ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 514.743 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-307-312

# Максимальные пучки Нийенхейса, содержащие подпучок симметричных $2 \times 2$-матриц[1]

М. М. Чернин

**Чернин Михаил Михайлович** — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Московский Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
*e-mail: chernin_03@mail.ru*

**Аннотация**

Линейное пространство операторных полей, состоящее из операторов Нийенхейса, называют пучком Нийенхейса. Интересными примерами таких пучков являются максимальные (по включению) пучки Нийенхейса. Случай, когда максимальный пучок Нийенхейса содержит подпучок симметричных постоянных $(n \times n)$-матриц (в некоторой фиксированной системе координат), недавно рассматривался в работе [4], в которой было получено полное описание таких максимальных пучков при $n \geqslant 3$. Как оказалось, случай $n = 2$ требует отдельного исследования. Эта задача решена в данной работе.

*Ключевые слова:* операторы Нийенхейса, скобка Фролихера – Нийенхейса, нийенхейсовы пучки.

*Библиография:* 4 названия.

**Для цитирования:**
Чернин М. М. Максимальные пучки Нийенхейса, содержащие подпучок симметричных $2 \times 2$-матриц // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 307–312.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 514.743 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-307-312

# Maximal Nijenhuis pencils containing the subpencil of symmetric $2 \times 2$-matrices

M. M. Chernin

**Chernin Mikhail Mikhailovich** — Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
*e-mail: chernin_03@mail.ru*

[1]Исследование выполнено в МГУ имени М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-00450).

**Abstract**

A linear space of operator fields that consists of Nijenhuis operators is called a Nijenhuis pencil. Maximal (by inclusion) Nijenhuis pencils serve as interesting examples of such pencils. The case when maximal Nijehuis pencil contains a subpencil of symmetric constant $(n \times n)$-matrices (in some fixed coordinate system) was recently investigated in paper [4], in which the complete description of such maximal pencils was obtained for $n \geqslant 3$. As it turned out, the case $n = 2$ requires special research. This problem is solved in the present paper.

*Keywords:* Nijenhuis operators, Frolicher – Nijenhuis bracket, Nijenhuis pencils.

*Bibliography:* 4 titles.

**For citation:**
Chernin, M. M. 2025, "Maximal Nijenhuis pencils containing the subpencil of symmetric $2 \times 2$-matrices" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 307–312.

# 1. Введение

Операторы Нийенхейса естественным образом возникают в различных задачах, связанных с геометрией, алгеброй, математической физикой (см., например, [1, 2]). В частности, в теории интегрируемых систем важную роль играют пространства операторных полей, состоящие из операторов Нийенхейса, которые называют пучками Нийенхейса (см. [3]). Интересными примерами таких пучков являются максимальные (по включению) пучки Нийенхейса. Например, в недавней работе [4] рассматривались пучки Нийенхейса, содержащие подпучок симметричных постоянных $(n \times n)$-матриц (в некоторой фиксированной системе координат), где было получено полное описание максимальных пучков, обладающих этим свойством, при $n \geqslant 3$. Как оказалось, в случае $n = 2$ требуется дополнительное исследование для описания максимальных нийенхейсовых пучков указанного типа, что и сделано в данной работе.

Напомним необходимые определения.

*Скобка Фролихера – Нийенхейса* $[[\ ,\ ]]$ двух тензорных полей типа $(1, 1)$ (операторных полей) $L$ и $R$ на многообразии $M^n$ задается формулой

$$[[L, R]](\xi, \eta) = L[\xi, R\eta] + R[L\xi, \eta] + R[\xi, L\eta] + L[R\xi, \eta] - [L\xi, R\eta] - [R\xi, L\eta] - LR[\xi, \eta] - RL[\xi, \eta],$$

где $\xi, \eta$ — произвольные векторные поля, а $[\ ,\ ]$ — стандартный коммутатор векторных полей. Это выражение определяет кососимметричный по нижним индексам тензор типа $(1, 2)$.

*Кручение Нийенхейса* — это тензор $\mathcal{N}_L = \frac{1}{2}[[L, L]]$, где $L$ — операторное поле.

Операторное поле $L$ называют *оператором Нийенхейса*, если $\mathcal{N}_L = 0$.

*Нийенхейсов пучок* $\mathcal{P}$ — это такое подпространство в бесконечномерном линейном пространстве тензорных полей типа $(1, 1)$ на многообразии $M^n$, что для любых $L, R \in \mathcal{P}$ выполнено условие $[[L, R]] = 0$.

*Централизатор* $C(\mathcal{P})$ *нийенхейсова пучка* $\mathcal{P}$ — это линейное пространство, состоящее из таких операторных полей $L$, что $[[L, R]] = 0$ для любого операторного поля $R \in \mathcal{P}$.

По определению пучок Нийенхейса $\mathcal{P}$ *максимален*, если любое операторное поле $L$, для которого $[[L, R]] = 0$ для всех $R \in \mathcal{P}$, лежит в $\mathcal{P}$. Иными словами, пучок Нийенхейса $\mathcal{P}$ *максимален*, если он не является подпучком никакого большего пучка.

Пусть $\mathcal{S}$ — пучок Нийенхейса, который состоит из операторов, матрицы которых в данной системе координат симметричны. Задача описания всех нийенхейсовых пучков, содержащих $\mathcal{S}$, рассматривалась А. Ю. Коняевым в работе [4], где им был получен ответ для $n \geq 3$. А именно, им было показано, что в фиксированных координатах $u^1, \ldots, u^n$ любой максимальный нийенхейсов пучок, содержащий $\mathcal{S}$, совпадает либо с $\mathcal{A}$, либо с $\mathcal{B}$, где

$\mathcal{A} = \{$Операторы, матрицы которых в данной системе координат имеют вид $l^i_j = a^i_j + u^i c^j$, где $a^i_j$ — компоненты произвольной постоянной матрицы $A$, а $c^j$, $j = 1, \ldots, n$ — произвольные константы.$\}$

$\mathcal{B} = \{$Операторы, матрицы которых в данной системе координат имеют вид $l^i_j = a^i_j + c^i u^j + u^i c^j + K u^i u^j$, где $a^i_j$ — компоненты произвольной симметрической постоянной матрицы $A$, а $K, c^1, \ldots, c^n$ — произвольные константы.$\}$.

В данной статье мы рассматриваем описанную задачу классификации максимальных нийенхейсовых пучков, содержащих $\mathcal{S}$, при $n = 2$. Как оказалось, полученный ответ совпадает с результатом для $n \geq 3$.

## 2. Классификация максимальных пучков, содержащих $\mathcal{S}$

Для описания максимальных нийенхейсовых пучков, содержащих $\mathcal{S}$, целесообразно сначала найти
$C(\mathcal{S}) = \{L \mid | [[L, R]] = 0 \, \forall R \in \mathcal{S}\}$, т.е. централизатор пучка $\mathcal{S}$.

Теорема 1. *Централизатор $C(\mathcal{S})$ при $n = 2$ состоит из операторов с матрицами $R = (r^i_j)$ вида*

$$\begin{bmatrix} \frac{Dx^2}{2} + C_1 x + N & f_3(x,y) \\ C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y) & \frac{Dy^2}{2} + C_2 y + M \end{bmatrix},$$

*где $A, C_1, C_2, D, M, N$ — произвольные вещественные числа, $x, y$ — локальные координаты на многообразии $M^2$, а $f_3(x,y)$ — произвольная дифференцируемая функция.*

Доказательство. Пусть $L \in \mathcal{S}$ — оператор, матрица которого в фиксированной системе координат $(x, y)$ диагональна с различными числами $\lambda_1$ и $\lambda_2$ на диагонали. Положим $x = u^1$, $y = u^2$. Тогда для любого $R \in C(\mathcal{S})$

$$[[R, L]](\partial_{u^1}, \partial_{u^2}) = L[R\partial_{u^1}, \partial_{u^2}] + L[\partial_{u^1}, R\partial_{u^2}] - [R\partial_{u^1}, L\partial_{u^2}] - [L\partial_{u^1}, R\partial_{u^2}] =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{2} \left( \lambda_\alpha \frac{\partial r^\alpha_1}{\partial u^2} - \lambda_\alpha \frac{\partial r^\alpha_2}{\partial u^1} - \lambda_2 \frac{\partial r^\alpha_1}{\partial u^2} + \lambda_1 \frac{\partial r^\alpha_2}{\partial u^1} \right) \partial_{u^\alpha} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $\partial_{u^1}$ и $\partial_{u^2}$, получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2) \dfrac{\partial r^1_1}{\partial u^2} = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \dfrac{\partial r^2_2}{\partial u^1} = 0 \end{cases}, \qquad (1)$$

из которой вытекает (так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$), что $r^1_1$ не зависит от $u^2$, а $r^2_2$ — от $u^1$.

Теперь рассмотрим $L \in \mathcal{S}$ такой, что $L\partial_{u^1} = \partial_{u^2}$ и $L\partial_{u^2} = \partial_{u^1}$. Тогда для любого $R \in C(\mathcal{S})$ (здесь идет суммирование по $\alpha$)

$$[[R, L]](\partial_{u^1}, \partial_{u^2}) = L[R\partial_{u_1}, \partial_{u_2}] + L[\partial_{u_1}, R\partial_{u_2}] - [R\partial_{u_1}, L\partial_{u_2}] - [L\partial_{u_1}, R\partial_{u_2}] =$$
$$= L[R\partial_{u_1}, \partial_{u_2}] + L[\partial_{u_1}, R\partial_{u_2}] - [R\partial_{u_1}, \partial_{u_1}] - [\partial_{u_2}, R\partial_{u_2}] =$$
$$= -\frac{\partial r^1_1}{\partial u^2}\partial_{u^2} - \frac{\partial r^2_1}{\partial u^2}\partial_{u^1} + \frac{\partial r^1_2}{\partial u^1}\partial_{u^2} + \frac{\partial r^2_2}{\partial u^1}\partial_{u^1} + \frac{\partial r^\alpha_1}{\partial u^1}\partial_{u^\alpha} - \frac{\partial r^\alpha_2}{\partial u^2}\partial_{u^\alpha} =$$
$$= -\left( \frac{\partial r^2_1}{\partial u^2} + \frac{\partial r^1_2}{\partial u^2} - \frac{\partial r^1_1}{\partial u^1} \right) \partial_{u^1} + \left( \frac{\partial r^1_2}{\partial u^1} + \frac{\partial r^2_1}{\partial u^1} - \frac{\partial r^2_2}{\partial u^2} \right) \partial_{u^2} = 0,$$

где учтено, что $\frac{\partial r_2^2}{\partial u^1} = \frac{\partial r_1^1}{\partial u^2} = 0$. Таким образом, мы получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_1^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial r_2^1}{\partial u^2} - \dfrac{\partial r_1^1}{\partial u^1} = 0 \\ \dfrac{\partial r_2^1}{\partial u^1} + \dfrac{\partial r_1^2}{\partial u^1} - \dfrac{\partial r_2^2}{\partial u^2} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Выше было выведено, что $r_1^1$ не зависит от $y$, а $r_2^2$ не зависит от $x$, поэтому

$$r_1^1(x,y) = f_1(x) \quad \text{и} \quad r_2^2(x,y) = f_2(y).$$

Продифференцировав первое уравнение системы (2) по $y$, а второе по $x$, получим, что

$$r_1^2(x,y) + r_2^1(x,y) = C_1 y + C_2 x + A + Dxy.$$

Итак, получаем систему

$$\begin{cases} r_1^2(x,y) + r_2^1(x,y) = C_1 y + C_2 x + A + Dxy \\ r_1^1(x) = f_1(x) \\ r_2^2(y) = f_2(y) \end{cases} \tag{3}$$

Из системы (2) следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_1^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial r_2^1}{\partial u^2} = \dfrac{\partial r_1^1}{\partial u^1} = f_1'(x) \\ \dfrac{\partial r_2^1}{\partial u^1} + \dfrac{\partial r_1^2}{\partial u^1} = \dfrac{\partial r_2^2}{\partial u^2} = f_2'(y) \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} C_1 + Dx = f_1'(x) \\ C_2 + Dy = f_2'(y) \end{cases}$$

Система (3) принимает вид

$$\begin{cases} r_1^2(x,y) + r_2^1(x,y) = C_1 y + C_2 x + A + Dxy \\ r_1^1(x) = \dfrac{Dx^2}{2} + C_1 x + N \\ r_2^2(y) = \dfrac{Dy^2}{2} + C_2 y + M \end{cases}$$

Положим $r_2^1(x,y) = f_3(x,y)$. Тогда

$$r_1^2(x,y) = C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y).$$

Получаем, что операторы из $C(\mathcal{S})$ имеют матрицы вида

$$R = \begin{bmatrix} \frac{Dx^2}{2} + C_1 x + N & f_3(x,y) \\ C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y) & \frac{Dy^2}{2} + C_2 y + M \end{bmatrix}.$$

■

Таким образом, мы получили централизатор пучка $\mathcal{S}$. Теперь нам нужно найти пучки Нийенхейса. Для этого необходимо наложить дополнительное условие $[[R,R]] \equiv 0$, то есть $(\mathcal{N}_R)_{12}^1 \equiv 0$ и $(\mathcal{N}_R)_{12}^2 \equiv 0$.

Как известно, в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ компоненты $(\mathcal{N}_L)^i_{jk}$ тензора $\mathcal{N}_L$ определяются по следующей формуле:

$$(\mathcal{N}_L)^i_{jk} = L^l_j \frac{\partial L^i_k}{\partial x^l} - L^l_k \frac{\partial L^i_j}{\partial x^l} - L^i_l \frac{\partial L^l_k}{\partial x^j} + L^i_l \frac{\partial L^l_j}{\partial x^k},$$

где $L^i_j$ обозначают компоненты $L$. Тогда в нашем случае

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_R)^1_{12} &= r^l_1 \frac{\partial r^1_2}{\partial u^l} - r^l_2 \frac{\partial r^1_1}{\partial u^l} - r^1_l \frac{\partial r^l_2}{\partial u^1} + r^1_l \frac{\partial r^l_1}{\partial u^2} = \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x} \cdot \Big(\frac{Dx^2}{2} + C_1 x + N\Big) + \frac{\partial f_3}{\partial y} \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y)) - \\ &\quad - (Dx + C_1) \cdot f_3(x,y) - \Big(\frac{Dx^2}{2} + C_1 x + N\Big) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x} + f_3(x,y) \cdot \Big(C_1 + Dx - \frac{\partial f_3}{\partial y}\Big) = \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial y} \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - 2 f_3(x,y)) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_R)^2_{12} &= r^l_1 \frac{\partial r^2_2}{\partial u^l} - r^l_2 \frac{\partial r^2_1}{\partial u^l} - r^2_l \frac{\partial r^l_2}{\partial u^1} + r^2_l \frac{\partial r^l_1}{\partial u^2} = \\ &= (Dy + C_2) \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y)) - f_3(x,y) \cdot \Big(C_2 + Dy - \frac{\partial f_3}{\partial x}\Big) - \\ &\quad - \Big(\frac{Dy^2}{2} + C_2 y + M\Big) \cdot \Big(C_1 + Dx - \frac{\partial f_3}{\partial y}\Big) - \\ &\quad - (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x} + \Big(\frac{Dy^2}{2} + C_2 y + M\Big)\Big(C_1 + Dx - \frac{\partial f_3}{\partial y}\Big) = \\ &= \Big(C_2 + Dy - \frac{\partial f_3}{\partial x}\Big) \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - 2 f_3(x,y)) = 0\end{aligned}$$

для любых $x, y$.

Так мы получаем систему из двух уравнений, задающих условия на коэффициенты матрицы $R$ из формулировки теоремы 1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - 2 f_3(x,y)) = 0 \\ (C_2 + Dy - \dfrac{\partial f_3}{\partial x}) \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - 2 f_3(x,y)) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

**Первый случай**: $C_1 y + C_2 x + A + Dxy - 2 f_3(x,y) = 0$, то есть $f_3(x,y) = \frac{1}{2}(C_1 y + C_2 x + A + Dxy)$. Тогда

$$R = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Dx^2}{2} + C_1 x & \frac{1}{2}(Dxy + C_1 y + C_2 x + A) \\ \frac{1}{2}(Dxy + C_1 y + C_2 x + A) & \frac{Dy^2}{2} + C_2 y \end{bmatrix}. \tag{5}$$

**Второй случай**: $\frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$, то есть $f_3 = f_3(x)$. Из второго уравнения системы (4) имеем

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = C_2 + Dy,$$

то есть

$$f_3(x) = x \cdot (C_2 + Dy) + g(y).$$

У нас $\frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$, поэтому $\frac{\partial f_3}{\partial y} = Dx + g'(y) \equiv 0$, то есть $f_3(x) = C_2 x + C$, где $C$ — константа. В итоге

$$R = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 x & C_2 x + C \\ C_1 y + A - C & C_2 y \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Таким образом, мы получаем два максимальных нийенхейсовых пучка $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$:

$\mathcal{P}_1 = \{$Операторы, матрицы которых в данной системе координат $(x, y)$ имеют вид (5)$\}$,

$\mathcal{P}_2 = \{$Операторы, матрицы которых в данной системе координат $(x, y)$ имеют вид (6)$\}$.

Ясно, что $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{S}$, $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \subset C(\mathcal{S})$. Как мы выяснили, множество операторов Нийенхейса в централизаторе совпадает с $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. По определению любой максимальный нийенхейсов пучок $\mathcal{P}$, содержащий $\mathcal{S}$, целиком лежит в $C(\mathcal{S})$ и, так как пучок — это линейное пространство, целиком лежит либо в $\mathcal{P}_1$, либо в $\mathcal{P}_2$. Так как эти пучки максимальны, $\mathcal{P}$ совпадает с одним из них. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *В фиксированных координатах $x, y$ любой максимальный нийенхейсов пучок, содержащий $\mathcal{S}$, совпадает либо с $\mathcal{P}_1$, либо с $\mathcal{P}_2$, где матрицы операторов из пучков $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ задаются матрицами вида $R_1$ и $R_2$ соответственно:*

$$R_1 = \begin{bmatrix} m & a \\ a & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Dx^2 & Dxy \\ Dxy & Dy^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2C_1x & C_1y + C_2x \\ C_1y + C_2x & 2C_2y \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} m & a \\ b & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1x & C_2x \\ C_1y & C_2y \end{bmatrix}.$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bolsinov A. V., Konyaev A. Yu., Matveev V. S. Nijenhuis geometry // Adv. Math. 2022. Vol. 394, Article 108001.

2. Konyaev A. Yu. Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators // Differential Geom. Appl., 2021. Vol. 74, Article 101706.

3. Bolsinov A. V., Konyaev A. Yu., Matveev V. S. Applications of Nijenhuis geometry II: maximal pencils of multi-Hamiltonian structures of hydrodynamic type // Nonlinearity, 2021. Vol. 34, №8. P. 5136–5162.

4. Коняев А. Ю. Симметрические матрицы и максимальные нийенхейсовы пучки // Матем. сб., 2023. Т. 214, №8. С. 53–62.

## REFERENCES

1. Bolsinov, A. V., Konyaev, A. Yu. & Matveev, V. S. 2022, "Nijenhuis geometry", *Adv. Math.*, vol. 394, Article 108001.

2. Konyaev, A. Yu. 2021, "Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators", *Differential Geom. Appl.*, vol. 74, Article 101706.

3. Bolsinov, A. V., Konyaev A. Yu. & Matveev V. S. 2021, "Applications of Nijenhuis geometry II: maximal pencils of multi-Hamiltonian structures of hydrodynamic type", *Nonlinearity*, vol. 34, no. 8. pp. 5136–5162.

4. Konyaev, A. Yu. 2023, "Symmetric matrices and maximal Nijenhuis pencils", *Sbornik: Math.*, vol. 214, no. 8, pp. 1101–1110.

Получено: 09.04.2025
Принято в печать: 08.12.2025