ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-280-286

Об одной теореме Г. И. Архипова

Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков

Архипова Людмила Геннадьевна — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе в модельной ситуации исследуется обобщенное решение задачи Коши линеаризованного уравнения Кортевега – де Фриза. Решение представляется в виде тригонометрического ряда Виноградова, что позволяет свести вывод к методу Виноградова тригонометрических сумм Г. Вейля.

Ключевые слова: обобщенное решение задачи Коши, линеаризованное уравнение Кортевега – де Фриза, критерий Г. Вейля равномерного распределения последовательности по модулю единица, метод Виноградова, рациональные тригонометрические суммы, тригонометрические интегралы.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
Архипова Л. Г., Чубариков В. Н. Об одной теореме Г. И. Архипова // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 280–286.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-280-286

On one G.I.Arkhipov's theorem

L. G. Arkhipova, V. N. Chubarikov

Arkhipova Lyudmila Gennadievna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper in the model situation the generalized solution of the Cauchy problem of linearalized the Corteveg – de Vriz equation are investigated. The solution are represented as the Vinogradov's trigonometric series, that permits to reduce the deduction to the Vinigradov's method of the H.Weyl's trigonometric sums.

Keywords: a generalized solution of the Cauchy problem, the linearalized Corteveg – de Vriz equation, the H. Weyl criteria of the uniform distribution of a sequence modulo unit, the Vinogradov's method, rational trigonometric sums, trigonometric integrals.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
Arkhipova, L. G., Chubarikov, V. N. 2025, "On one G.I.Arkhipov's theorem" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 280–286.

1. Введение

Настоящая работа посвящается восьмидесятилетию со дня рождения Геннадия Ивановича Архипова (12.12.1945 – 14.03.2013). Теорема, о которой идет речь здесь, была сформулирована им в 2010 г. Доказательство ее дано в настоящей работе.

Г.И.Архипов и К.И.Осколков исследовали специальные тригонометрические ряды с многочленом в аргументе, — ряды И.М.Виноградова. Сформулируем их результат.

Пусть k — натуральное число, E — единичный k — мерный куб точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с действительными координатами $0 \le \alpha_s < 1, s = 1, \dots, k$, и пусть $f(x) = f_k(x) = \alpha_k x^k + \dots + \alpha_1 x$ — многочлен степени k. Пусть далее

$$h(f) = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i f(n)}}{n}$$

ряд Виноградова, в котором суммирование распространяется по всем целым $n \neq 0$, и его симметричные частичные суммы $h_N(f)$ имеют вид

$$h_N(f) = \sum_{1 \le |n| \le N} \frac{e^{2\pi i f(n)}}{n}, \quad N \ge 1.$$

Используя метод Виноградова оценок тригонометрических сумм [1], Г.И.Архипов и К.И.Осколков [2] доказали следующее утверждение о равномерной ограниченности последовательности симметричных частичных сумм $h_N(f)$.

Теорема A. *Пусть $k \ge 2$ — фиксированное натуральное число. Тогда для ненулевого многочлена $f_k \neq 0$ имеем*

$$\sup_{N \ge 1} \sup_{f_k} |h_N(f_k)| = g_k < \infty.$$

Более того, для каждого многочлена $f \neq 0$ последовательность $h_N(f)$ при $N \to \infty$ сходится, и сумма ряда $h(f)$, рассматриваемая как предел симметричных частичных сумм $h_N(f)$, ограничена всюду на множестве многочленов степени k.

В настоящей стаьее используются идеи и методы работ [1]-[13].

§1. Теорема Г.И.Архипова

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$ и пусть $A(x)=\sum_{a<n\le x}\alpha_n$. Тогда при любом $x\in[a,b]$ имеем*

$$\sum_{a<n\le x}\alpha_n f(n)=A(x)f(x)-\int\limits_a^x A(s)f'(s)\,ds.$$

Лемма 2. *Последовательность дробных частей $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю единица тогда и только тогда, когда при любом целом числе $m\ne 0$ имеем*

$$\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i m x_n}=0.$$

Лемма 3. *Пусть $f(x)$ в промежутке $M<x\le M'$ — вещественная дифференцируемая функция, причем внутри промежутка ее прvоизводная $f'(x)$ монотонна и знакопостоянна и при постоянном δ с условием $0<\delta<1$ удовлетворяет неравенству $|f''(x)|\le\delta$. Тогда имеем*

$$\sum_{M<x\le M'}e^{2\pi i f(x)}=\int\limits_M^{M'}e^{2\pi i f(x)}\,dx+\theta\left(3+\frac{2\delta}{1-\delta}\right),\quad |\theta|\le 1.$$

Лемма 1 — формула Абеля суммирования значений гладкой функции по целым точкам [14], лемма 2 — критерий Г.Вейля равномерного распределения последовательности вещественных чисел по модулю единица [14], лемма 3 принадлежит ван дер Корпуту [1].

Пусть $\{x\}$ — дробная часть числа x. Тогда имеем $\{x+1\}=\{x\},\quad 0\le\{x\}<1$.

Теорема. *Пусть $u=u(x,t)$ — обобщенное решение задачи Коши линеаризованного уравнения Кортевега – де Фриза вида*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\quad u|_{t=0}=\{x\}. \tag{1}$$

Тогда существует ограниченная и для всех иррациональных x непрерывная по x функция $u(x,t)$. Если же $x=\frac{p}{q},\quad (p,q)=1$, то функция $u(x,t)$ имеет точки разрыва первого рода со скачком $b(q)$ в количестве q на периоде.

Доказательство. Данное уравнение является уравнением с разделенными переменными. Представим его решение в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$. Получим

$$\frac{T'}{T}=\frac{X'''}{X}=\lambda,$$

где λ — постоянная разделения.

Отсюда находим $u(x,t)=e^{\lambda^3 t+\lambda x}$. Из начального условия имеем

$$\{x\}=\sum_n e^{\lambda_n x}=\sum_{n\ne 0}\frac{1}{2\pi i n}e^{2\pi i n x}.$$

Следовательно, $c_n=\frac{1}{2\pi i n}$. Тогда решение в задаче Коши имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n\ne 0}\frac{1}{2\pi i n}e^{2\pi i(nx-n^3 t)}. \tag{2}$$

Докажем, что ряд (2) равномерно сходится в окрестности иррациональной точки x при любом фиксированном значении t. Воспользуемся критерием Коши. Для этого при $1 \le N$ оценим сумму

$$T_N(x,t) = \sum_{0<|n|\le N} e^{2\pi i(nx-n^3t)}$$

исходя из критерия Г.Вейля (лемма 2) равномерного распределения по модулю 1 последовательности значений дробных частей $\{nx - tn^3\}$ при иррациональном значении x. При $N \to \infty$ находим

$$T_N(x,t) = o(N).$$

Следовательно, при полуцелых M и N по формуле Абеля суммирования значений гладкой функции по целым точкам имеем

$$|u_{M,N}(x,t)| = \left|\sum_{M<|n|\le N} \frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i(nx-n^3t)}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\left|\frac{T_N(x,t)}{N} - \int\limits_M^N \frac{T_s(x,t)}{s^2}\,ds\right| = o(1).$$

Отсюда по критерию Коши следует сходимость ряда $u(x,t)$ при иррациональном x.

Пусть далее $x = \frac{p}{q}, (p,q) = 1,$ — рациональное число. Рассмотрим решение $u(x,t)$ в окрестности точки $(x,t) = (\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}), (p_1,q_1) = 1$. Покажем, что в этой точке функция $u(x,t)$ имеет разрыв первого рода. Для этого найдем предел при $\Delta x \to 0$ справа и слева к точке $x = \frac{p}{q}$. Получим

$$u(x+\Delta x,t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{1\le|n|\le N} \frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i(n(x+\Delta x)-n^3t)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i(n(x+\Delta x)-n^3t)} - e^{-2\pi i(n(x+\Delta x)-n^3t)}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{T_N(x+\Delta x,t)}{N} - \int\limits_M^N \frac{T_s(x+\Delta x,t)}{s^2}\,ds\right),$$

где

$$T_s(v,t) = \sum_{0<n\le s} \sin 2\pi(nv - n^3t).$$

Преобразуем сумму $T_s(x+\Delta x,t)$ в точке $(\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q})$, представляя $n \le s$ в виде $n = qm+l, 1 \le l \le q,$ $(1-l)q^{-1} \le m \le (s-l)q^{-1}$. Находим

$$T_s(x+\Delta x,t) = \sum_{l=1}^{q} \sum_{(-l)q^{-1}\le m\le(s-l)q^{-1}} \sin 2\pi\left(\frac{pl-p_1l^3}{q} + (qm+l)\Delta x\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{q} \sin\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right) \sum_{(-l)q^{-1}\le m\le(s-l)q^{-1}} \cos\left(2\pi\Delta x(qm+l)\right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q} \cos\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right) \sum_{(-l)q^{-1}\le m\le(s-l)q^{-1}} \sin\left(2\pi\Delta x(qm+l)\right) + O(q).$$

Отсюда по лемме 3 имеем

$$T_s(x+\Delta x,t)=\frac{s}{q}\sum_{l=1}^{q}\sin\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)\int\limits_0^1\cos\left(2\pi y\Delta x\right)dy+$$

$$+\frac{s}{q}\sum_{l=1}^{q}\cos\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)\int\limits_0^1\sin\left(2\pi y\Delta x\right)dy+O(q)=$$

$$=-\frac{s}{q}\frac{\sin(2\pi\Delta x)}{2\pi\Delta x}\sum_{l=1}^{q}\sin\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)-$$

$$-\frac{s}{q}\frac{1-\cos(2\pi\Delta x)}{2\pi\Delta x}\sum_{l=1}^{q}\cos\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)+O(q).$$

Поскольку

$$\sum_{l=1}^{q}\sin\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)=0,$$

получим

$$T_s(x+\Delta x,t)=-\frac{s}{q}\frac{\sin^2(\pi\Delta x)}{\pi\Delta x}\sum_{l=1}^{q}\cos\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)+O(q).$$

Далее

$$\sum_{l=1}^{q}\cos\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)\neq 0,$$

следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0-}T_s\left(\frac{p}{q}+\Delta x,\frac{p_1}{q}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0+}T_s\left(\frac{p}{q}+\Delta x,\frac{p_1}{q}\right)$$

т.е. левосторонний предел не равен правостороннему пределу и функция

$$f(\Delta x)=T_s\left(\frac{p}{q}+\Delta x,\frac{p_1}{q}\right)$$

имеет в рассматриваемой точке разрыв первого рода.

Теорема доказана.$\square$

2. Заключение

После завершения доказательства утверждения теоремы приведем слова Л.Г. Архиповой к 80-летию со дня рождения Г.И.Архипова. “Посвящается моему дорогому отцу, который интересовался всем на свете и знал всё обо всём, мог просто и понятно ответить на любые вопросы. Любимым занятием для него всегда была математика, а теорию чисел он называл её венцом. Всю жизнь он старался вовлечь в свою науку всех, с кем общался, и щедро раздавал свои знания всем, кто был готов их принять, превращая математику в красивое и интересное занятие”.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2-е изд., Москва, Наука, 1980, 144 с.

2. Архипов Г. И., Осколков К. И. Специальные тригонометрические ряды и их применения// Матем. сб., 1989, **62,**No.2. С.145–155.

3. Осколков К. И. Ряды и интегралы И.М.Виноградова и их приложения// Тр. МИАН., 1989, **190,** С.186–221.

4. Осколков К. И. Ряды И.М.Виноградова в задаче Коши для уравнений типа Шрёдингера// Тр. МИАН., 1991, **200,** С.265–288.

5. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел, 2-е изд., Москва, Наука, 1983, 240 с.

6. Архипов Г. И. Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.

7. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 c.

8. Chubarikov,V.N. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian Int.Conf.“Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications”. Abstracts.(September 08-13, 2015, Baku-Azerbaijan). Linear arithmetic sums and Gaussian multiplication theorem. 2015, p.38.

9. Чубариков В. Н. Элементарный вывод оценки полной рациональной арифметической суммы от многочлена// Чебышевский сборник. — 2015. — Т.16,No.3(55). — С.452-461.

10. Чубариков В. Н. Показатель сходимости среднего значения полных рациональных арифметических сумм// Чебышевский сборник. — 2015. — Т.16,No.4(56). — С.303-318.

11. Чубариков В. Н. Арифметические суммы от значений полинома// Докл. РАН — 2016. — Т.466,No.2. — С.152-153.

12. Чубариков В. Н. Полные рациональные арифметические суммы// Вестн. Моск. ун-та. Сер.I, Математика, механика. 2015. No.1. 60-61.

13. Гияси А. Х., Чубариков В. Н. О рядах Виноградова по простым числам// Чебышевский сборник. — 2025. — Т.26,No.3. — С.81-95.

14. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов. Под ред. Садовничего В. А.. — 4-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2004. 640 с.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M. 1980, “Method of trigonometric sums in the number theory, 2nd edit.”, *Moscow, Nauka*, pp. 144.

2. Arkhipov, G. I., “Oskolkov, K. I. 1989, Special trigonometric series and their applications”, *Math. Trans.*, **62,**No.2. pp. 145 – 155.

3. Oskolkov, K. I. 1989, “I.M.Vinogradov’s series and integrals and their applications”, *Proc. MIAN.*, **190,** pp. 186 – 221.

4. Oskolkov, K. I. 1991, “I.M.Vinogradov’s series in the Caushy problem for equations of Schródinger type”, *Proc. MIAN.*, **200,** pp. 265 – 288.

5. Karatsuba, A. A. 1983, “Basics of analytic number theory, 2nd edit”, *Moscow, Nauka*, pp. 240.

6. Chubarikov, V. N. 2015, “The elementary deduction of the estimate of the complete rational arithmetical sum from a polynomial”, *Chebyshev Trans.*, V.16, № . 3(55), pp. 452 – 461.

7. Chubarikov, V. N. 2015, “The exponent of the convergence of the mean-value of complete rational arithmetical sums”, *Chebyshev Trans.*, V.16, № . 4(56), pp. 303 – 318.

8. Chubarikov, V. N. 2016, “Arithmetical sums from values of a polynomial”, *Dokl. RAS*, V.466, № . 2, pp. 152 – 153.

9. Chubarikov, V. N. 2015, “Complete rational arithmetical sums”, *Bull. Moscow. Univ. Ser.I, Math., mech.*, № . 1, pp. 60 – 61.

10. Gijasi, A. H., 2025, “Chubarikov, V. N. On Vinogradov’s series over prime numbers”, *Chebyshev Trans.*, V.26, № . 3, pp. 81 – 95.

11. Arkhipov, G. I., Sadovnichii, V. A., Chubarikov, V. N. 2004, “Lectures on mathematical analysis: Text-book for higher educ. of Inst. 4th edit.”, *M.: Drofa*, P. 640.

Получено: 19.03.2025
Принято в печать: 08.12.2025