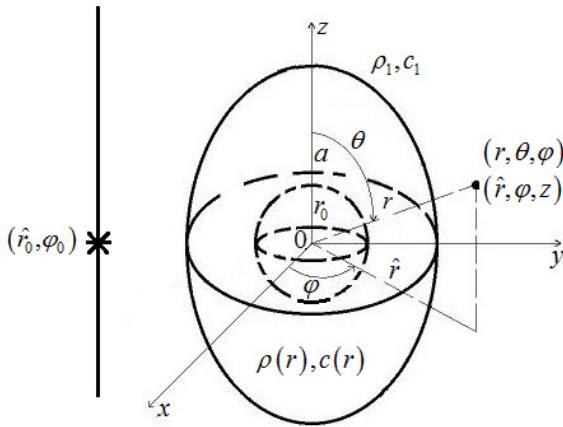


Рис. 1: Геометрия задачи

где A — амплитуда падающей волны, $H_0(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка, $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число содержащей жидкости, R — расстояние от источника до произвольной точки внешнего пространства.

Определим акустическое поле, рассеянное сфероидом, в предположении малости величины e .

3. Математическая модель задачи

Распространение малых возмущений в однородной идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [12]

$$\Delta p_1 + k_1^2 p_1 = 0, \quad (3.1)$$

где $p_1 = p_0 + p_s$ — давление полного акустического поля во внешней области; p_s — звуковое давление в рассеянной волне; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число внешней среды.

Распространение звука в неоднородной сжимаемой идеальной жидкости описывается уравнением [13]

$$\Delta p + k^2 p - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \rho \cdot \operatorname{grad} p = 0, \quad (3.2)$$

где p — звуковое давление в неоднородной среде; $k = \omega/c$ — волновое число в неоднородной жидкости; $c = c(r)$; $\rho = \rho(r)$.

Скорости частиц в однородной и неоднородной жидкостях определяются соответственно по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{i\rho_1\omega} \operatorname{grad} p_1, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{i\rho\omega} \operatorname{grad} p. \quad (3.3)$$

Граничные условия на поверхности сфероида S заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц внешней среды и неоднородной жидкости и равенстве акустических давлений

$$v_{n1}|_S = v_n|_S, \quad p_1|_S = p|_S. \quad (3.4)$$

Граничное условие на поверхности жесткого шарового включения заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц прилегающей неоднородной жидкости

$$v_n|_{r=r_0} = 0. \quad (3.5)$$

Кроме того, для давления в рассеянной волне должно выполняться условие излучения на бесконечности [12]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p_s}{\partial r} - ik_1 p_s \right) = 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, в математической постановке задача заключается в нахождении решений дифференциальных уравнений (3.1) и (3.2), удовлетворяющих граничным условиям (3.4) и (3.5), а также условию излучения на бесконечности (3.6).

4. Аналитическое решение задачи

В цилиндрической системе координат падающая цилиндрическая волна может быть представлена разложением [14]

$$p_0 = A \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos m\varphi \begin{cases} J_m(k_1 \hat{r}) H_m(k_1 \hat{r}_0), & \hat{r} < \hat{r}_0; \\ J_m(k_1 \hat{r}_0) H_m(k_1 \hat{r}), & \hat{r} > \hat{r}_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $J_m(x)$ и $H_m(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка m , δ_{0m} — символ Кронекера.

В сферической системе координат уравнение Гельмгольца, которому удовлетворяет искомое давление p_s , уравнение (3.2) и граничные условия (3.4), (3.5) принимают вид

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p_s}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p_s}{\partial \varphi^2} \right] + k_1^2 p_s = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\rho(r)} \frac{d\rho}{dr} \right) \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + k^2(r) p = 0; \quad (4.3)$$

$$\rho_1^{-1} \frac{\partial}{\partial n} (p_0 + p_s) \Big|_{r=r(\theta)} = \rho^{-1}(r) \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{r=r(\theta)}, \quad (p_0 + p_s)|_{r=r(\theta)} = p|_{r=r(\theta)}; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (4.5)$$

При этом $\frac{\partial}{\partial n}$ определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} + \sin \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (4.6))$$

где γ — угол между радиус-вектором \mathbf{r} и внешней нормалью \mathbf{n} к поверхности тела, а выражение для $\cos \gamma$ имеет вид

$$\cos \gamma = \left[1 + \left(\frac{e \sin \theta \cos \theta}{1 - e \sin^2 \theta} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (4.7))$$

Получим приближенное решение задачи методом возмущений [15].

Искомые функции p_s и p представим в виде разложений по малому параметру e

$$p_s(r, \theta, \varphi) = p_s^0(r, \theta, \varphi) + e p_s^1(r, \theta, \varphi) + \dots, \quad (4.8)$$

$$p(r, \theta, \varphi) = p^0(r, \theta, \varphi) + e p^1(r, \theta, \varphi) + \dots, \quad (4.9)$$

ограничиваясь членами со степенями e не выше первой.

Подставим разложения (4.8) и (4.9) в уравнения (4.2) и (4.3) и приравниваем нулю члены с одинаковыми степенями e . В результате для определения функций p_s^j и p^j ($j = 0, 1$) получим следующие уравнения:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_s^j}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p_s^j}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p_s^j}{\partial \varphi^2} \right] + k_1^2 p_s^j = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 p^j}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\rho(r)} \frac{d\rho}{dr} \right) \frac{dp^j}{dr} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p^j}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p^j}{\partial \varphi^2} + k^2(r) p^j = 0, \quad j = 0, 1. \quad (4.11)$$

С выбранной степенью точности из (4.6) и (4.7) находим

$$\cos \gamma = 1 + O(e^2), \quad \sin \gamma = -e \sin \theta \cos \theta + O(e^2), \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} - e \sin \theta \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (4.12)$$

С учетом (4.12) подставим разложения (4.8) и (4.9) в граничные условия (4.3) и (4.4), а затем приравняем члены с одинаковыми степенями e , стоящие в левой и правой частях каждого уравнения. Поскольку условия (4.3) и (4.4) должны выполняться на поверхности сфEROИда $r = r(\theta)$, определяемой выражением (2.1), то в этих условиях r представляет собой функцию от θ . Поэтому в каждое граничное условие параметр e будет входить как явно, так и неявно. Следовательно, непосредственно приравнять члены с одинаковыми степенями e в левой и правой частях уравнений не представляется возможным. Необходимо предварительно разложить все функции, неявно содержащие e , в ряды Тейлора в окрестности $r = a$ с тем, чтобы получить их явную зависимость от e . Проделав указанные операции и сохранив только линейные относительно e члены, получим следующие условия:

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial r} (p_0 + p_s^0) \Big|_{r=a} = \frac{1}{\rho(r)} \frac{\partial p^0}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad (4.13)$$

$$[p_0 + p_s^0]_{r=a} = p^0|_{r=a}, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_s^1}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \left\{ \frac{\rho_1}{\rho(a)} \frac{\partial p^1}{\partial r} + \frac{a}{2} \sin^2 \theta \left[\frac{\rho_1}{\rho(a)} \left(\frac{\partial^2 p^0}{\partial r^2} - \frac{1}{\rho(a)} \frac{d\rho}{dr} \frac{\partial p^0}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (p_0 + p_s^0) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \sin \theta \cos \theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (p_0 + p_s^0) - \frac{\rho_1}{\rho(a)} \frac{\partial p^0}{\partial \theta} \right] \right\}_{r=a}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$p_s^1|_{r=a} = \left[p^1 + \frac{a}{2} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} (p^0 - p_0 - p_s^0) \right]_{r=a}. \quad (4.16)$$

Теперь подставим (4.9) в условие (4.5). Получаем

$$\frac{\partial p^j}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad j = 0, 1. \quad (4.17)$$

Уравнения (4.10) и (4.11) будем решать методом разделения переменных. Так как акустические поля во внешней среде и в неоднородной части сфероида симметричны относительно плоскости xOz , то с учетом условий излучения на бесконечности (3.6) функций p_s^j ($j = 0, 1$) будем искать в виде

$$p_s^j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{mn}^j h_n(k_1 r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad (4.18),$$

а функции p^j ($j = 0, 1$) — в виде

$$p^j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_n^j(r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi. \quad (4.19)$$

Здесь $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $P_n^m(x)$ — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m . Коэффициенты A_{mn}^j и функции $R_n^j(r)$ ($j = 0, 1$) подлежат определению.

Подставляя (4.19) в уравнение (4.11) и используя дифференциальное уравнение для присоединенных многочленов Лежандра [14]

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_n^m(\cos \theta) = 0,$$

получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции $R_n^j(r)$ ($j = 0, 1$) для каждого n ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\frac{d^2 R_n^j}{dr^2} + g(r) \frac{dR_n^j}{dr} + q(r) R_n^j = 0, \quad (4.20)$$

где

$$g(r) = \frac{2}{r} - \frac{1}{\rho(r)} \frac{d\rho}{dr}, \quad q(r) = k^2(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}.$$

Используя условия (4.13) – (4.17) определим коэффициенты A_{mn}^0 , A_{mn}^1 и по два краевых условия для дифференциального уравнения (4.20) при $j = 0$ и $j = 1$.

Прежде всего получим интегральные соотношения между цилиндрическими и сферическими функциями, которые будут использованы при удовлетворении условий (4.13) – (4.17).

Воспользуемся соотношением [14]

$$\int_0^\pi J_m(k_1 r \sin \theta) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 2i^{n-m} j_n(k_1 r) P_n^m(0), \quad (4.21)$$

где $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка n , а величина $P_n^m(0)$ определяется формулой [16]

$$P_n^m(0) = \begin{cases} 0, & (n-m) \text{ — нечетное;} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-m}{2}} (n+m)!}{2^n (\frac{n-m}{2})! (\frac{n+m}{2})!}, & (n-m) \text{ — четное.} \end{cases}$$

Дифференцируя обе части равенства (4.21) по $k_1 r$, получим

$$\int_0^\pi J'_m(k_1 r \sin \theta) P_n^m(\cos \theta) \sin^2 \theta d\theta = 2i^{n-m} j'_n(k_1 r) P_n^m(0). \quad (4.22)$$

Здесь и далее штрихи обозначают дифференцирование по аргументу.

Подставим (4.1), (4.18) и (4.19) в условия (4.13) – (4.16), заменяя цилиндрическую координату \hat{r} ее выражением $r \sin \theta$ в сферических координатах. Затем умножим левые и правые части полученных равенств на $P_l^m(\cos \theta) \sin \theta$ и проинтегрируем по θ от 0 до π .

Используя интегральные соотношения (4.21) и (4.22), условия ортогональности для присоединенных многочленов Лежандра [16]

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq l; \\ N_{ml}, & n = l, \end{cases}$$

где $N_{ml} = \frac{2}{(2l+1)} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$ — квадрат нормы присоединенных многочленов Лежандра, и выражение для вронсиана

$$j_n(x)h'_n(x) - j'_n(x)h_n(x) = \frac{i}{x^2},$$

получим следующие выражения для коэффициентов A_{mn}^j ($j = 0, 1$) и краевые условия для уравнения (4.20) при $r = a$:

$$A_{mn}^0 = \frac{R_n^0(a)N_{mn} - 2A(2 - \delta_{0m})i^{n-m}H_m(k_1\hat{r}_0)j_n(k_1a)P_n^m(0)}{h_n(k_1a)N_{mn}},$$

$$A_{mn}^1 = \frac{R_n^1(a)}{h_n(k_1a)} + \frac{a}{2N_{mn}h_n(k_1a)} \left\{ -Ak_1(2 - \delta_{0m})H_m(k_1\hat{r}_0)\gamma_{mn} + \sum_{l=m}^{\infty} [R_l^{0'}(a) - A_{ml}^0 k_1 h'_l(k_1a)] \alpha_{ln}^m \right\},$$

$$R_n^{0'}(r) + a_n R_n^0(r) \Big|_{r=a} = b_{mn}, \quad (4.23)$$

$$R_n^{1'}(r) + a_n R_n^1(r) \Big|_{r=a} = c_{mn}, \quad (4.24)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{mn} &= \int_0^\pi \sin^4 \theta P_n^m(\cos \theta) J'_m(k_1 a \sin \theta) d\theta; \quad \alpha_{ln}^m = \int_0^\pi \sin^3 \theta P_l^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) d\theta; \\ a_n &= -\frac{k_1 h'_n(k_1 a) \rho(a)}{\rho_1 h_n(k_1 a)}; \quad b_{mn} = -\frac{i A 2(2 - \delta_{0m}) i^{n-m} H_m(k_1 \hat{r}_0) P_n^m(0) \rho(a)}{k_1 a^2 \rho_1 h_n(k_1 a) N_{mn}}; \\ c_{mn} &= \frac{a \rho(a)}{2 \rho_1 N_{mn}} \left\{ A(2 - \delta_{0m}) H_m(k_1 \hat{r}_0) f_{mn} + \sum_{l=m}^{\infty} \left[\left(-\frac{\rho_1}{\rho(a)} R_l^{0''}(a) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + f_{nl}^{(1)} R_l^{0'}(a) + f_{nl}^{(2)} A_{ml}^0 \right) \alpha_{ln}^m - \frac{2}{a^2} \left(A_{ml}^0 h_l(k_1 a) - \frac{\rho_1}{\rho(a)} R_l^0(a) \right) \beta_{ln}^m \right] \right\}; \\ f_{nl}^1 &= \frac{\rho_1 \rho'(a)}{\rho^2(a)} + \frac{k_1 h_n'(k_1 a)}{h_n(k_1 a)}; \quad f_{nl}^2 = k_1^2 \frac{h_n(k_1 a) h_l''(k_1 a) - h_n'(k_1 a) h_l'(k_1 a)}{h_n(k_1 a)}; \\ \beta_{ln}^m &= \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta P_l^m(\cos \theta) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) d\theta; \quad f_{nm} = k_1^2 \left[-\frac{h_n'(k_1 a)}{h_n(k_1 a)} \gamma_{mn} + \lambda_{mn} - \frac{2}{k_1 a} \mu_{mn} \right]; \\ \lambda_{mn} &= \int_0^\pi \sin^5 \theta P_n^m(\cos \theta) J''_m(k_1 a \sin \theta) d\theta; \quad \mu_{mn} = \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \theta P_n^m(\cos \theta) \frac{d}{d\theta} J_m(k_1 a \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Подстановка (4.19) в (4.17) дает два краевых условия при $r = r_0$

$$R_n^{0'}(r) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad (4.25)$$

$$R_n^{1'}(r) \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (4.26)$$

Коэффициенты A_{mn}^0 и A_{mn}^1 могут быть вычислены только после нахождения значений $R_n^0(a)$, $R_n^1(a)$, $R_n^{0'}(a)$. Для нахождения этих значений необходимо решить краевые задачи для

обыкновенного дифференциального уравнения (4.20) при $j = 0$ и $j = 1$ с краевыми условиями (4.23), (4.25) и (4.24), (4.26) соответственно.

После решения краевых задач вычисляются коэффициенты A_{mn}^j ($j = 0, 1$). В результате получаем приближенное аналитическое описание рассеянного акустического поля с помощью выражений (4.8) и (4.18).

Отметим, что из решения задачи дифракции цилиндрических волн на неоднородном сфероиде с абсолютно жестким включением можно найти решение задачи для случая, когда падающая волна является плоской. Для этого в полученном решении, считая, что расстояние между источником и рассеивателем достаточно велико ($k_1 \hat{r}_0 \gg 1$), следует заменить функцию $H_m(k_1 \hat{r}_0)$ ее асимптотическим выражением при больших значениях аргумента [16]

$$H_m(k_1 \hat{r}_0) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 \hat{r}_0}} \exp \left[i \left(k_1 \hat{r}_0 - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

В результате получим решение задачи дифракции плоской волны, амплитуда которой равна

$$A \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 \hat{r}_0}} \exp \left[i \left(k_1 \hat{r}_0 - \pi m - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Рассмотрим дальнюю зону рассеянного акустического поля. Используя асимптотическую формулу для сферической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента ($k_1 r \gg 1$) [16]

$$h_n(k_1 r) \approx (-i)^{n+1} \frac{e^{ik_1 r}}{k_1 r},$$

из (4.8) и (4.18) находим

$$p_s \approx \frac{a}{2r} \exp(ik_1 r) F(\theta, \varphi),$$

где

$$F(\theta, \varphi) = \frac{2}{k_1 a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-i)^{n+1} (A_{mn}^0 + e A_{mn}^1) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi. \quad (4.27)$$

5. Численные исследования

На основании выражения (4.27) были проведены расчеты угловых характеристик рассеянного акустического поля в дальней зоне. Диаграммы направленности $|F(\theta, \varphi)|/A$ рассчитывались в диапазоне углов $0 \leq \theta \leq \pi$ в плоскости xOz для сфероида, находящегося в воде ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = 1485$ м/с).

Расчеты проводились как для однородного сфероида с плотностью $\bar{\rho} = 1.26 \cdot 10^3$ кг/м³ и скоростью звука $\bar{c} = 1920$ м/с (глицерин), так и для неоднородного материала, механические характеристики которого менялись по радиальной координате по квадратичным законам

$$\rho = \bar{\rho} f(r), \quad c = \bar{c} f(r),$$

$$f_1(r) = 100 \left(\frac{r - r_0}{a - r_0} \right)^2 + 1, \quad f_2(r) = 100 \left(\frac{a - r}{a - r_0} \right)^2 + 1.$$

Зависимости $f_1(r)$ и $f_2(r)$ выбраны такими, что их графики являются зеркальным отображением друг друга относительно прямой $r = (r_0 + a)/2$. При этом функция $f_1(r)$ достигает максимума при $r = a$, а на поверхности шара при $r = r_0$ — минимума. Функция $f_2(r)$ достигает тех же максимальных и минимальных значений, но уже наоборот на поверхностях $r = r_0$ и $r = a$.

Краевые задачи для дифференциального уравнения (4.20) при $j = 0$ и $j = 1$ решены методом сведения их к задачам с начальными условиями. Решение задач Коши проведено методом Рунге-Кутты четвертого порядка [17].

На рис. 2 – 4 представлены диаграммы направленности, рассчитанные для волнового размера сферида $k_1 a = 3$ при $e = 0$, $e = -0.2$ и $e = 0.2$. При этом полагалось: $\hat{r}_0 = 4$ м, $r_0 = 0.1$ м, $a = 1.1$ м.

На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния $|F|/A$, вычисленной для соответствующих значений угла θ . На рисунках сплошная линия соответствует однородному сфериду, штриховая – неоднородному вида $f_1(r)$, пунктирная – неоднородному вида $f_2(r)$. Стрелкой показано направление падения волны.

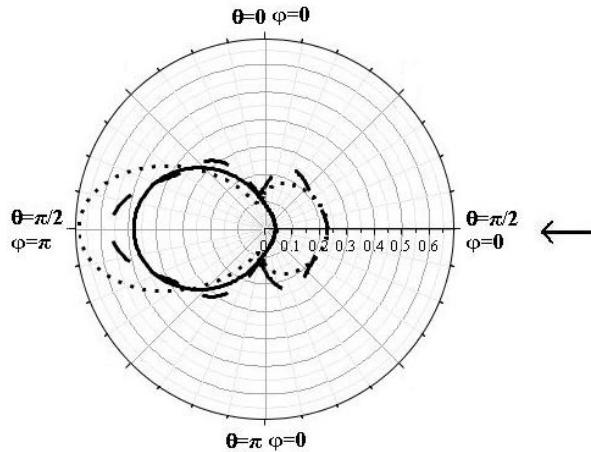


Рис. 2: Диаграммы направленности при $e = 0$

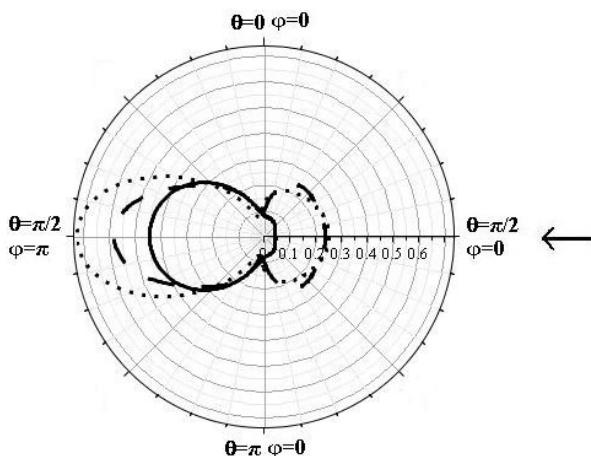
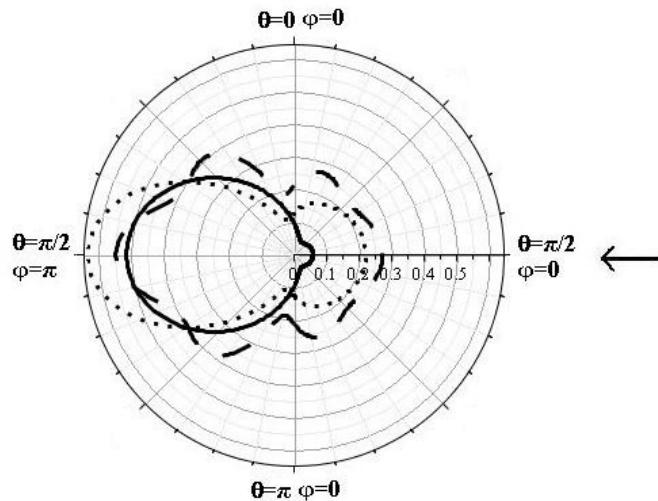


Рис. 3: Диаграммы направленности при $e = -0.2$

Рис. 4: Диаграммы направленности при $e = 0.2$

На рис. 5 представлены диаграммы направленности, рассчитанные для однородного сфероида при $k_1a = 3$, $e = -0.2$ и разном удалении линейного источника от сфероида: $k_1\hat{r}_0 = 5$ (пунктирная линия), $k_1\hat{r}_0 = 8$ (штриховая линия) и $k_1\hat{r}_0 = 50$ (сплошная линия). Для сравнения приведена диаграмма направленности для случая падения плоской волны (штрихпунктирная линия).

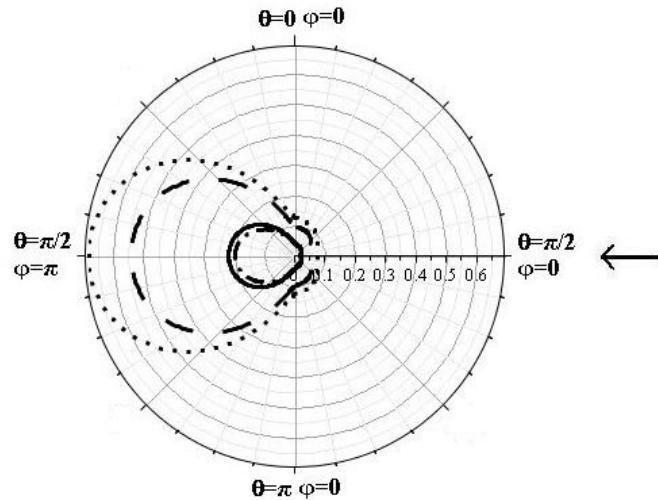


Рис. 5: Диаграммы направленности при разном удалении линейного источника от сфероида

6. Заключение

В настоящей работе методом возмущений получено приближенное аналитическое решение задачи дифракции симметричной цилиндрической звуковой волны на жидком сфероиде с жестким шаровым включением. Найденное решение позволяет численно исследовать рассеянное сфероидом акустическое поле при любых значениях волнового размера тела ka и произвольном удалении линейного источника от рассеивателя. Проведенные численные расчеты показали, что диаграмма направленности рассеянного поля в дальней зоне существенно

зависит от конфигурации тела и закона неоднородности материала сфероида. При приближении источника к рассеивателю диаграммы направленности существенно изменяются, что подтверждает необходимость учета криволинейности фронта падающей волны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yeh C. Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. Vol. 42. No. 2. P. 518 – 521.
2. Burke J. E. Scattering by penetrable spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. Vol. 43. No. 4. P. 871 – 875.
3. Родионова Г. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звука вращающимся сфероидом // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 5. С. 895 – 899.
4. Котсис А. Д., Роумелиотис Дж. А. Рассеяние звука на проницаемом сфероиде // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 2. С. 189 – 204.
5. Толоконников Л. А., Шапошник Л. М. Дифракция звуковых волн на неоднородном сфероиде и неоднородном эллиптическом цилиндре // Известия Тульского гос. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика. 1996. Т. 2. Вып. 2. С. 141 – 151.
6. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном эллипсоиде вращения с малым эксцентриситетом // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. Тула: ТулГУ, 1997. С. 90 – 96.
7. Дружков А. Н., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны на абсолютно жестком эллипсоиде вращения, окруженном неоднородным слоем // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тула: ТулПИ, 1988. С. 105 – 110.
8. Толоконников Л. А., Окороков Д. В. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным сфероидом с жестким шаровым включением // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2024. Вып. 10. С. 441 – 447.
9. Charalambopoulos A., Dassios G., Fotiadis D. I., Massalas C. V. Scattering of a point generated field by a multilayered spheroid // Acta Mech. 2001. Vol. 150. No. 2. P. 107 – 119.
10. Charalambopoulos A., Fotiadis D. I., Massalas C. V. Scattering of a point generated field by kidney stones // Acta Mech. 2002. Vol. 153. No. 1. P. 63 – 77.
11. Толоконников Л. А., Толоконников С. Л. Дифракция цилиндрической звуковой волны на многослойном сфероиде // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26. Вып. 1. С. 190 – 203.
12. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
13. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
14. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики Т.2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.
15. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
16. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
17. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

REFERENCES

1. Yeh, C. 1967, "Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid", *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 42, Iss. 2, pp. 518–521.
2. Burke, J. E. 1968, "Scattering by penetrable spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 43, Iss. 4, pp. 871–875.
3. Rodionova, G. A., Tolokonnikov, L. A. 1989, "Sound scattering by a rotating spheroid", *Akust. Zhurn.*, Vol. 35, Iss. 5, pp. 895–899, [in Russian].
4. Kotsis, A. D., Roumeliotis, J. A. 2008, "Acoustic Scattering by a Penetrable Spheroid", *Akust. Zhurn.*, Vol. 54, Iss. 2, pp. 189–204, [in Russian].
5. Tolokonnikov, L. A., Shaposhnik, L. M. 1996, "Diffraction of sound waves on an inhomogeneous spheroid and an inhomogeneous elliptical cylinder", *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science.*, Vol. 2, Iss. 2, pp. 141–151, [in Russian].
6. Tolokonnikov, L. A. 1997, "Diffraction of a plane sound wave on an inhomogeneous ellipsoid of rotation with a small eccentricity", *Differential equations and applied problems*, TulSU, pp. 90–96, [in Russian].
7. Druzhkov, A. N., Tolokonnikov, L. A. 1988, "Scattering of a plane sound wave on an absolutely rigid ellipsoid of rotation surrounded by an inhomogeneous layer", *Differential equations and applied problems*, TulPI, pp. 105–110, [in Russian].
8. Tolokonnikov, L. A., Okorokov, D. V. 2024, "Scattering of a plane sound wave by an inhomogeneous spheroid with a rigid spherical inclusion", *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Tekh. Nauki*, Iss. 10, pp. 441–447, [in Russian].
9. Charalambopoulos, A., Dassios, G., Fotiadis, D. I., Massalas, C. V. 2001, "Scattering of a point generated field by a multilayered spheroid", *Acta Mech.*, Vol. 150, Iss. 2, pp. 107–119.
10. Charalambopoulos, A., Fotiadis, D. I., Massalas, C. V. 2002, "Scattering of a point generated field by kidney stones", *Acta Mech.*, Vol. 153, Iss. 1, pp. 63–77.
11. Tolokonnikov, L. A., Tolokonnikov, S. L. 2025, "Diffraction of a cylindrical sound wave on a multilayered spheroid", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 26, Iss. 1, pp. 190–203, [in Russian].
12. Shenderov, E. L. 1972, *Wave problems of underwater acoustics*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].
13. Brekhovskikh, L. M. 1973, *Waves in layered media*, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
14. Mors, P. M., Feshbach, H. 1953, *Methods of theoretical physics*, Vol. 2, McGraw-Hill, New York, 1001 p.
15. Nayfeh, A. H. 1973, *Perturbation methods*, John Wiley & Sons, New York, 425 p.
16. Ivanov, E. A. 1968, *Diffraction of electromagnetic waves by two bodies*, Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
17. Kalitkin, N. N. 1978, *Numerical methods*, Nauka, Moscow, 512 p., [in Russian].