

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 539.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-313-322

Определение упругих констант на основе решения задачи Ламе<sup>1</sup>

В. В. Козлов, А. А. Маркин, А. В. Храименков

**Козлов Виктор Вячеславович** — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru*

**Маркин Алексей Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: markin.nikram@yandex.ru*

**Храименков Александр Владиславович** — младший научный сотрудник, Тульский государственный университет (г. Тула); ООО «Фидесис» (г. Москва).

*e-mail: hav.2000@mail.ru*

## Аннотация

Представлены двухконстантные формы связей между напряжениями и деформациями нелинейно-упругих изотропных материалов. Такого рода материалы могут использоваться для гашения колебаний строительных конструкций при динамических воздействиях (землетрясения, ударные волны при взрывах). Свободная энергия рассматриваемых соотношений представляется функцией алгебраических инвариантов тензора деформаций Коши-Грина либо естественных инвариантов «левого» тензора деформаций Генки. Разработана методика определения констант представленных связей между напряжениями и деформациями. Предлагаемая методика основана на анализе экспериментальных зависимостей окружных деформаций на внешней и внутренней поверхностях от приложенного внутреннего давления и решениях задачи Ламе для полого цилиндра в плоском деформированном состоянии. Показано, что конкретизация приведенных определяющих соотношений возможна на основе выделения линейного участка экспериментальных зависимостей и построения теоретических зависимостей в предположении малости деформаций. Таким образом, следующие за линейным участком данные могут быть использованы для конкретизации модулей упругости третьего порядка определяющих соотношений, построенных на основе рассмотренных. Следовательно, изложенную в работе методику можно также рассматривать как частичное решение задачи конкретизации связей между напряжениями и деформациями, включающих модули упругости третьего порядка. Для представленных экспериментальных данных показано, что результаты конкретизации по выдвинутой методике соответствуют определенным с помощью классического эксперимента на растяжение модулям упругости. Приведенная методика может использоваться как непосредственно, так и с целью минимизации числа экспериментов в задачах конкретизации определяющих значений нелинейной теории упругости.

**Ключевые слова:** задача Ламе, нелинейно-упругая модель, алгебраический инвариант, плоское деформированное состояние, конкретизация определяющих соотношений.

**Библиография:** 21 название.

## Для цитирования:

Козлов В. В., Маркин А. А., Храименков А. В. Определение упругих констант на основе решения задачи Ламе // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 313–322.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 539.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-313-322

**Determination of elastic constants based on the solution of the  
Lame problem**

V. V. Kozlov, A. A. Markin, A. V. Khraimenkov

**Kozlov Victor Vyacheslavovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

*e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru*

**Markin Alexey Alexandrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

*e-mail: markin.nikram@yandex.ru*

**Khraimenkov Alexander Vladislavovich** — junior researcher, Tula State University (Tula); Fidesys LLC (Moscow).

*e-mail: hav.2000@mail.ru*

**Abstract**

Two-constant forms of relationships between stresses and strains in nonlinear-elastic isotropic materials are presented. Such materials can be used to dampen vibrations in building structures under dynamic loads (earthquakes, shock waves from explosions). The free energy of the considered relationships is represented as a function of algebraic invariants of the Cauchy-Green strain tensor or natural invariants of the “left” Hencky strain tensor. A method for determining the constants of the presented relationships between stresses and strains has been developed. The proposed method is based on the analysis of experimental dependencies of circumferential deformations on the outer and inner surfaces on the applied internal pressure and solutions to the Lamé problem for a hollow cylinder in a flat deformed state. It is shown that the present constitutive relationships can be particularized by identifying the linear section of the experimental dependencies and constructing theoretical dependencies under the assumption of small deformations. Thus, the data following the linear section can be used to specify the third-order elasticity moduli of the determining relations constructed on the basis of those considered. Consequently, the methodology presented in the work can also be considered as a partial solution to the problem of particularization the relationships between stresses and strains, including third-order elasticity moduli. For the experimental data presented, it is shown that the results of particularization according to the proposed method correspond to the elasticity moduli determined by means of a classical tensile experiment. The presented method can be used both directly and for the purpose of minimizing the number of experiments in the tasks of particularization the constitutive parameters of nonlinear elasticity theory.

*Keywords:* Lamé problem, nonlinear elastic model, algebraic invariant, plane strain, constitutive law particularization.

*Bibliography:* 21 titles.

**For citation:**

Kozlov, V. V., Markin, A.A. & Khraimenkov, A. V. 2025, “Determination of elastic constants based on the solution of the Lamé problem”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 313–322.

## Введение

Построение и экспериментальная конкретизация соотношений, определяющих поведение упругих тел при конечных деформациях, остается актуальной задачей ввиду отсутствия единственности её решения [1, 2, 3, 4]. Каждое определяющее соотношение содержит специфичный для него ряд материальных параметров [5, 6, 7, 8]. Использование связи между напряжениями и деформациями для конкретного материала предполагает предварительное решение задачи установления значений всех материальных констант определяющего соотношения — его конкретизацию.

Решения задачи конкретизации некоторых определяющих соотношений представлены в работах [9, 10, 11, 12]. В данной статье предлагается методика конкретизации двухконстантных связей между напряжениями и деформациями для изотермических процессов изотропных нелинейно-упругих материалов [13, 14, 15]. Представленную методику можно рассматривать и как частичное решение вопроса конкретизации более сложных определяющих соотношений, в частности, Мурнагана [16], построенных как расширение рассматриваемых. В отличие от классического способа определения констант упругости с помощью эксперимента о растяжении образца [17, 18] предлагаемая методика основана на рассмотрении задачи Ламе для полого цилиндра, находящегося в условии плоско-деформированного состояния под действием внутреннего давления [19]. Соответствующие модельные соотношения содержат связи между экспериментально наблюдаемыми характеристиками процесса. Из требования соответствия модельных уравнений экспериментальным данным решается задача конкретизации определяющего соотношения.

## 1. Определение упругих констант на основе решения задачи Ламе

Рассмотрим вопрос конкретизации двухконстантных определяющих соотношений нелинейной теории упругости, являющихся прямым обобщением закона Гука на случай изотропных нелинейно-упругих материалов. К таким можно отнести соотношение [13]

$$\mathbf{T} = (2c_1 + c_2) I_1 \mathbf{E} - c_2 \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{T}$  — энергетический тензор напряжений,  $\boldsymbol{\epsilon}$  — тензор деформаций Коши-Грина,  $I_1$  — первый алгебраический инвариант  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\mathbf{E}$  — единичный тензор.

Представленная связь является частным случаем связи напряжений и деформаций Мурнагана [16]

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{Murn} = & [(2c_1 + c_2) I_1 + (3c_3 + c_4) I_1^2 + c_5 I_2] \mathbf{E} - \\ & - [c_2 + (c_4 + c_5) I_1] \boldsymbol{\epsilon} + c_5 \boldsymbol{\epsilon}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

содержащего также константы упругости третьего порядка  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$ , вопрос конкретизации которых в данной работе не рассматривается.

Также к определяющим соотношениям с двумя константами относится соотношение [13, 18]

$$\boldsymbol{\sigma}_R = 2G^* \tilde{\mathbf{G}} + K^* \Theta \mathbf{E}, \quad (3)$$

построенное в рамках предельного случая частного постулата изотропии Ильюшина, где  $\boldsymbol{\sigma}_R$  — повернутый обобщенный тензор напряжений,  $\tilde{\mathbf{G}}$  — девиатор тензора деформаций Генки,  $\Theta$  — первый естественный инвариант тензора Генки.

Общим при решении проблемы конкретизации определяющих соотношений (1), (3) является требование их асимптотического вырождения в классический закон Гука линейной теории упругости [20]:

$$\mathbf{S} = \lambda I_1 \mathbf{E} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{lin} = \left( K - \frac{2G}{3} \right) I_1 \mathbf{E} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{lin}, \quad (4)$$

где  $\lambda$ ,  $G$ ,  $K$  – классические параметры Ламе: модуль сдвига и модуль объемного расширения соответственно, а  $I_1$  – первый алгебраический инвариант линеаризованного тензора деформаций Коши-Грина

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{lin} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \overset{\circ}{\nabla} \right). \quad (5)$$

При использовании (1), (3) в рамках линейной теории упругости как энергетический тензор напряжений, так и обобщенный тензор  $\boldsymbol{\sigma}_R$  вырождаются в тензор истинных напряжений Коши. Линеаризация тензора деформаций Генки и его первого естественного инварианта приводят к тензору деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}_{lin}$  и алгебраическому инварианту  $I_1$  соответственно. Тогда соотношения (1), (3) примут вид, эквивалентный (4)

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (2c_1 + c_2) I_1 \mathbf{E} - c_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{lin} = \left( K^* - \frac{2G^*}{3} \right) I_1 \mathbf{E} + 2G^* \boldsymbol{\varepsilon}_{lin} = \\ &= \left( K - \frac{2G}{3} \right) I_1 \mathbf{E} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{lin}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) следует связь между парами значений  $(c_1, c_2)$ ,  $(G^*, K^*)$ ,  $(G, K)$ :

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = K - \frac{2G}{3}, \\ -c_2 = 2G. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \left( K - \frac{2G}{3} \right) + G, \\ c_2 = -2G. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} G^* = G, \\ K^* = K. \end{cases}$$

Классически коэффициенты закона Гука определяются с помощью эксперимента на растяжение образца [17]. В то же время набор экспериментов для нахождения значения параметров определяющих соотношений нелинейной теории упругости, включающих константы упругости третьего порядка, таких как (2), более обширный и может включать рассмотрение неоднородных процессов деформирования. Решим вопрос конкретизации констант  $c_1$ ,  $c_2$  в случае доступных экспериментальных данных задачи Ламе. Заметим при этом, что пара значений  $G^*$ ,  $K^*$ , может быть легко выражена через  $c_1$ ,  $c_2$  с помощью системы (7) и далее выкладки конкретизации производятся только для  $c_1$ ,  $c_2$ .

Схема нагружения полого цилиндра представлена на рис. 1. Координаты точек в недеформированном состоянии  $(\rho_0, \varphi_0, z_0)$ , в деформированном  $(\rho, \varphi, z)$  и  $a \leq \rho_0 \leq b$ ,  $h/2 \leq z_0 \leq h/2$ . На поверхность  $\rho_0 = a$  действует внутреннее давление  $p$ , внешняя поверхность свободна от нагрузок. Предполагается плоско-деформированное состояние.

Запишем связь между координатами в начальном и деформированном состояниях

$$\rho = \rho(\rho_0), \quad \varphi = \varphi_0, \quad z = z_0. \quad (8)$$

Выражение (8) позволяет представить радиус-вектор положения точки в деформированном состоянии

$$\vec{x} = \rho(\rho_0) \vec{e}_\rho^0 + z_0 \vec{e}_z, \quad (9)$$

где  $\vec{e}_\rho^0, \vec{e}_z$  – соответствующие базисные векторы цилиндрической системы координат.

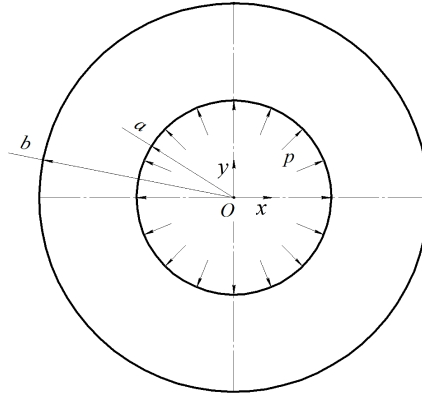


Рис. 1: Схема модели

С учётом определения в цилиндрической системе координат оператора Гамильтона  $\overset{\circ}{\nabla} = \vec{e}_\rho^0 \frac{\partial}{\partial \rho_0} + \vec{e}_\varphi^0 \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z_0}$  определим аффино́р деформаций, используя (6):

$$\begin{aligned} \underline{\Phi} = \overset{\circ}{\nabla} \vec{x} &= \rho' \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \vec{e}_\rho^0}{\partial \varphi_0} \frac{\partial \vec{e}_\rho^0}{\partial \varphi_0} + \vec{e}_z \vec{e}_z = \\ &= \rho' \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + \lambda_\rho \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0 + \vec{e}_z \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\rho'$ ,  $\lambda_\rho$  соответствуют радиальному и окружному растяжениям материальных волокон соответственно. Из определения полярного разложения  $\underline{\Phi} = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{R}}$  [21] и (10) следует, что аффино́р деформации задачи Ламе совпадает с симметричной левой мерой искажения  $\underline{\mathbf{U}}$ , в то время как ортогональный тензор поворота  $\underline{\mathbf{R}}$  является единичным. При этом  $\vec{e}_\rho^0$ ,  $\vec{e}_\varphi^0$ ,  $\vec{e}_z$  образуют ортонормированную тройку векторов.

С помощью соотношения (10) запишем градиент перемещений

$$\overset{\circ}{\nabla} \vec{u} = \overset{\circ}{\nabla} \vec{x} - \underline{\mathbf{E}} = (\rho' - 1) \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + (\lambda_\rho - 1) \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0. \quad (11)$$

Для малых деформаций линеаризованный тензор деформаций Коши-Грина (5) в соответствии с градиентом перемещений (11) примет вид

$$\underline{\varepsilon}_{lin} = (\rho' - 1) \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + (\lambda_\rho - 1) \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0 = (\varepsilon_{\rho\rho})_{lin} \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + (\varepsilon_{\varphi\varphi})_{lin} \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0. \quad (12)$$

С учётом (12) выразим тензор истинных напряжений (6):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}} &= (2c_1 + c_2) (\rho' + \lambda_\rho - 2) (\vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0 + \vec{e}_z \vec{e}_z) - c_2 [(\rho' - 1) \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + (\lambda_\rho - 1) \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0] = \\ &= \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 [(2c_1 + c_2) (\rho' + \lambda_\rho - 2) - c_2 (\rho' - 1)] + \\ &+ \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0 [(2c_1 + c_2) (\rho' + \lambda_\rho - 2) - c_2 (\lambda_\rho - 1)] + \vec{e}_z \vec{e}_z (2c_1 + c_2) (\rho' + \lambda_\rho - 2) = \\ &= S_{\rho\rho} \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + S_{\varphi\varphi} \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0 + S_{zz} \vec{e}_z \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (13)$$

Если записать уравнение равновесия, приходим к известной [19] зависимости

$$\rho(\rho_0) = A\rho_0 + \frac{B}{\rho_0}. \quad (14)$$

Найдем константы  $A$ ,  $B$ . Из (13) и (14) выразим нормальные радиальные напряжения

$$S_{\rho\rho}(\rho_0) = (4c_1 + c_2) (A - 1) + c_2 \frac{B}{\rho_0^2}.$$

Используем граничные условия  $S_{\rho\rho}\Big|_{\rho_0=a} = -p$ ,  $S_{\rho\rho}\Big|_{\rho_0=b} = 0$  и запишем последнее выражение на внутреннем и внешнем радиусах цилиндра:

$$\begin{cases} (4c_1 + c_2)A + c_2 \frac{B}{a^2} = 4c_1 + c_2 - p, \\ (4c_1 + c_2)A + c_2 \frac{B}{b^2} = 4c_1 + c_2. \end{cases} \quad (15)$$

Решим систему алгебраических уравнений (15) относительно  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{pa^2}{(4c_1 + c_2)(a^2 - b^2)}, \\ B &= \frac{pa^2b^2}{c_2(a^2 - b^2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения (14), (16) вместе с (9) полностью определяют закон движения материальных точек цилиндра, конкретизируют меры описания напряженно-деформированного состояния. В частности, компонента окружных деформаций тензора Коши-Грина (5) примет вид:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{\varphi\varphi})_{lin} &= \frac{\rho}{\rho_0} - 1 = A + \frac{B}{\rho_0^2} - 1 = 1 - \frac{pa^2}{(4c_1 + c_2)(a^2 - b^2)} + \\ &+ \frac{pa^2b^2}{c_2\rho^2(a^2 - b^2)} - 1 = \frac{pa^2}{a^2 - b^2} \left( \frac{b^2}{\rho_0^2 c_2} - \frac{1}{4c_1 + c_2} \right). \end{aligned}$$

На внутреннем и внешнем радиусах получим

$$\begin{cases} (\varepsilon_{\varphi\varphi})_{lin}\Big|_{\rho_0=a} = \frac{pa^2}{a^2 - b^2} \left( \frac{b^2}{a^2 c_2} - \frac{1}{4c_1 + c_2} \right) = pc_1^*, \\ (\varepsilon_{\varphi\varphi})_{lin}\Big|_{\rho_0=b} = \frac{pa^2}{a^2 - b^2} \left( \frac{b^2}{c_2} - \frac{1}{4c_1 + c_2} \right) = pc_2^*. \end{cases} \quad (17)$$

Принимая во внимание, что  $c_1, c_2$  – материальные константы, получим, что  $c_1^*, c_2^*$  также постоянные величины, а зависимости (17) – линейные относительно давления  $p$ . Таким образом, для нахождения  $c_1, c_2$  на экспериментальных кривых  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^e\Big|_{\rho_0=a}(p), \varepsilon_{\varphi\varphi}^e\Big|_{\rho_0=b}(p)$  необходимо выделить линейный участок, произвольная точка которого может быть использована для составления системы уравнений (17) относительно неизвестных  $c_1, c_2$ .

Рассмотрим вопрос возможности получения экспериментальных данных  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^e\Big|_{\rho_0=a}(p), \varepsilon_{\varphi\varphi}^e\Big|_{\rho_0=b}(p)$ . Экспериментально наблюдаемыми величинами рассматриваемой постановки являются деформированные значения внешнего  $\rho^e(b)$  и внутреннего  $\rho^e(a)$  радиусов и соответствующее внутреннее давление  $p^e$ . Используя выражение аффинора деформаций (10), запишем тензор Коши-Грина

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\underline{\Phi} \cdot \underline{\Phi}^T - \underline{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2}(\rho' - 1)^2 \bar{e}_\rho^0 \bar{e}_\rho^0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)^2 \bar{e}_\varphi^0 \bar{e}_\varphi^0 = \varepsilon_{\rho\rho} \bar{e}_\rho^0 \bar{e}_\rho^0 + \varepsilon_{\varphi\varphi} \bar{e}_\varphi^0 \bar{e}_\varphi^0.$$

Таким образом, окружные деформации определяются соответствующими значениями деформированного радиуса и могут быть измерены  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^e\Big|_{\rho_0=a}(p), \varepsilon_{\varphi\varphi}^e\Big|_{\rho_0=b}(p)$ .

Применим методику конкретизации констант  $c_1, c_2$  для следующих экспериментальных данных, полученных для цилиндра, имеющие безразмерные геометрические характеристики  $a = 0.5$  и  $b = 1$ :

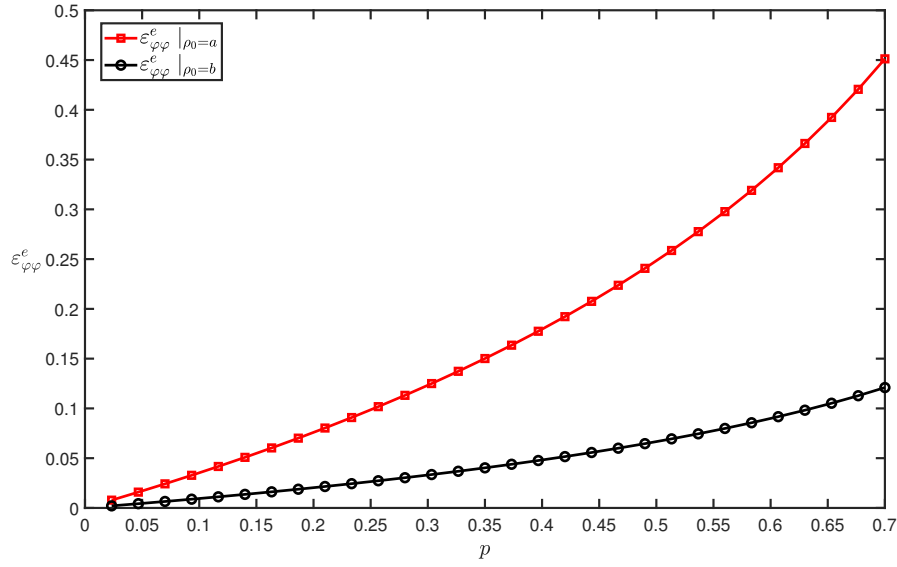


Рис. 2: Экспериментальные зависимости  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^e \Big|_{\rho_0=a}(p)$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^e \Big|_{\rho_0=b}(p)$

Заметим, что представленные на рис. 2 зависимости были получены для материала, имеющего классическим образом определенные модуль сдвига, коэффициент объемного расширения  $G_{classic} = 2.069$  МПа,  $K_{classic} = 20$  МПа соответственно. Выберем в качестве участка, на котором  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^e \Big|_{\rho_0=a}(p)$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^e \Big|_{\rho_0=b}(p)$  растут предположительно линейно, интервал  $p \in [0; 0.1]$  МПа. Решив систему (17) для произвольной точки данного интервала, получим искомые значения материальных параметров. В таблице 1 приведены материальные константы  $c_1$ ,  $c_2$ , а также соответствующие им модули упругости  $G$ ,  $K$ , выраженные с помощью системы (7).

Таблица 1: Материальные константы, найденные для значений  $p = 0.025i$ ,  $i \in [1; 4]$

Внутреннее давление	$\max(\varepsilon_{\varphi\varphi}^e)$	$c_1$	$c_2$	$K$	$G$
0.025	0.0083909	11.067	-4.0717	19.419	2.0358
0.05	0.017059	10.891	-4.0055	19.111	2.0027
0.075	0.026021	10.714	-3.9391	18.802	1.9695
0.1	0.035293	10.536	-3.8724	18.491	1.9362

Анализируя приведенные в таблице 1 значения, наблюдаем, что вычисленные на основе по представленной методике модули сдвига, объемного расширения асимптотически вырождаются в классические значения с уменьшением внутреннего давления и приближения экспериментальных зависимостей  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^e \Big|_{\rho_0=a}(p)$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^e \Big|_{\rho_0=b}(p)$  к линейным. Таким образом, определение параметров может быть осуществлено как с помощью стандартным образом определенных модулей  $G_{classic}$ ,  $K_{classic}$ , так и посредством представленной методики.

## Заключение

Предложена методика конкретизации модулей упругости двухконстантного определяющего соотношения на основе решения задачи Ламе для полого изотропного однородного цилиндра. Показано, что выделение линейной части экспериментальных зависимостей поверхност-

ных окружных деформаций от внутреннего давления приводит к определению классических модулей. Это означает, что классические модули данного материала должны входить в нелинейные определяющие соотношения. Результаты применения методики могут быть использованы как непосредственно, так и в целях минимизации числа экспериментов, используемых при решении задачи конкретизации определяющих соотношений нелинейной теории упругости.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rajagopal K. R., Rodriguez C., A mathematical justification for nonlinear constitutive relations between stress and linearized strain // *Mathematical Physics*. 2024; DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.20977>
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980 г. – 512 с.
3. Муравлев А.В. О представлении упругого потенциала в обобщенном пространстве деформаций А.А. Ильюшина // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2011. № 1. С. 99-102.
4. Bustamante R., Rajagopal K. R. A new type of constitutive equation for nonlinear elastic bodies. Fitting with experimental data for rubber-like materials // *Proceedings of the Royal Society A*. 2021. Vol. 477. № 2252. P. 1–16; DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0330>
5. Průša V., Rajagopal K.R., Tůma, K. Gibbs free energy based representation formula within the context of implicit constitutive relations for elastic solids // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020. vol. 121; DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103433>
6. Montella G., Govindjee S., Neff P. The exponentiated Hencky strain energy in modelling tire derived material for moderately large deformations // *Journal of Engineering Materials and Technology, Transaction of the ASME*. 2015; DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4032749>
7. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Нелинейные соотношения анизотропной упругости и частный постулат изотропии // *Прикладная математика и механика*, 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 587-594
8. Markin, A.A., Sokolova, M.Y. Variant of Nonlinear Elasticity Relations // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. P. 1182–1188; DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419080089>
9. Нгуен Ш.Т. Идентификация параметров квадратичной модели упругого анизотропного материала / Ш.Т. Нгуен, Д.В. Христич // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*, 2021. № 3 (49). С. 3–11; DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.49.3.001>
10. Минин С.И. Определение модулей упругости третьего порядка для измерения напряженно-деформированного состояния металла элементов конструкций АЭС. // *Известия вузов. Ядерная энергетика*, 2018. № 1. С. 15-22; DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2018.1.02>
11. Ф. Е. Гарбузов, А. М. Самсонов, А. А. Семенов, А. Г. Шварц, Определение упругих модулей 3-го порядка по параметрам объемных солитонов деформации // *Письма в ЖТФ*, 2016. Т. 42. Вып 3. С. 16–22.
12. Карабутов А. А., Подымова Н. Б., Черепецкая Е. Б. Измерение зависимости локального модуля Юнга от пористости изотропных композитных материалов импульсным акустическим методом с использованием лазерного источника ультразвука // *Прикладная механика и техническая физика*, 2013. № 3 (54). С. 181–190.



13. Маркин А. А. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд., доп. / А. А. Маркин, Д. В. Христич. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. – 92 с.
14. Толоконников Л.А., Маркин А.А. Определяющие соотношения при конечных деформациях // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Межвузов. сб. трудов / Калинин. политех. ин-т. Калинин: Изд-во КГУ. 1986. С. 49-57.
15. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. – 270 с.
16. Murnaghan F. D. Finite deformation of an elastic solid. John Wiley & Sons, New York. 1951. 140 p.
17. Шишкин А.В. Исследование физических свойств материалов. В 4 ч. Ч. 4.1. Испытания на растяжение : учеб.-метод. пособие / О.С. Дутова; А.В. Шишкин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. – 64 с; ISBN 978-5-7782-1970-0
18. Козлов В. В. Вопросы конкретизации определяющих соотношений нелинейной теории упругости на основе рассмотрения одноосного однородного растяжения / В.В. Козлов, А.А. Маркин // Известия ТулГУ. Естественные науки – Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. Вып. 4. С. 137–143
19. Седов Л. И. Механика сплошной среды : учебник для вузов. Т. 2. / Седов Л. И.; МГУ им. М. В. Ломоносова. 6-е изд. – СПб.: Лань, 2004. – 560 с; ISBN: 5-8114-0542-1
20. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды: Учебник / А.А. Ильюшин 3-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
21. Маркин А. А. Механика сплошной среды: Учеб. пособие / А. А. Маркин, К. Ю. Сотников. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2003. – 132 с; ISBN: 5-7679-0476-6 : 36.00

## REFERENCES

1. Rajagopal, K. R. & Rodriguez, C. 2024, “A mathematical justification for nonlinear constitutive relations between stress and linearized strain”, *Mathematical Physics*; DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.20977>
2. Lurie, A. I. 1990, *Nonlinear theory of elasticity*. Amsterdam, North-Holland, pp. 617.
3. Muravlev, A.V. 2011, “On a Representation of an Elastic Potential in A. A. Il'yushin's Generalized Strain Space”, *Mechanics of Solids*, vol. 46, pp. 77-79.
4. Bustamante R. & Rajagopal K.R. 2021, “A new type of constitutive equation for nonlinear elastic bodies. Fitting with experimental data for rubber-like materials”, *Proceedings of the Royal Society A*. vol. 477. no 2252. pp. 1–16; DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0330>
5. Průša, V., Rajagopal, K.R. & Tůma, K. 2020, “Gibbs free energy based representation formula within the context of implicit constitutive relations for elastic solids”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*. vol. 121; DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103433>
6. Montella, G., Govindjee, S. & Neff, P. 2015, “The exponentiated Hencky strain energy in modelling tire derived material for moderately large deformations”, *Journal of Engineering Materials and Technology, Transaction of the ASME*; DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90129-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90129-8)

7. Markin, A.A. & Sokolova, M.Y. 2007, “Nonlinear relations of anisotropic elasticity and the particular postulate of isotropy”, *J. Appl. Math. Mech.* vol. 71, no. 4, pp. 587-594.
8. Markin, A.A. & Sokolova, M.Y. 2019, “Variant of Nonlinear Elasticity Relations”, *Mechanics of Solids*. 2019. vol. 54. pp. 1182–1188; DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419080089>
9. Nguyen, S.T. & Khristich, D.V. 1977, “Identification of parameters of the quadratic model of elastic anisotropic material”, *I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. y. Series: Mechanics of Limit State*. no. 3 (49). pp. 3-11.
10. Minin, S.I. 2018, “Determination of third-order elastic moduli to measure stressed-strained states in metal structural components of nuclear power plants”, *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika*, no. 1, pp. 15-22; DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2018.1.02>
11. Garbuzov, F.E., Samsonov, A. M., Semenov, A.A. & Shvartz, A. G. 2016, “Determination of third-order elastic moduli via parameters of bulk strain solitons”, *Pisma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, vol. 42. no. 3. pp. 16–22; DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/20122604002>
12. Karabutov, A.A., Podymova, N.B. & Cherepetskaya, E. B. 2013, “Measuring the dependence of the local Young’s modulus on the porosity of isotropic composite materials by a pulsed acoustic method using a laser source of ultrasound”, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 54, no. 3, pp. 503–510; DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894413030218>
13. Markin, A. A. & Khristich, D. V. 2007, *Nonlinear Theory of Elasticity*. 2 edition. Tula State University Press, Tula, pp. 92; ISBN: 5-7679-1118-9: 4500.00
14. Tolokonnikov L.A. & Markin, A.A. 1986, “Constitutive laws at finite deformations”, *Problems of Mechanics of Deformable Solids. Interuniversity Collection of Works*. pp. 49-57.
15. Guz, A.N. 1973, *Stability of elastic bodies under finite deformation*. Naukova Dumka, Kyiv, pp. 270.
16. Murnaghan F.D. 1951, *Finite deformation of an elastic solid*. John Wiley & Sons, New York. 1951. pp 140.
17. Shishkin, A.V. & Dutova, O.S. 2012, *Study of physical properties of materials. Part 4.1. Tensile tests*. Novosibirsk State University Press, Novosibirsk. pp 64; ISBN: 978-5-7782-1970-0
18. Kozlov, V.V. & Markin, A.A. 2015, “Questions specification of the defining relationships of nonlinear elasticity theory by considering uniaxial homogeneous tension”, *Izvestiya Tula State University. Physical sciences, Tula*, vol. 4, pp. 137-143.
19. Sedov, L. I. 2004, *Continuum Mechanics 6th*. Lan Publishing, Saint Petersburg, Vol. 2. pp. 560; ISBN: 5-8114-0542-1
20. Plyushin, A. A. 1990, *Continuum Mechanics 3rd edition*. Moscow University Press, Moscow, pp. 310.
21. Markin, A. A & Sotnikov, K.Y. 2003, *Continuum Mechanics*. Tula State University Press, Tula, vol.1. pp. 132; ISBN: 5-7679-0476-6 : 36.00

Получено: 03.07.2025

Принято в печать: 08.12.2025