

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 517

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-299-306

Об одной цепи Маркова, связанной с системой счисления

С. Е. Тюрин, В. Н. Соболев

Тюрин Станислав Евгеньевич — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: stanislav.turin@math.msu.ru

Соболев Виталий Николаевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; РТУ МИРЭА (г. Москва).

e-mail: vitalii.sobolev@math.msu.ru

Аннотация

Исследуется задача нахождения стационарной цепи Маркова с максимальной энтропией на множестве бесконечных двоичных последовательностей, запрещающих появление трёх единиц подряд. Установлена связь этой задачи с системой счисления с нецелым основанием, изученной А. О. Гельфондом. Дана вероятностная интерпретация распределения остатков Гельфонда в терминах эргодической цепи Маркова с тремя состояниями. В качестве основного результата явно указаны параметры искомой экстремальной цепи. Показано, что матрица переходных вероятностей и стационарное распределение выражаются через корень $\theta > 1$ уравнения $1 = \theta^{-1} + \theta^{-2} + \theta^{-3}$. Энтропия найденной цепи равна $\ln \theta$, что определяет максимально достижимую непредсказуемость в классе рассматриваемых последовательностей с данным запретом.

Ключевые слова: цепь Маркова, максимальная энтропия, бинарные последовательности, запрещённые подпоследовательности, система счисления Гельфонда, стационарное распределение.

Библиография: 6 названия.

Для цитирования:

Тюрин С. Е., Соболев В. Н. Об одной цепи Маркова, связанной с системой счисления // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 299–306.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 517

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-299-306

About a Markov chain connected with the number system

S. E. Tyurin, V. N. Sobolev

Tyurin Stanislav Evgenievich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: stanislav.turin@math.msu.ru

Sobolev Vitaliy Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; RTU MIREA (Moscow).

e-mail: vitalii.sobolev@math.msu.ru

Abstract

This work addresses the problem of finding a stationary Markov chain with maximum entropy on the set of infinite binary sequences that forbid three consecutive ones. A connection is established between this problem and the non-integer base numeration system studied by A. O. Gelfond. A probabilistic interpretation of Gelfond's distribution of remainders is provided in terms of a three-state ergodic Markov chain. As the main result, the parameters of the extremal chain are explicitly determined. It is shown that the transition probability matrix and the stationary distribution are expressed via the root $\theta > 1$ of the equation $1 = \theta^{-1} + \theta^{-2} + \theta^{-3}$. The entropy of the resulting chain equals $\ln \theta$, which defines the maximum achievable entropy in the class of sequences with this forbidden pattern.

Keywords: Markov chain, maximum entropy, binary sequences, forbidden subsequences, Gelfond's numeration system, stationary distribution.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

Tyurin, S. E., Sobolev, V. N. 2025, "About a Markov chain connected with the number system", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 299–306.

1. Введение

Рассмотрим множество всех бесконечных бинарных последовательностей с запретом на три подряд идущие единицы [1]. Будем моделировать такие последовательности как траектории некоторой цепи Маркова [2] с тремя состояниями, где состояние процесса определяется окончанием формируемой последовательности:

- Состояние C_0 : последовательность заканчивается на 0.
- Состояние C_1 : последовательность заканчивается на 01.
- Состояние C_2 : последовательность заканчивается на 011.

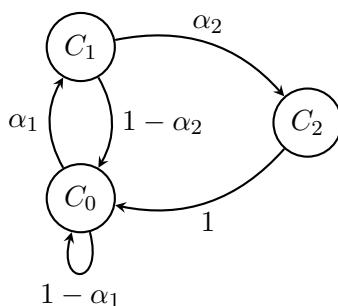
Запрет на три единицы подряд означает, что переход (путем добавления символа) из состояния C_2 возможен только в состояние C_0 .

На основании введённых состояний определим цепь Маркова, задав начальное распределение

$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ и матрицу переходных вероятностей P .

Пусть параметры α_1, α_2 задают вероятности добавления единицы при условии, что этот переход допустим.

Тогда цепь Маркова можно представить в виде графа переходов из одного состояния в другое:



Её матрица переходных вероятностей P имеет вид:

$$\begin{matrix} & C_0 & C_1 & C_2 \\ \begin{matrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ 1 - \alpha_2 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

где строки и столбцы соответствуют состояниям C_0, C_1, C_2 в указанном порядке.

Среди всех стационарных цепей Маркова [2], порождающих допустимые последовательности, нас интересует цепь с максимальной энтропией [3].

ТЕОРЕМА 1. *Стационарная цепь Маркова, порождающая двоичные последовательности без трех подряд идущих единиц и имеющая максимальную энтропию, определяется матрицей переходных вероятностей*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} & \frac{\theta-1}{\theta} & 0 \\ \frac{\theta}{\theta+1} & 0 & \frac{1}{\theta+1} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в которой $\theta \in (1, 2)$ – корень уравнения

$$1 = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^3},$$

и стационарным распределением $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, которое задаётся

$$\pi = \left(\frac{\theta^3}{\theta^3 + \theta + 2}, \frac{\theta + 1}{\theta^3 + \theta + 2}, \frac{1}{\theta^3 + \theta + 2} \right).$$

Основная идея работы состоит в установлении связи представленной в данной теореме цепи Маркова с системой счисления с нецелым основанием, изученной А. О. Гельфондом [4].

2. Система счисления

2.1. Система счисления А. О. Гельфонда

Пусть $\theta > 1$ – фиксированное нецелое число (случай целого θ см. в [5], мы его рассматривать не будем). Тогда для всякое число $0 \leq \alpha \leq 1$, можно однозначно представить рядом

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\theta^i} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\theta^i} + \frac{x_{n+1}}{\theta^n}, \quad 0 \leq x_n < 1,$$

где λ_i – целые числа, удовлетворяющие $0 \leq \lambda_i < \theta$ и $x_n = x_n(\alpha)$, если последовательно определять эти числа соотношениями:

$$x_1 = \alpha, x_2 = \{\theta x_1\}, \dots, x_{n+1} = \{\theta x_n\}, \dots \quad (1)$$

$$\lambda_1 = [\alpha\theta], \dots, \lambda_n = [\theta x_n], \dots \quad (2)$$

Здесь $\{\}, []$ – дробная и целая часть числа соответственно.

А. О. Гельфонд для описания закона распределения остатков $x_n(\alpha)$ при произвольном нецелом θ ввел числа t_n . Рассмотрим частный случай разложения, для $\alpha = 1$. Тогда из общих соотношений получаем:

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(1)}{\theta^i} + \frac{t_{n+1}}{\theta^n}, \quad t_1 = 1,$$

где $t_n = x_n(1)$ – это остатки, возникающие при разложении единицы.

По этим остаткам А. О. Гельфонд определяет константу

$$\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{\theta^{i-1}}.$$

2.2. Теорема А.О. Гельфонда

Говорят, что последовательность остатков $x_n(\alpha)$ имеет закон распределения $\sigma(t)$, если для почти всех α , существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi(1 - t + x_n) = \sigma(t),$$

где $\psi(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}.$

ТЕОРЕМА 2 (А. О. Гельфонд). *Если $\theta > 1$ – не целое число, то почти для всех имеет место соотношение*

$$\sigma(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\min(t, t_i)}{\theta^{i-1}},$$

где функция $\psi(x)$ и числа $\tau, t_1, t_2, \dots$ определены выше.

В контексте нашей задачи представляет интерес частный случай, в котором θ удовлетворяет уравнению

$$1 = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}.$$

В соответствии с рекуррентными соотношениями (1), найдем числа $t_1, t_2, t_3, \dots$ и константу τ . Они выражаются через корень θ :

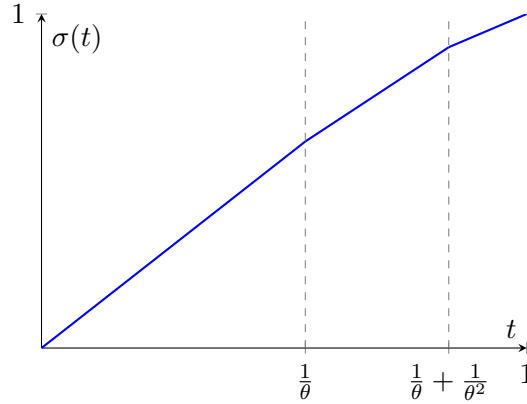
$$t_m = \begin{cases} \sum_{i=1}^{4-m} \frac{1}{\theta^i}, & 1 \leq m \leq 3, \\ 0, & m > 3, \end{cases}, \quad \tau = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{\theta^{i-1}} = \frac{3}{\theta^3} + \frac{2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta}.$$

Подставляя найденные значения t_m и τ в теорему Гельфонда, получаем явный вид закона распределения $x_n(\alpha)$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \sum_{l=1}^3 \frac{t}{\theta^{l-1}} & t \in [0, t_3] \\ \frac{1}{\tau} \left(\sum_{l=1}^m \frac{t}{\theta^{l-1}} + \sum_{l=m+1}^3 \frac{t_l}{\theta^{l-1}} \right) & t \in [t_{m+1}, t_m] \end{cases} \quad (3)$$

где $m = 1, 2$.

Для того чтобы проиллюстрировать это распределения построим график:



2.3. Последовательности без трех подряд идущих единиц и система счисления

ЛЕММА 1. Разложение по основанию θ , удовлетворяющему уравнению $1 = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}$, обладает следующим свойством: для почти всех $\alpha \in [0, 1)$ соответствующая ему последовательность $\{\lambda_i\}$, полученная из (2), не содержит трёх подряд идущих единиц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство выполним от противного, пусть в последовательности $\{\lambda_i\}$ есть три единицы подряд. Тогда в разложении числа α по основанию θ найдутся подряд идущие слагаемые

$$\frac{1}{\theta^l} + \frac{1}{\theta^{l+1}} + \frac{1}{\theta^{l+2}} = \frac{1}{\theta^{l-1}}. \quad (4)$$

Сопоставив два разложения α с остаточными членами $x_{l-1}(\alpha)$ и $x_{l+3}(\alpha)$, получим равенство

$$S + \frac{x_{l-1}(\alpha)}{\theta^{l-2}} = S + \frac{\lambda_{l-1}}{\theta^{l-1}} + \left(\frac{1}{\theta^l} + \frac{1}{\theta^{l+1}} + \frac{1}{\theta^{l+2}} \right) + \frac{x_{l+3}(\alpha)}{\theta^{l+2}},$$

где S – совпадающая часть разложений до позиции $l-1$. Откуда

$$\frac{x_{l-1}(\alpha)}{\theta^{l-2}} = \frac{\lambda_{l-1}}{\theta^{l-1}} + \frac{1}{\theta^{l-1}} + \frac{x_{l+3}(\alpha)}{\theta^{l+2}} \Rightarrow [\theta x_{l-1}(\alpha)] = \lambda_{l-1} + 1,$$

что противоречит определению $\lambda_{l-1} = [\theta x_{l-1}]$. $\square$ Таким образом наше ограничение на последовательности в виде количества подряд идущих единиц, оказывается встроенным в структуру разложения числа $\alpha \in [0, 1)$ по основанию θ .

3. Цепь Маркова

3.1. Марковская модель для распределения А. О. Гельфонда

Проанализируем структуру полученного распределения $\sigma(t)$ заданного формулой (3). Заметим, что функция распределения имеет изломы в точках $\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}$. Они разбивают отрезок $[0, 1]$ на интервалы $[0, \frac{1}{\theta})$, $[\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2})$ и $[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}, 1)$. Последовательность $\{\lambda_i\}$ для числа α из интервалов:

- $[0, \frac{1}{\theta})$ начинается на 0
- $[\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2})$ начинается на 10
- $[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}, 1)$ начинается на 110

Таким образом для каждого $m = 0, 1, 2$ установлено взаимно однозначное соответствие между:

- Ровно m единиц в начале последовательности $\{\lambda_i\}$ в разложении А. О. Гельфонда
- Состояние C_m в цепи Маркова

3.2. Стационарный режим и энтропия

Исследуем стационарное распределение и энтропийные характеристики цепи Маркова, с заданной матрицей переходных вероятностей :

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ 1 - \alpha_2 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Известно [2], что стационарное распределение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ удовлетворяет системе уравнений, которую для нашей цепи можно записать в матричном виде как

$$\begin{cases} \pi P = \pi, \\ \sum_{i=1}^3 \pi_i = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Её решение имеет вид:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{1 + \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2}, \\ \pi_2 = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2}, \\ \pi_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 + \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2}. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, стационарное распределение существует и единственно для всех значениях $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, что также следует из эргодичности цепи, обусловленной возможностью попасть из любого состояния в любое другое за конечное число шагов.

Энтропия цепи Маркова [3] с матрицей переходных вероятностей (p_{ij}) и стационарным распределением (π_1, π_2, π_3) определяется формулой:

$$H = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \pi_i p_{ij} \ln(p_{ij}).$$

После подстановки p_{ij} из матрицы P энтропия цепи принимает вид:

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = - \sum_{i=1}^2 \pi_i [(1 - \alpha_i) \ln(1 - \alpha_i) + \alpha_i \ln \alpha_i].$$

Энтропия цепи Маркова из теоремы 1 будет равна

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = \ln \theta.$$

3.3. Максимизация энтропии

Установленное взаимно однозначное соответствие подсказывает нам вид стационарного распределения $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ для цепи Маркова с максимальной энтропией.

А именно, естественно предположить, что для значений $\sigma(t_m)$ имеет место следующее представление:

$$\left\{ \sigma(t_m) = \sum_{l=1}^{4-m} \pi_l, 1 \leq m \leq 3 \right. . \quad (7)$$

Из (3) и (7) найдем явный вид распределения π

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\pi_1}{t_3} t & t \in [0, t_3] \\ \frac{\pi_{4-m}}{t_m - t_{m+1}} t + \frac{t_{m+1}}{t_m - t_{m+1}} \pi_{4-m} + \sum_{l=1}^{3-m} \pi_l & t \in [t_{m+1}, t_m] \end{cases} \quad (8)$$

где $m = 1, 2$.

Сопоставляя коэффициенты при t в (3) и (8), получим связь между значениями стационарного распределения цепи Маркова и числами t_m из закона распределения А. О. Гельфонда в виде следующих соотношений:

$$\left\{ \pi_m = \frac{1-t_{5-m}}{\tau} \quad 1 \leq m \leq 3 \right. \quad (9)$$

Для полноты картины остается найти параметры α_1, α_2 , определяющие матрицу переходных вероятностей P , через числа t_m из закона распределения А. О. Гельфонда и через действительный корень θ уравнения, подобного уравнению для чисел Фибоначчи [6]. Из представлений (6) и (9) получаем явные формулы:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 - t_3 = \frac{\theta-1}{\theta} \\ \alpha_2 = \frac{1-t_2}{1-t_3} = \frac{1}{\theta+1} \end{cases}$$

4. Заключение

В работе решена задача о нахождении стационарной цепи Маркова с максимальной энтропией на множестве бинарных последовательностей без трёх подряд идущих единиц. Установлена связь этой задачи с системой счисления А. О. Гельфонда с основанием θ , являющимся корнем уравнения $1 = \theta^{-1} + \theta^{-2} + \theta^{-3}$. Данная связь позволяет находить стационарное распределение цепи Маркова через теорему А. О. Гельфонда, и наоборот.

Полученные результаты допускают естественное обобщение на случай запрета последовательности из k единиц (при $k = 2$ см. [6]). В этом случае параметры экстремальной цепи Маркова будут выражаться через корень $1 < \theta < 2$ уравнения

$$1 = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + \dots + \frac{1}{\theta^k},$$

а максимальная энтропия будет равна $\ln \theta$. Другим направлением дальнейших исследований является изучение цепей Маркова с максимальной энтропией, где запрещены конкретные комбинации подряд идущих символов.

5. Благодарности

Авторы приносят благодарность проф. В.Н. Чубарикову, к.ф.-м.н. В.В. Козлову и А. А. Фролову за постоянное внимание к данной работе и редакционные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики // Изв. Акад. Наук СССР. Сер. матем. — 1944. — Т. 8, № 1. — С. 3–48.
2. Ширяев А. Н. Вероятность. — 2-е изд., перераб. — М.: МЦНМО, 1999. — Т. 2. — 568 с.

3. Хинчин А. Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // Успехи математических наук. — 1953. — Т. 8, вып. 3(55). — С. 3–20.
4. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1940. — Т. 4, № 3. — С. 365–370.
5. Hardy G.H., Littlewood J.E. Some problems of diophantine approximation: Part I. The fractional part of $n_k Q$, // Acta Math., 1914, vol. 37, pp. 155–191.
6. Соболев В. Н., Фролов А. А. Об одном применении теоремы А.Н. Колмогорова // Чебышевский сборник, т. 26, № 5, с. 33–35.

REFERENCES

1. Goncharov, V.L. 1944, “From the field of combinatorics”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 8, no. 1, pp. 3–48.
2. Shiryaev, A.N. 1999, *Probability, Vol. 2*, 2nd edn, MTSNMO, Moscow.
3. Khinchin, A.Ya. 1953, “The concept of entropy in probability theory”, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol. 8, no. 3, pp. 3–20.
4. Gelfond, A.O. 1940, “On a general property of numeration systems”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 4, no. 3, pp. 365–370.
5. Hardy, G.H. & Littlewood, J.E. 1914, “Some problems of Diophantine approximation: Part I. The fractional part of $n_k \theta$ ”, *Acta Mathematica*, vol. 37, pp. 155–191.
6. Sobolev, V.N. & Frolov, A.A. 2025, “On the application of A.N. Kolmogorov’s Theorem”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. [номер первой страницы]–[номер последней страницы].

Получено: 06.09.2025

Принято в печать: 08.12.2025