

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511.7

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-221-245

Об одной задаче, связанной с законом повторного логарифма

Э. В. Тищенко

Тищенко Элина Викторовна — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; РТУ МИРЭА (г. Москва).

e-mail: elina.tischenko@math.msu.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача нахождения количества натуральных чисел, не превосходящих наперед заданного n , удовлетворяющих некоторым условиям на функцию $\nu(m)$ — количество простых делителей числа m . Данная работа обобщает результат М. В. Левека, который рассматривал значения функции ν в соседних точках натурального ряда. В статье же значения данной функции рассматриваются в соседних точках арифметической прогрессии. Решение опирается на взаимную простоту и следующую из этого «статистическую независимость» простых делителей соседних членов арифметической прогрессии.

Ключевые слова: закон повторного логарифма, статистическая независимость, простые числа.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:

Тищенко Э. В. Об одной задаче, связанной с законом повторного логарифма // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 221–245.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 511.7

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-221-245

On the problem related with a law of the iterated logarithm

E. V. Tishchenko

Tishchenko Elina Viktorovna — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University; RTU MIREA (Moscow).

e-mail: elina.tischenko@math.msu.ru

Abstract

In paper we consider the problem of finding the number of natural numbers that do not exceed a given n , satisfying certain conditions for the function $\nu(m)$ — the number of prime divisors of m . This work summarizes the result of M. V. Leveque, who considered the values of the function ν at consecutive terms of the natural series. In contrast, the present article examines the behavior of this function at consecutive points of an arithmetic progression. The solution relies on coprimality and the resulting statistical independence of the prime divisors of neighboring terms in the arithmetic progression.

Keywords: law of the iterated logarithm, statistical independence, prime numbers.

Bibliography: 8 titles.

For citation:

Tishchenko, E. V. 2025, “On the problem related with a law of the iterated logarithm”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 221–245.

1. Введение

Первые результаты, связанные с законом повторного логарифма, были получены в рамках симметричной схемы Бернулли с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной

$$1: P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2},$$

$i = 1, \dots, n$ ([1]). Обозначим $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

В 1913 году Ф. Хаусдорф доказал, что $|S_n| = O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ п.н. для любого $\varepsilon > 0$.

В 1914 году Г. Х. Харди и Дж. Литтлвуд получили более точную оценку, согласно которой $|S_n| = O(\sqrt{n \ln n})$ п.н.

В 1923 году А. Я. Хинчин показал, что $|S_n| = O(\sqrt{n \ln \ln n})$ п.н.

Годом позже он уточнил данный результат и получил закон повторного логарифма, а именно:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1 \text{ п.н.}$$

Пусть p обозначает простое число, m и n – натуральные числа, $\omega, \omega_1, \omega_2$ – действительные числа.

$$\text{Обозначим } D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Рассмотрим функцию количества простых делителей числа: $\nu(m) = \sum_{p|m} 1$.

В 1917 году Г. Х. Харди и С. Рамануджан ([2]) получили результат, похожий на закон повторного логарифма для функции $\nu(m)$, согласно которому если $f(n)$ – действительная функция, стремящаяся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, то количество чисел $m \leq n$ таких, что

$$\ln \ln n - f(n)\sqrt{\ln \ln n} < \nu(m) < \ln \ln n + f(n)\sqrt{\ln \ln n},$$

равно $n + o(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

В 1940 году П. Эрдёш и М. Кац ([3]) обобщили данный результат, доказав, что количество чисел $m \leq n$, удовлетворяющих условию

$$\nu(m) < \ln \ln n + \omega\sqrt{2 \ln \ln n},$$

равно $nD(\omega) + o(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

В. М. Левек в работе [4] рассмотрел систему неравенств на функцию ν и доказал, что количество $m \leq n$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} \nu(m) < \ln \ln n + \omega_1\sqrt{\ln \ln n} \\ \nu(m+1) < \ln \ln n + \omega_2\sqrt{\ln \ln n} \end{cases},$$

равно $nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Мы будем рассматривать функцию количества простых делителей в точках вида $mq + 1$:

$$\nu(mq + 1) = \sum_{p|mq+1} 1,$$

где $q = q(n)$ – некоторая последовательность, принимающая натуральные значения.

Основным результатом данной работы являются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q = q(n)$ – некоторая последовательность с условием

$$\exists C > 0 : q(n) < n^C, \forall n.$$

Тогда количество $m \leq n$ таких, что выполняются неравенства

$$\begin{cases} \nu(mq + 1) < \ln \ln n + \omega_1 \sqrt{\ln \ln n} \\ \nu((m+1)q + 1) < \ln \ln n + \omega_2 \sqrt{\ln \ln n} \end{cases}$$

равно $nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q = q(n)$ – некоторая последовательность с условием

$$\exists C > 0 : q(n) < n^C, \forall n.$$

Пусть $t_n(\omega) = |\{m \leq n : \nu(mq + 1) < \nu((m+1)q + 1) + \omega \sqrt{2 \ln \ln n}\}|$. Тогда

$$t_n(\omega) = nD(\omega) + o(n) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

откуда следует, что

$$P\left(\frac{\nu(mq + 1) - \nu((m+1)q + 1)}{\sqrt{2 \ln \ln n}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = D(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\text{где } P(f(m) < x) = \frac{|\{m \leq n : f(m) < x\}|}{n}.$$

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $f(m)$ – аддитивная функция, т.е. $f(mn) = f(m) + f(n)$, если $(m, n) = 1$. Если при этом $f(p^n) = f(p)$, то такая функция называется *сильно аддитивной*.

Если $f(m)$ – сильно аддитивная функция, то $f(m) = \sum_{p|m} f(p)$.

Назовем функции $f_1(m), f_2(m), \dots, f_k(m)$ *статистически независимыми*, если

$$M\left\{e^{i \sum_{j=1}^k f_j(m)}\right\} = \prod_{j=1}^k M\{e^{if_j(m)}\},$$

$$\text{где } M\{t(m)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{t(m)}{n}.$$

Нам потребуется следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть f – сильно аддитивная функция такая, что $|f(p)| \leq 1$ для всех простых p . Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, $q = q(n)$ – член некоторой последовательности, принимающей натуральные значения с условием

$$\exists C > 0 : q(n) < n^C \quad \forall n.$$

Обозначим

$$A_n = \sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q}} \frac{f(p)}{p}, \quad B_n = \sqrt{\sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q}} \frac{f^2(p)}{p}},$$

причем $B_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $N(n)$ – количество натуральных чисел $m \leq n$ таких, что выполняются условия

$$\begin{cases} f(mq+1) < A_n + \omega_1 B_n \\ f((m+1)q+1) < A_n + \omega_2 B_n \end{cases} \quad (1)$$

Тогда $N(n) = nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$.

Чтобы доказать теорему 3, нам потребуется сначала доказать предварительные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $f(p)$ – сильно аддитивная функция, $f_l^q(m) = \sum_{p|mq+1, p \leq l} f(p)$, $|f(p)| \leq 1$.

Обозначим

$$A_n = \sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q}} \frac{f(p)}{p}, \quad B_n = \sqrt{\sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q}} \frac{f^2(p)}{p}},$$

причем $B_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $N(l, n)$ – количество натуральных чисел $m \leq n$ таких, что выполняются условия

$$\begin{cases} f_l^q(m) < A_l + \omega_1 B_l \\ f_l^q(m+1) < A_l + \omega_2 B_l \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим $\delta_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(l, n)}{n}$ – плотность натуральных чисел m , удовлетворяющих условию (2). Тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \delta_l = D(\omega_1)D(\omega_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\rho_p^q(m) = \begin{cases} f(p), & \text{если } p \mid mq+1, \\ 0, & \text{если } p \nmid mq+1. \end{cases}$$

Тогда $f_l^q(m)$ переписывается в следующем виде:

$$f_l^q(m) = \sum_{p \leq l} \rho_p^q(m).$$

1. Докажем, что функции $a\rho_p^q(m) + b\rho_p^q(m+1)$, где a, b – произвольные фиксированные константы, не равные одновременно 0, статистически независимы. Для этого достаточно доказать, что

$$M \left\{ e^{i \sum_{p \in P} (a\rho_p^q(m) + b\rho_p^q(m+1))} \right\} = \prod_{p \in P} M \{ e^{i(a\rho_p^q(m) + b\rho_p^q(m+1))} \},$$

где $M\{t(m)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{t(m)}{n}$, P – произвольное множество, состоящее из простых чисел, меньших l .

Докажем данное утверждение для случая, когда P состоит из двух простых чисел p_1 и p_2 . Для других случаев доказательство аналогично. Таким образом, докажем, что

$$\begin{aligned} M \left\{ e^{i(a\rho_{p_1}^q(m) + b\rho_{p_1}^q(m+1) + a\rho_{p_2}^q(m) + b\rho_{p_2}^q(m+1))} \right\} = \\ = M \{ e^{i(a\rho_{p_1}^q(m) + b\rho_{p_1}^q(m+1))} \} M \{ e^{i(a\rho_{p_2}^q(m) + b\rho_{p_2}^q(m+1))} \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что

$$e^{ia\rho_{p_1}^q(m)} = 1 + \frac{e^{ia\alpha} - 1}{\alpha} \rho_{p_1}^q(m), \text{ где } \alpha = f(p_1) \neq 0.$$

Действительно, если $p \mid mq + 1$, то получаем $e^{iaf(p_1)} = 1 + \frac{e^{iaf(p_1)} - 1}{f(p_1)} f(p_1)$ – верное равенство; если $p \nmid mq + 1$, то $e^0 = 1 + 0$ – тоже верное равенство.

Аналогично

$$e^{ia\rho_{p_2}^q(m)} = 1 + \frac{e^{ia\beta} - 1}{\beta} \rho_{p_2}^q(m), \text{ где } \beta = f(p_2) \neq 0.$$

Обозначим $\mathcal{A}_{p_1} = \frac{e^{ia\alpha} - 1}{\alpha}$, $\mathcal{A}_{p_2} = \frac{e^{ia\beta} - 1}{\beta}$, $\mathcal{B}_{p_1} = \frac{e^{ib\alpha} - 1}{\alpha}$, $\mathcal{B}_{p_2} = \frac{e^{ib\beta} - 1}{\beta}$. Тогда левая часть (3) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} M \left\{ e^{i(a\rho_{p_1}^q(m) + b\rho_{p_1}^q(m+1) + a\rho_{p_2}^q(m) + b\rho_{p_2}^q(m+1))} \right\} = \\ = M \{ (1 + \mathcal{A}_{p_1} \rho_{p_1}^q(m)) (1 + \mathcal{B}_{p_1} \rho_{p_1}^q(m+1)) (1 + \mathcal{A}_{p_2} \rho_{p_2}^q(m)) (1 + \mathcal{B}_{p_2} \rho_{p_2}^q(m+1)) \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что $\rho_{p_i}^q(m) \cdot \rho_{p_i}^q(m+1) = 0$. Действительно,

$$\rho_{p_i}^q(m) \cdot \rho_{p_i}^q(m+1) = \begin{cases} f(p_i) \cdot f(p_i), & \text{если } p \mid mq + 1, p \mid (m+1)q + 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если $p \mid mq + 1$, $p \mid (m+1)q + 1$, то $p \mid mq + 1$ и $p \mid q$. Отсюда следует, что $p \mid 1$ – противоречие.

Следовательно, произведение в левой части (4) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} (1 + \mathcal{A}_{p_1} \rho_{p_1}^q(m)) (1 + \mathcal{B}_{p_1} \rho_{p_1}^q(m+1)) (1 + \mathcal{A}_{p_2} \rho_{p_2}^q(m)) (1 + \mathcal{B}_{p_2} \rho_{p_2}^q(m+1)) = \\ = 1 + \mathcal{A}_{p_1} \rho_{p_1}^q(m) + \mathcal{B}_{p_1} \rho_{p_1}^q(m+1) + \mathcal{A}_{p_2} \rho_{p_2}^q(m) + \mathcal{B}_{p_2} \rho_{p_2}^q(m+1) + \\ + \mathcal{A}_{p_1} \mathcal{A}_{p_2} \rho_{p_1}^q(m) \rho_{p_2}^q(m) + \mathcal{B}_{p_1} \mathcal{B}_{p_2} \rho_{p_1}^q(m+1) \rho_{p_2}^q(m+1) + \\ + \mathcal{A}_{p_1} \mathcal{B}_{p_2} \rho_{p_1}^q(m) \rho_{p_2}^q(m+1) + \mathcal{A}_{p_2} \mathcal{B}_{p_1} \rho_{p_2}^q(m) \rho_{p_1}^q(m+1). \end{aligned} \quad (5)$$

Применим оператор M к слагаемым в правой части последнего равенства, получим:

$$1) M \{ \rho_{p_i}^q(m) \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{\rho_{p_i}^q(m)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(p_i) \cdot \left| \left\{ \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} : \\ 1 \leq m \leq n, \\ p_i \mid mq + 1 \end{array} \right\} \right| = \begin{cases} \frac{f(p_i)}{p_i}, & p_i \nmid q \\ 0, & p_i \mid q \end{cases}.$$

Действительно, количество $m \in \mathbb{N}, m \leq n, p_i \mid mq + 1$ совпадает с количеством решений сравнения $mq \equiv -1 \pmod{p_i}$, $m \leq n$. Это сравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $(p_i, q) \mid -1$, то есть p_i и q взаимно просты (т.е. $p_i \nmid q$). В таком случае существует единственное решение m_0 : $0 < m_0 \leq p_i - 1$, а все другие решения представимы в виде $m_0 + tp_i$. Количество таких решений, меньших n , равно $1 + \left\lfloor \frac{n - m_0}{p_i} \right\rfloor$, откуда следует равенство выше.

Если же p_i и q не взаимно просты, то решений сравнения не существует и предел равен 0.

$$2) M \{ \rho_{p_i}^q(m+1) \} = \begin{cases} \frac{f(p_i)}{p_i}, & p_i \nmid q \\ 0, & p_i \mid q \end{cases} \quad \text{аналогично.}$$

$$\begin{aligned}
3) M\{\rho_{p_1}^q(m)\rho_{p_2}^q(m)\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{\rho_{p_1}^q(m)\rho_{p_2}^q(m)}{n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(p_1)f(p_2) \cdot \left| \left\{ \begin{array}{c} m \in \mathbb{N} : 1 \leq m \leq n, \\ p_1 \mid mq+1, p_2 \mid mq+1 \end{array} \right\} \right| = \begin{cases} \frac{f(p_1)f(p_2)}{p_1 p_2}, & p_1, p_2 \nmid q, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Действительно, количество $m \in \mathbb{N}, m \leq n, p_i \mid mq+1, i = 1, 2$, совпадает с количеством решений системы сравнений $\begin{cases} mq \equiv -1 \pmod{p_1} \\ mq \equiv -1 \pmod{p_2} \end{cases}$ при $m \leq n$. Каждое из этих сравнений разрешимо тогда и только тогда, когда $(p_i, q) \mid -1$, то есть $p_i \nmid q$. В таком случае q обратимо в кольцах $\mathbb{Z}_{p_1}, \mathbb{Z}_{p_2}$ и исходная система сравнений равносильна системе $\begin{cases} m \equiv r_1 \pmod{p_1} \\ m \equiv r_2 \pmod{p_2} \end{cases}$. По китайской теореме об остатках у данной системы существует единственное решение $m_0 : 0 < m_0 \leq p_1 p_2 - 1$, а все другие решения представимы в виде $m_0 + t p_1 p_2$. Количество таких решений, меньших n , равно $1 + \left\lfloor \frac{n - m_0}{p_1 p_2} \right\rfloor$, откуда следует равенство выше.

Если же p_i и q для некоторого i не взаимно просты, то решений системы не существует и предел равен 0.

$$4) M\{\rho_{p_1}^p(m+1)\rho_{p_2}^q(m+1)\} = \begin{cases} \frac{f(p_1)f(p_2)}{p_1 p_2}, & p_1, p_2 \nmid q, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{аналогично.}$$

$$\begin{aligned}
5) M\{\rho_{p_i}^q(m)\rho_{p_j}^q(m+1)\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{\rho_{p_i}^q(m)\rho_{p_j}^q(m+1)}{n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(p_i)f(p_j) \cdot \left| \left\{ \begin{array}{c} m \in \mathbb{N} : 1 \leq m \leq n, \\ p_i \mid mq+1, p_j \mid (m+1)q+1 \end{array} \right\} \right| = \begin{cases} \frac{f(p_1)f(p_2)}{p_1 p_2}, & p_1, p_2 \nmid q, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}
\end{aligned}$$

Действительно, количество $m \in \mathbb{N}, m \leq n, p_i \mid mq+1, p_j \mid (m+1)q+1$ совпадает с количеством решений системы сравнений $\begin{cases} mq \equiv -1 \pmod{p_1} \\ (m+1)q \equiv -1 \pmod{p_2} \end{cases}$ при $m \leq n$. Каждое из этих сравнений разрешимо тогда и только тогда, когда $(p_i, q) \mid -1$, то есть $p_i \nmid q$. В таком случае q обратимо в кольцах $\mathbb{Z}_{p_1}, \mathbb{Z}_{p_2}$ и исходная система сравнений равносильна системе $\begin{cases} m \equiv r_1 \pmod{p_1} \\ m+1 \equiv r_2 \pmod{p_2} \end{cases} \iff \begin{cases} m \equiv r_1 \pmod{p_1} \\ m \equiv r_2 - 1 \pmod{p_2} \end{cases}$. По китайской теореме об остатках у данной системы существует единственное решение $m_0 : 0 < m_0 \leq p_1 p_2 - 1$, а все другие решения представимы в виде $m_0 + t p_1 p_2$. Количество таких решений, меньших n , равно $1 + \left\lfloor \frac{n - m_0}{p_1 p_2} \right\rfloor$, откуда следует равенство выше.

Если же p_i и q для некоторого i не взаимно просты, то система не имеет решений и предел равен 0.

Следовательно, применив оператор M к обеим частям равенства (5), получим:

1) Если $p_1, p_2 \nmid q$:

$$\begin{aligned} & M\{(1 + \mathcal{A}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m+1))(1 + \mathcal{A}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m+1))\} = \\ & = 1 + \mathcal{A}_{p_1}\frac{\alpha}{p_1} + \mathcal{B}_{p_1}\frac{\alpha}{p_1} + \mathcal{A}_{p_2}\frac{\beta}{p_2} + \mathcal{B}_{p_2}\frac{\beta}{p_2} + \frac{\alpha\beta}{p_1p_2} \left(\mathcal{A}_{p_1}\mathcal{A}_{p_2} + \mathcal{B}_{p_1}\mathcal{B}_{p_2} + \mathcal{A}_{p_1}\mathcal{B}_{p_2} + \mathcal{A}_{p_2}\mathcal{B}_{p_1} \right) = \\ & = \left(1 + \frac{\alpha\mathcal{A}_{p_1}}{p_1} + \frac{\alpha\mathcal{B}_{p_1}}{p_1} \right) \left(1 + \frac{\beta\mathcal{A}_{p_2}}{p_2} + \frac{\beta\mathcal{B}_{p_2}}{p_2} \right). \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства в силу аналогичных рассуждений равна

$$\begin{aligned} & M\{e^{i(a\rho_{p_1}^q(m)+b\rho_{p_1}^q(m+1))}\} \cdot M\{e^{i(a\rho_{p_2}^q(m)+b\rho_{p_2}^q(m+1))}\} = \\ & = M\{(1 + \mathcal{A}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m+1))\} \cdot M\{(1 + \mathcal{A}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m+1))\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2) Если $p_1 \mid q, p_2 \nmid q$:

$$\begin{aligned} & M\{(1 + \mathcal{A}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m+1))(1 + \mathcal{A}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m+1))\} = \\ & = 1 + \mathcal{A}_{p_2}\frac{\beta}{p_2} + \mathcal{B}_{p_2}\frac{\beta}{p_2} = \underbrace{M\{(1 + \mathcal{A}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m+1))\}}_{=1} \times \\ & \times M\{(1 + \mathcal{A}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m+1))\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Случай $p_1 \nmid q, p_2 \mid q$ аналогичен.

3) Если $p_1 \mid q, p_2 \mid q$:

$$\begin{aligned} & M\{(1 + \mathcal{A}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m+1))(1 + \mathcal{A}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m+1))\} = 1 = \\ & = M\{(1 + \mathcal{A}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_1}\rho_{p_1}^q(m+1))\} \cdot M\{(1 + \mathcal{A}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m))(1 + \mathcal{B}_{p_2}\rho_{p_2}^q(m+1))\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Равенство (3) доказано.

2. Докажем, что

$$M\left\{e^{i\xi\frac{f_l^q(m)-A_l}{B_l}+i\eta\frac{f_l^q(m+1)-A_l}{B_l}}\right\} \rightarrow e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}}, \quad l \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Согласно пункту 1 доказательства

$$Me^{i(a\rho_p^q(m)+b\rho_p^q(m+1))} = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha\mathcal{A}_p}{p} + \frac{\alpha\mathcal{B}_p}{p} = 1 + \frac{e^{ia\alpha} - 1}{p} + \frac{e^{ib\alpha} - 1}{p}, & p \nmid q, \\ 1, & p \mid q. \end{cases} \quad (7)$$

Преобразуем левую часть (6), пользуясь (7) и статистической независимостью функций $a\rho_p^q(m) + b\rho_p^q(m+1)$:

$$\begin{aligned}
& M \left\{ e^{i\xi \frac{f_l^q(m) - A_l}{B_l} + i\eta \frac{f_l^q(m+1) - A_l}{B_l}} \right\} = e^{-i \frac{A_l}{B_l} (\xi + \eta)} M \left\{ e^{\frac{i}{B_l} (\xi f_l^q(m) + \eta f_l^q(m+1))} \right\} = \\
& = e^{-i \frac{A_l}{B_l} (\xi + \eta)} \prod_{p \leq l} M \left\{ e^{i \left(\frac{\xi}{B_l} \rho_p^q(m) + \frac{\eta}{B_l} \rho_p^q(m+1) \right)} \right\} = e^{-i \frac{A_l}{B_l} (\xi + \eta)} \prod_{p \leq l, p \nmid q} \left(1 + \frac{e^{i\xi \frac{f(p)}{B_l}} - 1}{p} + \frac{e^{i\eta \frac{f(p)}{B_l}} - 1}{p} \right) = \\
& = e^{-i \frac{A_l}{B_l} (\xi + \eta)} \prod_{p \leq l, p \nmid q} \left(1 + \frac{if(p)}{pB_l} (\xi + \eta) - \frac{1}{2} \frac{f^2(p)}{pB_l^2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{i}{6} \frac{f^3(p)}{pB_l^3} (\xi^3 + \eta^3) + \dots \right) = \\
& = e^{-i \frac{A_l}{B_l} (\xi + \eta)} \exp \left\{ \sum_{p \leq l, p \nmid q} \underbrace{\ln \left(1 + \frac{if(p)}{pB_l} (\xi + \eta) - \frac{1}{2} \frac{f^2(p)}{pB_l^2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{i}{6} \frac{f^3(p)}{pB_l^3} (\xi^3 + \eta^3) + \dots \right)}_{\rightarrow 0 \text{ при } l \rightarrow \infty, \text{ так как } B_l \rightarrow \infty} \right\} = \\
& = e^{-i \frac{A_l}{B_l} (\xi + \eta)} \exp \left\{ \sum_{p \leq l, p \nmid q} \left(\frac{if(p)}{pB_l} (\xi + \eta) - \frac{1}{2} \frac{f^2(p)}{pB_l^2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{i}{6} \frac{f^3(p)}{pB_l^3} (\xi^3 + \eta^3) + \dots \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{if(p)}{pB_l} (\xi + \eta) - \frac{1}{2} \frac{f^2(p)}{pB_l^2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{i}{6} \frac{f^3(p)}{pB_l^3} (\xi^3 + \eta^3) + \dots \right)^2 + \dots \right\} = \\
& = e^{-i \frac{A_l}{B_l} (\xi + \eta)} \exp \left\{ \frac{i(\xi + \eta)}{B_l} \underbrace{\sum_{p \leq l, p \nmid q} \frac{f(p)}{p}}_{A_l} - \frac{1}{2} \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{B_l^2} \underbrace{\sum_{p \leq l, p \nmid q} \frac{f^2(p)}{p}}_{B_l^2} - \frac{i}{6} \frac{\xi^3 + \eta^3}{B_l^3} \sum_{p \leq l, p \nmid q} \frac{f^3(p)}{p} \dots - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{p \leq l, p \nmid q} \frac{1}{p^2} \left(\frac{if(p)}{B_l} (\xi + \eta) - \frac{1}{2} \frac{f^2(p)}{B_l^2} (\xi^2 + \eta^2) + \dots \right)^2 + \dots \right\} = \\
& = \underbrace{e^{-i \frac{A_l}{B_l} (\xi + \eta)}}_{=1} e^{\frac{i(\xi + \eta) A_l}{B_l}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) - i \frac{\xi^3 + \eta^3}{6} \cdot \underbrace{\frac{\sum_{p \leq l, p \nmid q} \frac{f^3(p)}{p}}{B_l^3}}_{\leq \frac{B_l^2}{B_l^3} = \frac{1}{B_l} \rightarrow 0, \text{ т.к. } |f(p)| \leq 1} - \dots - \right. \\
& \quad \left. - \underbrace{\frac{1}{2B_l^2} \sum_{p \leq l, p \nmid q} \frac{1}{p^2} \left(if(p)(\xi + \eta) - \frac{1}{2} \frac{f^2(p)}{B_l} (\xi^2 + \eta^2) + \dots \right)^2}_{\rightarrow 0} + \dots \right\} \xrightarrow{\text{ограничено}} e^{-\frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2)}, l \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Отсюда по теореме о непрерывности преобразования Фурье-Стилтьеса (см. [5], с. 105-120) следует утверждение леммы 1.

Сформулируем предварительные утверждения и теорему, на которую будет опираться доказательство леммы 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.

- 1) $\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} \leq \ln x + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2};$
- 2) $\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} \geq \ln x + \frac{\ln x}{2x} + \frac{3}{x} - 3.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Заметим, что $\frac{1}{x} \ln[x]! = \frac{1}{x} \sum_{1 < k \leq x} \ln k = \frac{1}{x} \sum_{1 < k \leq x} \ln(p_{k_1}^{\alpha_{k_1}} p_{k_2}^{\alpha_{k_2}} \dots p_{k_r}^{\alpha_{k_r}}) =$

$$= \frac{1}{x} \sum_{1 < p \leq x} \ln p \left(\left[\frac{x}{p} \right] + \left[\frac{x}{p^2} \right] + \dots \right) \geq \frac{1}{x} \sum_{1 < p \leq x} \ln p \left[\frac{x}{p} \right] = \sum_{1 < p \leq x} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{x} \sum_{1 < p \leq x} \ln p \left\{ \frac{x}{p} \right\}. \text{ Значит,}$$

$$\sum_{1 < p \leq x} \frac{\ln p}{p} \leq \frac{1}{x} \sum_{1 < k \leq x} \ln k + \frac{1}{x} \sum_{1 < p \leq x} \ln p \left\{ \frac{x}{p} \right\}.$$

Применим формулу суммирования Эйлера

$$\sum_{a < n \leq x} f(n) - \rho(x)f(x) = \int_a^x f(u)du - \int_a^x \rho(u)f'(u)du - \rho(a)f(a)$$

$$\text{к } \sum_{1 < k \leq x} \ln k:$$

$$\begin{aligned} \sum_{1 < k \leq x} \ln k &= \rho(x) \ln x + \int_1^x \ln u du - \int_1^x \frac{\rho(u)}{u} du - \rho(1) \ln 1 = \rho(x) \ln x + \left(x \ln x - \int_1^x 1 du \right) - \\ &\quad - \int_1^x \frac{\rho(u)}{u} du = x \ln x - x + \rho(x) \ln x - \int_1^x \frac{\rho(u)}{u} du + 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{1 < p \leq x} \frac{\ln p}{p} &\leq \ln x - 1 + \frac{\rho(x) \ln x}{x} - \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\rho(u)}{u} du + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sum_{1 < p \leq x} \ln p \left\{ \frac{x}{p} \right\} = \ln x + \frac{\rho(x) \ln x}{x} + \frac{1}{x} - 1 + \\ &\quad + \frac{1}{x} \left(\sum_{1 < p \leq x} \ln p \left\{ \frac{x}{p} \right\} - \int_1^x \frac{\rho(u)}{u} du \right). \end{aligned}$$

Оценим отдельно последнее слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left(\sum_{1 < p \leq x} \ln p \left\{ \frac{x}{p} \right\} - \int_1^x \frac{\rho(u)}{u} du \right) &\leq \frac{1}{x} \left(\sum_{1 < p \leq x} \ln p - \int_1^x \frac{\rho(u)}{u} du \right) = \frac{1}{x} \left(\sum_{1 < p \leq x} \ln p - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{1 \leq k \leq [x]-1} \int_k^{k+1} \frac{\rho(u)}{u} du - \int_{[x]}^x \frac{\rho(u)}{u} du \right) = \frac{1}{x} \left(\sum_{1 < p \leq x} \ln p - \sum_{1 \leq k \leq [x]-1} \left(\rho(u) \ln u \Big|_k^{k+1} + \int_k^{k+1} \ln u du \right) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{[x]}^x \frac{\rho(u)}{u} du \right) = \frac{1}{x} \left(\sum_{1 < p \leq x} \ln p - \rho([x]) \ln [x] - \int_1^{[x]} \ln u du - \rho(x) \ln x + \rho([x])[x] - \int_{[x]}^x \ln u du \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{x} \left(\sum_{1 < k \leq x} \ln k - \int_1^x \ln u du - \rho(x) \ln x \right) \leq \frac{1}{x} \left(\int_1^{x+1} \ln u du - \int_1^x \ln u du - \rho(x) \ln x \right) \leq \\ &\leq \frac{\ln(x+1) - \rho(x) \ln x}{x}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{1 < p \leq x} \frac{\ln p}{p} &\leq \ln x + \frac{\rho(x) \ln x}{x} + \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln(x+1) - \rho(x) \ln x}{x} = \ln x + \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{x} \leq \\ &\leq \ln x + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - 1 + \ln 2, \end{aligned}$$

откуда следует пункт 1) утверждения.

$$\begin{aligned}
 & 2) \text{ Оценим сверху выражение } \frac{1}{x} \ln[x]! = \frac{1}{x} \sum_{1 < k \leq x} \ln k = \frac{1}{x} \sum_{1 < k \leq x} \ln(p_{k_1}^{\alpha_{k_1}} p_{k_2}^{\alpha_{k_2}} \dots p_{k_r}^{\alpha_{k_r}}) = \\
 & = \frac{1}{x} \sum_{1 < p \leq x} \ln p \left(\left[\frac{x}{p} \right] + \left[\frac{x}{p^2} \right] + \dots \right) \leq \sum_{1 < p \leq x} \ln p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \right) = \sum_{1 < p \leq x} \frac{\ln p}{p} + \sum_{1 < p \leq x} \underbrace{\frac{\ln p}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}}_{\frac{\ln p}{p^2 - p}}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, в силу формулы суммирования Эйлера, имеем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{1 < p \leq x} \frac{\ln p}{p} \geq \frac{1}{x} \sum_{1 < k \leq x} \ln k - \sum_{1 < p \leq x} \frac{\ln p}{p^2 - p} = \ln x - 1 + \frac{\rho(x) \ln x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_1^x \underbrace{\frac{\rho(u) du}{u}}_{< \ln x, \text{ т.к. } |\rho(u)| \leq \frac{1}{2}} - \\
 & - \sum_{1 < p \leq x} \frac{\ln p}{p^2 - p} \geq \ln x - 1 + \frac{(\rho(x) - 1) \ln x}{x} + \frac{1}{x} - \sum_{1 < n \leq x} \underbrace{\frac{\ln n}{n^2 - n}}_{\geq \frac{1}{2} n^2 \text{ при } n \geq 2} \geq \ln x - 1 - \frac{3 \ln x}{2x} + \frac{1}{x} - \\
 & - \sum_{1 < n \leq x} \frac{2 \ln n}{n^2} \geq \ln x - 1 - \frac{3 \ln x}{2x} + \frac{1}{x} - \sum_{1 < n \leq x} \underbrace{\frac{2 \ln n}{n^2}}_{\downarrow \text{ при } n > \sqrt{e} \approx 1,65} \geq \ln x - 1 - \frac{3 \ln x}{2x} + \frac{1}{x} - 2 \int_1^x \ln u d\left(-\frac{1}{u}\right) = \\
 & = \ln x - 1 - \frac{3 \ln x}{2x} + \frac{1}{x} + 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2 \geq \ln x + \frac{\ln x}{2x} + \frac{3}{x} - 3.
 \end{aligned}$$

Теорема А. ([4])

Пусть выполнены условия:

- a) A, Q – положительные константы.
 b) $q_1, q_2, \dots, q_r$ – простые числа, $k > 0$ – целое число, взаимно простое с q_i для любого $i = 1, \dots, r$;

$$\alpha_i \in \mathbb{N}, 0 < \alpha_i < q_i \text{ при } 0 < i \leq T;$$

$a_{ij} \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq T, 1 \leq j \leq \alpha_i$, при этом в случае $i \neq j$ выполнено сравнение

$$a_{ij} \not\equiv a_{ik} \pmod{q_i};$$

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ – целочисленная функция;

$N_t(k) = \sum_{m=1}^t 1$, где суммирование берется по всем целым числам m таким, что одновременно выполнено:

1) m удовлетворяет некоторому фиксированному условию, не зависящему от

$$t, k, l, q_i, a_{ij}, \alpha_i,$$

$$2) f(m) \equiv l \pmod{k},$$

$$3) f(m) \not\equiv a_{ij} \pmod{q_i}, \quad 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq \alpha_i.$$

c) $N_t(k) \geq 0$ при $0 \leq t \leq T$.

d) Существуют $X, C > 0$, независящие от k , такие, что $|N_0(k) - F_0(k)| < C$ для всех k, l , где

$$F_t(k) = \frac{X}{k} \prod_{i=1}^t \left(1 - \frac{\alpha_i}{q_i} \right).$$

e) $q_1 < q_2 < \dots < q_r$.

f) $Y \in \mathbb{R}$ такое, что $q_t \leq Y$ для любого $t \leq T$.

g) Существует $\eta, 0 < \eta < 1$, такое, что для некоторого x_0 выполнены неравенства

$$10^3 \leq x_0 \leq e^{(\ln Y)^\eta},$$

$$\left| \sum_{q_i \leq x} \frac{\alpha_i \ln q_i}{q_i} - Q \ln x \right| < \frac{A \ln x}{(\ln \ln x)^2} \text{ для } x > x_0.$$

h) Существует $v \in (0, 1)$ такое, что для всех i $0 < \frac{\alpha_i}{q_i} \leq v < 1$.

i) $0.003eQ \ln \ln Y \geq 2$.

j) Существует $\omega \in \mathbb{R}$ такое, что $\omega > 1$, $eQ \ln \omega \leq \frac{3(1-\eta)}{2}$.

k) Обозначим

$$Z = \sum_{i=1}^t \frac{\alpha_i}{q_i}; \quad W = \frac{36A(1-v) + 9AQ + 9A^2}{(1-v) \ln \ln Y}; \quad z = \frac{36A}{Q \ln \omega \ln \ln Y}.$$

l) $Z \leq 4Q \frac{\ln \ln Y}{3}$.

m) n – нечетное натуральное число, большее 2.

Тогда:

$$N_t(k) \leq F_t(k) \left(1 - (-1)^n \frac{e^{W+2z+2}}{\sqrt{2\pi n} e^n \frac{4 - \omega^Q (eQ \ln \omega)^2}{4}} \right) - (-1)^n \frac{X}{k} \left(\frac{3Z}{4Q \ln \ln Y} \right)^{\frac{4Qe \ln \ln Y}{3}} - \\ - (-1)^n C Y^{n-1 + \frac{2}{\omega-1}} e^Z. \quad (8)$$

При этом если в пункте m) n – четное натуральное число, большее 2, то в (8) знак " $\leq$ " меняется на " $\geq$ ".

Пусть $\Phi(n)$ – положительная функция, которая стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$ таким образом, что

$$\frac{1}{\Phi(n)} = o((\ln \ln n)^2)$$

и также

$$\frac{1}{\Phi(n)} = o(B_n).$$

Из первого соотношения следует, что $\frac{1}{\Phi(n)(\ln \ln n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, откуда $\Phi(n) \gg_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^2}$.

Пусть $n^{\Phi(n)} = \alpha_n$, $n^{(\Phi(n))^{1/2}} = \beta_n$; очевидно, что $\alpha_n \rightarrow \infty$, $\beta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $a_1(n), a_2(n), \dots$ – целые числа, все простые делители которых меньше, чем α_n , а $\psi(m, n) =$

$= \max\{a_i(n) : a_i(n) \mid m\}$. Обозначим через $q_1, q_2, \dots, q_{T_n}$ простые числа, меньшие α_n .

Верна следующая лемма:

ЛЕММА 2. Пусть $q = q(n)$ – член некоторой последовательности, принимающей натуральные значения, φ – функция Эйлера.

$$\text{Обозначим } N(n, q) = \left| \left\{ m \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} m \leq n, \\ \psi(mq + 1, n) = a_\kappa(n), \\ \psi((m+1)q + 1, n) = a_\lambda(n), \\ \text{где } a_\kappa, a_\lambda \leq \beta_n \end{array} \right\} \right|.$$

$$\text{Тогда } N(n, q) = \begin{cases} 0, & \text{если } (a_\kappa, a_\lambda) > 1 \text{ или } 2 \nmid a_\kappa a_\lambda, \\ \frac{nq}{4\varphi(a_\kappa a_\lambda)} \prod_{i=2}^{T_n} \left(1 - \frac{2}{q_i}\right) \prod_{2 \leq i \leq T_n, q_i | a_\kappa a_\lambda} \left(1 + \frac{1}{q_i(q_i - 2)}\right) \times \\ \times \prod_{\substack{2 \leq i \leq T_n \\ q_i \nmid q, q_i \nmid a_\kappa a_\lambda}} \left(1 + \frac{1}{q_i - 2}\right) (1 + o(1)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – фиксированное натуральное число. Рассмотрим сначала случай, когда $q = q(n)$ – нечетное натуральное число.

1) Пусть $(a_\kappa, a_\lambda) > 1$ или $2 \nmid a_\kappa a_\lambda$.

Из условия $\psi(mq + 1, n) = a_\kappa(n)$ следует, что $a_\kappa \mid mq + 1$. Аналогично $a_\lambda \mid (m + 1)q + 1$.

Если $(a_\kappa, a_\lambda) = d > 1$, то $d \mid mq + 1$, $d \mid (m + 1)q + 1$. Тогда $d \mid q$ и $d \mid 1$. Противоречие.

Если $2 \nmid a_\kappa a_\lambda$, то a_κ, a_λ – нечетные числа. Так как q – нечетное по предположению, то среди чисел $mq + 1$, $(m + 1)q + 1$ есть четное число. Без ограничения общности, пусть $mq + 1$ – четное. Тогда $mq + 1 = \underbrace{2^{k_1} 3^{k_2} \dots q_{T_n}^{k_{T_n}}}_{\in \{a_i(n)\}, \text{ т.к. все } q_i < \alpha_n} \cdot p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s} = a_{\gamma_0}(n) \cdot p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s} \cdot a_{\gamma_0}(n)$ де-

лит $mq + 1$, при этом это максимальное $a_i(n)$, обладающее этим свойством. Следовательно, $a_\kappa = a_{\gamma_0} = 2^{k_1} 3^{k_2} \dots q_{T_n}^{k_{T_n}}$, при этом $k_1 > 0$ по предположению. Получаем противоречие с нечетностью a_κ .

Следовательно, $N(n, q) = 0$, если $(a_\kappa, a_\lambda) > 1$ или $2 \nmid a_\kappa a_\lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Заметим, что если q – четное, то $N(n, q) \neq 0$, вообще говоря, если $(a_\kappa, a_\lambda) > 1$ или $2 \nmid a_\kappa a_\lambda$.

Действительно, если q – четное, то и $mq + 1$, и $(m + 1)q + 1$ – оба нечетные, поэтому прийти к противоречию тем же способом нельзя.

2) Пусть $(a_\kappa, a_\lambda) = 1$, $2 \mid a_\kappa a_\lambda$.

Условие $\begin{cases} a_\kappa \mid mq + 1 \\ a_\lambda \mid (m + 1)q + 1 \end{cases}$ равносильно $\begin{cases} mq + 1 = Ra_\kappa \\ (m + 1)q + 1 = Sa_\lambda \end{cases}$, где у R и S все простые делители $\geq \alpha_n$ по определению функции ψ .

Отсюда следует, что $Ra_\kappa + q = (m + 1)q + 1 = Sa_\lambda \equiv 0 \pmod{a_\lambda}$, то есть $Ra_\kappa \equiv -q \pmod{a_\lambda}$. Последнее сравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $(R, a_\lambda) = 1 \mid -q$, что верно. Следовательно, существует единственное решение сравнения $0 < r_0 < a_\lambda$ такое, что $r_0 a_\kappa \equiv -q \pmod{a_\lambda}$. В частности, отсюда получаем, что $\frac{r_0 a_\kappa + q}{a_\lambda} =: b_0 \in \mathbb{Z}$.

Все решения сравнения $Ra_\kappa \equiv -q \pmod{a_\lambda}$ представимы в виде $R = r_0 + ga_\lambda$, $g \in \mathbb{Z}$. При этом $S = \frac{Ra_\kappa + q}{a_\lambda} = \frac{r_0 a_\kappa + q}{a_\lambda} + ga_\kappa = b_0 + ga_\kappa$.

Таким образом, нам достаточно найти количество возможных $R = r_0 + ga_\lambda \not\equiv 0 \pmod{q_i}$, с условием, что $S = b_0 + ga_\kappa \not\equiv 0 \pmod{q_i}$, $1 \leq i \leq T_n$.

Рассмотрим подробнее систему сравнений:

$$\begin{cases} r_0 + ga_\lambda \not\equiv 0 \pmod{q_i} \\ b_0 + ga_\kappa \not\equiv 0 \pmod{q_i} \end{cases} \iff \begin{cases} ga_\lambda \not\equiv -r_0 \pmod{q_i} \\ ga_\kappa \not\equiv -b_0 \pmod{q_i} \end{cases}.$$

а) Если $q_i \mid a_\lambda$, то $ga_\lambda \equiv 0 \not\equiv -r_0 \pmod{q_i}$, так как $r_0 = \underbrace{R}_{\not\equiv q_i} - \underbrace{ga_\lambda}_{\equiv q_i} \not\equiv 0 \pmod{q_i}$. Первое

сравнение в системе выше выполнено.

б) Если $q_i \mid a_\kappa$, то $ga_\kappa \equiv 0 \not\equiv -b_0 \pmod{q_i}$ аналогично. Второе сравнение в системе выше выполнено.

в) Если $q_i \nmid a_\lambda$, $q_i \nmid a_\kappa$, то получаем $\begin{cases} ga_\lambda \not\equiv -r_0 \pmod{q_i} \\ ga_\kappa \not\equiv -b_0 \pmod{q_i} \end{cases} \iff \begin{cases} g \not\equiv e_i \pmod{q_i} \\ g \not\equiv f_i \pmod{q_i} \end{cases}$, так как a_λ, a_κ – обратимые элементы по модулю q_i .

Рассмотрим, может ли e_i быть сравнимо с f_i по модулю q_i .

- Предположим, что $q_i \nmid q$ и $e_i \equiv f_i \pmod{q_i}$. Тогда $e_i = -r_0 \cdot (a_\lambda)^{-1} \equiv -b_0(a_\kappa)^{-1} = f_i \pmod{q_i}$. Обозначим $g' = -r_0(a_\lambda)^{-1} \equiv -b_0(a_\kappa)^{-1}$. Тогда g' является решением следующей системы сравнений: $\begin{cases} g'a_\lambda \equiv -r_0 \\ g'a_\kappa \equiv -b_0 \end{cases} \implies g'a_\kappa \equiv -\underbrace{\frac{r_0 a_\kappa + q}{a_\lambda}}_{=b_0} \implies \underbrace{g'a_\lambda}_{\equiv -r_0} a_\kappa \equiv -r_0 a_\kappa + q \implies \implies q \equiv 0 \pmod{q_i}$. Противоречие с предположением $q_i \nmid q$.

- Пусть теперь $q_i \mid q$. $e_i = -r_0(a_\lambda)^{-1}$, $f_i = -b_0(a_\kappa)^{-1}$. Так как $q_i \nmid a_\kappa a_\lambda$ имеем:
 $e_i \equiv f_i \iff r_0(a_\lambda)^{-1} \equiv b_0(a_\kappa)^{-1} \iff (r_0(a_\lambda)^{-1} - b_0(a_\kappa)^{-1})a_\lambda a_\kappa \equiv 0 \iff r_0 a_\kappa \equiv b_0 a_\lambda =$
 $= \frac{r_0 a_\kappa + q}{a_\lambda} a_\lambda \iff q \equiv 0$ – верное сравнение. Значит, если $q_i \mid q$, то $e_i \equiv f_i \pmod{q_i}$.

Таким образом, нам необходимо и достаточно найти количество целых g таких, что

$$а) \ 0 < g < \frac{nq + 1 - a_\kappa r_0}{a_\kappa a_\lambda}.$$

Действительно, $nq + 1 = Ra_\kappa = (r_0 + ga_\lambda)a_\kappa \leq nq + 1$, следовательно, $0 < g \leq \frac{\frac{nq + 1}{a_\kappa} - r_0}{a_\lambda}$,

откуда вытекает требуемая оценка.

б) $g \in \mathbb{Z} \iff g \equiv 0 \pmod{1}$.

в)

- если $1 \leq i \leq T_n$, $q_i \nmid a_\kappa, q_i \nmid a_\lambda, q_i \nmid q$, то $\begin{cases} g \not\equiv e_i \pmod{q_i} \\ g \not\equiv f_i \pmod{q_i} \end{cases}$.
- если $1 \leq i \leq T_n$, $q_i \nmid a_\kappa, q_i \nmid a_\lambda, q_i \mid q$, то $g \not\equiv e_i \pmod{q_i}$.
- если $1 \leq i \leq T_n$, $q_i \mid a_\kappa, q_i \nmid a_\lambda$, то $g \not\equiv e_i \pmod{q_i}$.
- если $1 \leq i \leq T_n$, $q_i \nmid a_\kappa, q_i \mid a_\lambda$, то $g \not\equiv f_i \pmod{q_i}$.

Пусть $N_t(k), 0 \leq t \leq T_n$ – количество целых g удовлетворяющих условиям а), в) (с T_n замененным на t) и б): $g \equiv l \pmod{q_i}$, где l пробегает целые значения на полуинтервале $[0, k)$, $(k, q_i) = 1$ при $i = 1, \dots, t$.

Тогда $N_{T_n}(1) = N(n, q)$ из условия леммы.

Также обозначим $F_t(k) = \frac{nq}{ka_\kappa a_\lambda} \prod_{i=1}^t \left(1 - \frac{\alpha_i}{q_i}\right)$, где $\alpha_i = \begin{cases} 1, q_i \mid a_\kappa a_\lambda \text{ или } q_i \mid q, q_i \nmid a_\kappa a_\lambda, \\ 2, \text{ иначе.} \end{cases}$

(Почему α_i определено таким образом будет сказано ниже, пункт б)).

Заметим, что $\alpha_1 = 1$, так как $q_1 = 2 \mid a_\kappa a_\lambda$.

Найдем значение $N_0(k)$. $N_0(k)$ – это количество целых g удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} а) \ 0 < g < \frac{nq + 1 - a_\kappa r_0}{a_\kappa a_\lambda} \\ б) \ g \equiv 0 \pmod{k} \\ в) \ \emptyset (\text{так как условие } 1 \leq i \leq t = 0 \text{ не выполняется}) \end{cases}$$

Следовательно, $N_0(k) = \left\lfloor \frac{nq + 1 - a_\kappa r_0}{ka_\kappa a_\lambda} \right\rfloor$, $F_0(k) = \frac{nq}{ka_\kappa a_\lambda}$. Имеем:

$$|N_0(k) - F_0(k)| = \left| \left\lfloor \frac{nq + 1 - a_\kappa r_0}{ka_\kappa a_\lambda} \right\rfloor - \frac{nq}{ka_\kappa a_\lambda} \right| = \left| \left\lfloor \frac{nq}{ka_\kappa a_\lambda} - \frac{a_\kappa r_0 - 1}{ka_\kappa a_\lambda} \right\rfloor - \frac{nq}{ka_\kappa a_\lambda} \right| < 2, \text{ так как}$$

$$\left| \frac{\overbrace{a_\kappa r_0 - 1}^{\geq 1}}{ka_\kappa a_\lambda} \right| = \frac{a_\kappa r_0 - 1}{ka_\kappa a_\lambda} < \frac{r_0}{ka_\lambda} < 1.$$

Применим теорему А. Проверим выполнение условий теоремы и подберем необходимые константы:

а) Возьмем $A = 1, Q = 2$.

б) $T = \infty, f(m) = m$.

Фиксированное условие суммирования в $N_t(k)$ – условие $0 \leq g \leq \frac{nq}{a_\kappa a_\lambda} = X$. Условия 2) и 3) – это условия б)' и в).

$\alpha_{i1} = e_i, \alpha_{i2} = f_i$. Следовательно, α_i должно быть равно 1, когда на g накладывается только одно условие несравнимости, и α_i должно быть равно 2, когда g должно быть несравнимо и с e_i , и с f_i . Отсюда определяем $\alpha_i = \begin{cases} 1, q_i \mid a_\kappa a_\lambda \text{ или } q_i \mid q, q_i \nmid a_\kappa a_\lambda, \\ 2, \text{ иначе.} \end{cases}$

с) Очевидно, выполняется.

д) $X = \frac{nq}{a_\kappa a_\lambda}, C = 2$.

е) Выполнено.

ф) $t = \pi(\alpha_n) = T_n, Y = q_{T_n} \Leftrightarrow q_t \leq Y$.

Заметим, что $Y \sim T_n \ln T_n \sim \frac{\alpha_n}{\ln \alpha_n} \cdot \ln \frac{\alpha_n}{\ln \alpha_n} \sim \frac{\alpha_n}{\ln \alpha_n} \cdot (\ln \alpha_n - \ln \ln \alpha_n) = \alpha_n \left(1 - \frac{\ln \ln \alpha_n}{\ln \alpha_n} \right) \sim \alpha_n$ при $n \rightarrow \infty$.

г) Рассмотрим $S = \sum_{q_i \leq x} \frac{\alpha_i \ln q_i}{q_i} - 2 \ln x \leq 2 \sum_{q_i \leq x} \frac{\ln q_i}{q_i} - 2 \ln x \stackrel{\text{утверждение 1}}{<} 2 \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \right) < 5$.

Оценим S снизу. Для этого заметим, что

$$S = \sum_{q_i \leq x} \frac{\alpha_i \ln q_i}{q_i} - 2 \ln x = 2 \sum_{q_i \leq x} \frac{\ln q_i}{q_i} - \sum_{q_i \leq x, \alpha_i = 1} \frac{\ln q_i}{q_i} - 2 \ln x.$$

Но количество α_i , равных 1, не больше количества q_i , делящих $a_\kappa a_\lambda$ или q . Следовательно, количество слагаемых во второй сумме не превосходит $\log_2 a_\kappa a_\lambda + \log_2 q < \ln X$ при достаточно большом n . Следовательно,

$$S \geq 2 \sum_{q_i \leq x} \frac{\ln q_i}{q_i} - \sum_{q_i \leq \ln X} \frac{\ln q_i}{q_i} - 2 \ln x \stackrel{\text{утверждение 1}}{>} \frac{\ln x}{x} - 3 - \left(\ln \ln X + \frac{\ln \ln X}{\ln X} + \frac{1}{\ln X} + \frac{3}{2} \right) > -\ln \ln X - 6.$$

Отсюда получаем, что $|S| < 6 + \ln \ln X$.

Пусть $\eta = \frac{2}{3}, x_0 = e^{(\ln \ln X)^2}$. Тогда $x_0 < e^{(\ln Y)^{\frac{2}{3}}}$ для достаточно большого n . Действительно, сравним $(\ln \ln X)^2$ и $(\ln Y)^{\frac{2}{3}}$:

$$(\ln Y)^{\frac{2}{3}} \sim (\ln \alpha_n)^{\frac{2}{3}} = (\ln n^{\Phi(n)})^{\frac{2}{3}} = (\Phi(n) \ln n)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2} \right)^{\frac{2}{3}} > 2(\ln \ln n)^2 > (\ln \ln(nq))^2 > > (\ln \ln X)^2 \text{ для достаточно больших } n, \text{ что и требовалось.}$$

Следовательно, найдется x_0 такой, что $|S| < 6 + \ln \ln X = 6 + \sqrt{\ln x_0} < \frac{\ln x}{(\ln \ln x)^2}$ при $x > x_0$.

h) Возьмем $v = \frac{2}{3}$. Тогда $0 < \frac{\alpha_i}{q_i} \leq v < 1$, так как $\alpha_1 = 1, q_1 = 2$, а при $i \geq 2$ имеем $\alpha_i \leq 2, q_i \geq 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Заметим, что если q – четное, то

- если $q_1 = 2 \mid a_\kappa a_\lambda$, то $\alpha_1 = 1$ по определению.
- если $q_1 = 2 \nmid a_\kappa a_\lambda$, то $q_1 = 2 \mid q$, так как q – четное, следовательно, $\alpha_1 = 1$ по определению.

Следовательно, пункт h) выполнен и в случае четного q .

i) Верно для достаточно большого n .

j) Возьмем некоторое $\omega \in (1, \frac{6}{5})$. Тогда должно быть разрешимо неравенство $eQ \ln \omega = 2e \ln \omega \leq \frac{3}{2}(1 - \eta) = \frac{1}{2}$. Действительно, данное неравенство равносильно неравенству $\ln \omega < \frac{1}{4e} \Leftrightarrow \omega < e^{\frac{1}{4e}} \approx 1,096$.

k)

$$Z = \sum_{i=1}^t \frac{\alpha_i}{q_i}; \quad W = \frac{12 + 18 + 9}{\frac{1}{3} \ln \ln Y} = \frac{117}{\ln \ln Y}; \quad z = \frac{18}{\ln \omega \ln \ln Y}.$$

l) Докажем, что $Z \leq 8 \frac{\ln \ln Y}{3}$.

Так как $q_i > ci \ln i$ при $i \geq 2$ по оценкам Чебышева, то имеем:

$$Z \leq 2 \sum_{i=1}^t \frac{1}{q_i} \leq 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sum_{i=3}^t \frac{1}{i \ln i} \leq \frac{5}{3} + \int_2^t \frac{du}{u \ln u} = \frac{5}{3} + \ln \ln t - \ln \ln 2 \leq 2 \ln \ln T_n \leq 2 \ln \ln q T_n = 2 \ln \ln Y, \text{ откуда следует требуемая оценка.}$$

m) Переобозначим n за ν – нечетное натуральное число, большее 2, которое мы выберем позже. Тогда по теореме А имеем:

$$N_t(k) \leq F_t(k) \left(1 - (-1)^\nu \frac{e^{W + \frac{4}{3} + 2}}{\sqrt{2\pi\nu} e^\nu \frac{4 - \omega^2 (2e \ln \omega)^2}{4}} \right) - (-1)^\nu \frac{X}{k} \left(\frac{3Z}{8 \ln \ln Y} \right)^{\frac{8e \ln \ln Y}{3}} - (-1)^\nu 2Y^{\nu-1 + \frac{2}{\omega-1}} e^Z. \quad (9)$$

Докажем, что правая часть (9) равна $F_t(k)(1 + o(1)), n \rightarrow \infty$.

$$\text{a) } \frac{e^{W+2z+2}}{\sqrt{2\pi\nu} e^\nu \frac{4 - \omega^2 (2e \ln \omega)^2}{4}} = \frac{\overbrace{e^{W+2z+2}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{\sqrt{2\pi\nu} e^\nu}_{\rightarrow \infty} (1 - \omega^2 e^2 \ln^2 \omega)} \rightarrow 0 \text{ при } \nu \rightarrow \infty.$$

Значит, подберем ν так, чтобы оно стремилось к бесконечности с ростом n .

б) Известна оценка (см. [8], с. 36-37) $\prod_{i=1}^t \left(1 - \frac{2}{q_i} \right) \geq \frac{c}{(\ln q_t)^2}$. Отсюда

$$F_t(k) = \frac{nq}{ka_\kappa a_\lambda} \prod_{i=1}^t \left(1 - \frac{\alpha_i}{q_i} \right) > \frac{X}{k} \prod_{i=1}^t \left(1 - \frac{2}{q_i} \right) \geq \frac{X}{k} \frac{c}{(\ln q_t)^2} \geq \frac{X}{k} \frac{c}{(\ln Y)^2}. \text{ При этом}$$

$$\ln Y \sim \ln \alpha_n = \ln n^{\Phi(n)} = \Phi(n) \ln n.$$

Следовательно,

$$F_t(k) \geq \frac{cX}{k(\Phi(n) \ln n)^2}.$$

Докажем, что $\frac{X}{k} \left(\frac{3Z}{8 \ln \ln Y} \right)^{\frac{8e \ln \ln Y}{3}} = o(F_t(k)), n \rightarrow \infty$.

Заметим, что в силу неравенства Чебышева $q_n > cn \ln n$ при $n \geq 2$ имеем

$$Z = \sum_{i=1}^t \frac{\alpha_i}{q_i} \leq 2 \sum_{i=1}^t \frac{1}{q_i} < \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{c} \sum_{i=3}^t \frac{1}{i \ln i} < \frac{5}{3} + \frac{2}{c} \int_2^t \frac{du}{u \ln u} < \frac{5}{3} + \frac{2}{c} \ln \ln t - \frac{2}{c} \ln \ln 2 < \ln \ln Y. \quad (10)$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{X}{k} \left(\underbrace{\frac{3Z}{8 \ln \ln Y}}_{< \frac{3}{8}} \right)^{\frac{8e \ln \ln Y}{3}} &< \frac{X}{k} \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{8e \ln \ln Y}{3}} < \frac{X}{k} e^{8 \ln \frac{3}{8} \ln \ln Y} = \frac{X}{k} \frac{1}{(\ln Y)^{8 \ln \frac{8}{3}}} \sim \\ &\sim \frac{X}{k} \frac{1}{(\Phi(n) \ln n)^{8 \ln \frac{8}{3}}} = \left| 8 \ln \frac{8}{3} \approx 7,85 > 2 \right| = o(F_t(k)), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

в) В силу (10) имеем

$$2Y^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}} e^Z < 2Y^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}} e^{\ln \ln Y} = 2Y^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}} \ln Y < 2\alpha_n^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}} \ln \alpha_n \boxed{<}$$

Выберем ν и ω следующим образом:

$$\nu = \begin{cases} \left\lceil \frac{1}{\Phi^{\frac{1}{2}}} \right\rceil, & \text{если } \left\lceil \frac{1}{\Phi^{\frac{1}{2}}} \right\rceil - \text{нечетное,} \\ 1 + \left\lceil \frac{1}{\Phi^{\frac{1}{2}}} \right\rceil, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \omega = 1 + \Phi^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{<} 2n^{\Phi \cdot (\Phi^{-\frac{1}{2}} - 1) + 2\Phi^{\frac{1}{2}}} \Phi \ln n = 2n^{3\Phi^{\frac{1}{2}} - \Phi} \Phi \ln n = o(n^\delta) \text{ для любого наперед заданного } \delta > 0.$$

В то же время по уже доказанному

$$F_t(k) \geq \frac{cX}{k(\Phi(n) \ln n)^2},$$

$$X = \frac{nq}{\underbrace{a_\kappa a_\lambda}_{\leq \beta_n^2 = \alpha_n}} \geq \frac{n}{n^{\Phi(n)}} \geq n^{1-\delta} \text{ для любого наперед заданного } \delta > 0,$$

следовательно, $F_t(k) \geq n^{1-2\delta}$, откуда следует, что $2Y^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}} e^Z = o(F_t(k))$.

Из а), б), в) следует, что

$$N_t(k) \leq F_t(k)(1 + o(1))$$

Аналогично с помощью замены нечетного ν на четное доказывается

$$N_t(k) \geq F_t(k)(1 + o(1)).$$

Следовательно, $N_t(1) = F_t(1)(1 + o(1))$. Найдем $F_{T_n}(1)$:

$$\begin{aligned}
F_{T_n}(1) &= \frac{nq}{a_\kappa a_\lambda} \prod_{i=1}^{T_n} \left(1 - \frac{\alpha_i}{q_i}\right) = \left| \begin{array}{c} \alpha_1 = 1, \\ q_1 = 2 \end{array} \right| = \frac{nq}{2a_\kappa a_\lambda} \prod_{i=2}^{T_n} \left(1 - \frac{\alpha_i}{q_i}\right) = \frac{nq}{2a_\kappa a_\lambda} \prod_{i=2}^{T_n} \left(1 - \frac{2}{q_i}\right) \times \\
&\times \frac{\prod_{\alpha_i=1} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right)}{\prod_{\alpha_i=1} \left(1 - \frac{2}{q_i}\right)} = \frac{nq}{2a_\kappa a_\lambda} \prod_{i=2}^{T_n} \left(1 - \frac{2}{q_i}\right) \cdot \left(\prod_{\substack{2 \leq i \leq T_n, q_i \mid a_\kappa a_\lambda \\ \text{или } q_i \mid q, q_i \nmid a_\kappa a_\lambda}} \frac{1 - \frac{1}{q_i}}{1 - \frac{2}{q_i}} \right) \times \\
&\times \underbrace{\frac{\prod_{\substack{2 \leq i \leq T_n, \\ q_i \mid a_\kappa a_\lambda}} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right)}{2 \prod_{\substack{1 \leq i \leq T_n, \\ q_i \mid a_\kappa a_\lambda}} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right)}}_{=1} = \left| \varphi(a_\kappa a_\lambda) = a_\kappa a_\lambda \right| \prod_{\substack{1 \leq i \leq T_n, \\ q_i \mid a_\kappa a_\lambda}} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = \\
&= \frac{nq}{4\varphi(a_\kappa a_\lambda)} \prod_{i=2}^{T_n} \left(1 - \frac{2}{q_i}\right) \cdot \prod_{\substack{2 \leq i \leq T_n, q_i \mid a_\kappa a_\lambda \\ \text{или } q_i \mid q, q_i \nmid a_\kappa a_\lambda}} \left(1 + \frac{1}{q_i - 2}\right) \cdot \prod_{\substack{2 \leq i \leq T_n, \\ q_i \mid a_\kappa a_\lambda}} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = \\
&= \frac{nq}{4\varphi(a_\kappa a_\lambda)} \prod_{i=2}^{T_n} \left(1 - \frac{2}{q_i}\right) \cdot \prod_{\substack{2 \leq i \leq T_n \\ q_i \mid a_\kappa a_\lambda}} \left(1 + \frac{1}{q_i - 2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) \cdot \prod_{\substack{2 \leq i \leq T_n \\ q_i \mid q, q_i \nmid a_\kappa a_\lambda}} \left(1 + \frac{1}{q_i - 2}\right) = \\
&= \frac{nq}{4\varphi(a_\kappa a_\lambda)} \prod_{i=2}^{T_n} \left(1 - \frac{2}{q_i}\right) \cdot \prod_{\substack{2 \leq i \leq T_n \\ q_i \mid a_\kappa a_\lambda}} \left(1 + \frac{1}{q_i(q_i - 2)}\right) \cdot \prod_{\substack{2 \leq i \leq T_n \\ q_i \mid q, q_i \nmid a_\kappa a_\lambda}} \left(1 + \frac{1}{q_i - 2}\right),
\end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы для нечетного q . Для четного q утверждение также верно в силу замечания 2.

ЛЕММА 3. Обозначим $N(M, n) = |\{m \in \mathbb{N} | m \leq M, \exists i : a_i(n) \mid m, a_i(n) > \beta_n\}|$. Тогда

$$N(M, n) < bM(\Phi(n))^{\frac{1}{2}},$$

где b – положительная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3].

ЛЕММА 4. Пусть

$$l_n(\omega_1, \omega_2) = |\{m \in \mathbb{N} : m \leq n, f_{\alpha_n}^q(m) < A_{\alpha_n} + \omega_1 B_{\alpha_n}, f_{\alpha_n}^q(m+1) < A_{\alpha_n} + \omega_2 B_{\alpha_n}\}|.$$

Тогда $l_n(\omega_1, \omega_2) = nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разделим все целые числа $m \leq n$, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{cases} f_{\alpha_n}^q(m) < A_{\alpha_n} + \omega_1 B_{\alpha_n}, \\ f_{\alpha_n}^q(m+1) < A_{\alpha_n} + \omega_2 B_{\alpha_n}, \end{cases} \quad (11)$$

на классы E_{jk} таким образом, что $m \in E_{jk} \iff \begin{cases} \psi(mq+1, n) = a_j(n) \\ \psi((m+1)q+1, n) = a_k(n) \end{cases}$.

$$\text{Имеем: } l_n(\omega_1, \omega_2) = \sum_{j,k} |E_{jk}| = \sum_{j,k: a_j, a_k \leq \beta_n} |E_{jk}| + \sum_{j,k: a_j > \beta_n \text{ или } a_k > \beta_n} |E_{jk}|.$$

В силу леммы 3 $\sum_{j,k: a_j > \beta_n \text{ или } a_k > \beta_n} |E_{jk}| < bn(\Phi(n))^{\frac{1}{2}} = o(n), n \rightarrow \infty$ и, следовательно, достаточно доказать, что $\sum_{j,k: a_j, a_k \leq \beta_n} |E_{jk}| = nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n), n \rightarrow \infty$.

По лемме 2 имеем:

$$\sum_{a_j, a_k \leq \beta_n} |E_{jk}| = \frac{nq}{4} \prod_{i=2}^{T_n} \left(1 - \frac{2}{q_i}\right) \sum_{a_j, a_k \leq \beta_n} ' \frac{P(a_j, a_k, n)}{\varphi(a_j a_k)} (1 + o(1)),$$

где

$$P(a_j, a_k, n) = \prod_{2 \leq i \leq T_n, q_i | a_j a_k} \left(1 + \frac{1}{q_i(q_i - 2)}\right) \prod_{2 \leq i \leq T_n, q_i \nmid a_j a_k} \left(1 + \frac{1}{q_i - 2}\right),$$

а штрих означает суммирование по a_j, a_k , удовлетворяющим условиям

$$\begin{aligned} f_{\alpha_n}(a_j) &< A_{\alpha_n} + \omega_1 B_{\alpha_n}, \quad f_{\alpha_n}(a_k) < A_{\alpha_n} + \omega_2 B_{\alpha_n}, \\ (a_j, a_k) &= 1; 2 \mid a_j a_k, \\ f_{\alpha}(m) &= \sum_{\substack{p \mid m, \\ p \leq \alpha}} f(p) \end{aligned}$$

Действительно, если $m \in E_{jk}$, то в силу определения функции ψ и аддитивности f_{α_n} имеем $f_{\alpha_n}^q(m) = f_{\alpha_n}(mq+1) = f_{\alpha_n}(r \cdot a_j) = f_{\alpha_n}(r) + f_{\alpha_n}(a_j) = f_{\alpha_n}(a_j)$, так как r — делитель $mq+1$, все простые делители которого больше α_n . Аналогично $f_{\alpha_n}^q(m+1) = f_{\alpha_n}(a_k)$.

Теперь разделим все целые числа, удовлетворяющие (11), на классы F_{jk} таким образом, что

$$m \in F_{jk} \iff \begin{cases} \psi(mq+1, n) = a_j(n) \\ \psi((m+1)q+1, n) = a_k(n) \end{cases}, \text{ и пусть } \{F_{jk}\} \text{ обозначает плотность } F_{jk}. \text{ Рассмотрим сумму } \sum' F_{jk}, \text{ где штрих обозначает то же, что и раньше. Взяв } l = \alpha_n \text{ и применив лемму 1, получим:}$$

$$\left\{ \sum' F_{jk} \right\} = D(\omega_1)D(\omega_2) + o(1), n \rightarrow \infty.$$

Аналогично разобьем сумму на две:

$$\sum' F_{jk} = \sum_{a_j, a_k \leq \beta_n} ' F_{jk} + \sum_{a_j > \beta_n \text{ или } a_k > \beta_n} ' F_{jk}. \quad (12)$$

По лемме 3

$$\left\{ \sum_{a_j > \beta_n \text{ или } a_k > \beta_n} 'F_{jk} \right\} \leq b(\Phi(n))^{\frac{1}{2}} = o(1), n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Кроме того, количество a_j и a_k , меньших β_n , конечно, поэтому

$$\left\{ \sum_{a_j, a_k \leq \beta_n} 'F_{jk} \right\} = \sum_{a_j, a_k \leq \beta_n} ' \{F_{jk}\} = D(\omega_1)D(\omega_2) + o(1), n \rightarrow \infty.$$

Но $\{F_{jk}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|E_{jk}|}{n}$, откуда следует

$$\sum_{a_j, a_k \leq \beta_n} |E_{jk}| = n \sum_{a_j, a_k \leq \beta_n} \{F_{jk}\} + o(n) = nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n), n \rightarrow \infty,$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство теоремы 3

Из лемм 1–4 следует

ТЕОРЕМА 3. Пусть f – сильно аддитивная функция такая, что $|f(p)| \leq 1$ для всех простых p . Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, $q = q(n)$ – член некоторой последовательности, принимающей натуральные значения с условием

$$\exists C > 0 : q(n) < n^C \forall n.$$

Обозначим

$$A_n = \sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q}} \frac{f(p)}{p}, \quad B_n = \sqrt{\sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q}} \frac{f^2(p)}{p}},$$

причем $B_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $N(n)$ – количество натуральных чисел $m \leq n$ таких, что выполняются условия

$$\begin{cases} f(mq + 1) < A_n + \omega_1 B_n \\ f((m + 1)q + 1) < A_n + \omega_2 B_n \end{cases}. \quad (14)$$

Тогда $N(n) = nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$|f(mq + 1) - f_{\alpha_n}^q(m)| = \left| \sum_{\substack{p \mid mq + 1, \\ p > \alpha_n}} f(p) \right| \leq \sum_{\substack{p \mid mq + 1, \\ p > \alpha_n}} |f(p)| \leq \sum_{\substack{p \mid mq + 1, \\ p > \alpha_n}} 1 < \quad (15)$$

$$< \frac{C + 1}{\Phi(n)} = o(B_n), n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Действительно, пусть $mq + 1 = P \cdot \underbrace{p_1 \dots p_k}_{> (\alpha_n)^k}$, где p_i – простые делители $mq + 1$, боль-

шие α_n , P – произведение оставшихся простых делителей. Тогда если $k > \frac{C+1}{\Phi(n)}$, то $mq(n) + 1 > (\alpha_n)^{\frac{C+1}{\Phi(n)}} = n^{C+1} > nq(n) + 1$, противоречие.

Также верна следующая оценка:

$$|A_n - A_{\alpha_n}| \leq \sum_{\alpha_n < p \leq n} \frac{1}{p} = \ln \ln n - \ln \ln n^\Phi + O(1) = \ln \frac{1}{\Phi} + O(1) = o(B_n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (17)$$

по выбору Φ .

$$|B_n - B_{\alpha_n}| \leq |B_n - B_{\alpha_n}| |B_n + B_{\alpha_n}| = |B_n^2 - B_{\alpha_n}^2| \leq \sum_{\alpha_n < p \leq n} \frac{1}{p} = o(B_n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

аналогично.

Таким образом, из (16)-(18) следует, что для достаточно большого n из неравенства $f(mq + 1) < A_n + \omega_1 B_n$ вытекает $f_{\alpha_n}^q(m) < A_{\alpha_n} + (\omega_1 + \varepsilon) B_{\alpha_n}$. Действительно,

$$\begin{aligned} f_{\alpha_n}^q(m) &= f(m) + o(B_n) < A_n + \omega_1 B_n + o(B_n) < (A_{\alpha_n} + o(B_n)) + \omega_1 (B_{\alpha_n} + o(B_n)) + o(B_n) < \\ &< A_{\alpha_n} + (\omega_1 + \varepsilon) B_{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Аналогично из неравенства $f_{\alpha_n}^q(m) < A_{\alpha_n} + (\omega_1 - \varepsilon) B_{\alpha_n}$ вытекает $f(mq + 1) < A_n + \omega_1 B_n$. Следовательно, в силу леммы 4 имеем:

$$D(\omega_1 - \varepsilon) D(\omega_2 - \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n} \leq D(\omega_1 + \varepsilon) D(\omega_2 + \varepsilon),$$

откуда вытекает утверждение теоремы, поскольку $\varepsilon > 0$ – произвольное.

4. Доказательство основных теорем

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $q = q(n)$ – член некоторой последовательности, принимающей натуральные значения, с условием

$$\ln \ln \ln q(n) = o(\sqrt{\ln \ln n}), \quad n \rightarrow \infty,$$

то

$$\sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q}} \frac{1}{p} = \ln \ln n + o(\sqrt{\ln \ln n}), \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим $\sum_{\substack{p \leq n, \\ p \mid q(n)}} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q(n)}} \frac{1}{p}$.

Пусть $\tilde{q}(n) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, где $k = k(n) = \max\{l \in \mathbb{N} : p_1 \dots p_l \leq q(n)\}$. Тогда $k \geq \nu(q(n))$. Действительно, если $k < \nu(q(n))$, то $q(n) = p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_{\nu(q(n))}}^{\alpha_{i_{\nu(q(n))}}} \geq p_1 \dots p_{\nu(q(n))} \geq p_1 \dots p_k \cdot p_{k+1}$, что противоречит определению k .

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq n, \\ p \mid q(n)}} \frac{1}{p} &\leq \sum_{i=1}^{\nu(q(n))} \frac{1}{p_i} \leq \sum_{\substack{p \leq n, \\ p \mid \tilde{q}(n)}} \frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{1}{p_i} \leq \sum_{p \leq ck \ln k} \frac{1}{p} = \ln \ln(ck \ln k) + O(1) = \\ &= \ln \ln k + o(\ln \ln k). \end{aligned}$$

Следовательно, если $\ln \ln k = o(\sqrt{\ln \ln n}), n \rightarrow \infty$, то будет выполнено требуемое утверждение.

При этом в силу определения $k(n)$ верны следующие оценки: $p_1 \dots p_{k(n)} \leq q(n) \leq p_1 \dots p_{k(n)+1}$.

Прологарифмировав неравенство выше, получим: $\sum_{i=1}^{k(n)} \ln p_i \leq \ln q(n) \leq \sum_{i=1}^{k(n)+1} \ln p_i = \theta(p_{k(n)+1})$, где $\theta(x)$ – тета-функция Чебышева, для которой известны оценки

$$c_3 x \leq \theta(x) \leq c_4 x, \forall x \geq 2.$$

Отсюда следует, что $\ln q(n) \leq c_4 p_{k(n)+1} \leq c_5 (k(n) + 1) \ln(k(n) + 1)$ и $\ln q(n) \geq c_3 p_{k(n)} \geq c_6 k(n) \ln(k(n))$. Дважды логарифмируя последние неравенства, получаем:

$$\ln \ln \ln q(n) = \ln \ln k(n) + o(\ln \ln k(n))$$

Таким образом, если $\ln \ln \ln q(n) = o(\sqrt{\ln \ln n}), n \rightarrow \infty$, то $\sum_{\substack{p \leq n, \\ p \mid q(n)}} \frac{1}{p} = o(\sqrt{\ln \ln n})$, откуда

$$\sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q(n)}} \frac{1}{p} = \ln \ln n + o(\sqrt{\ln \ln n}), n \rightarrow \infty, \text{ что и требовалось.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Пусть $q = q(n)$ – некоторая последовательность с условием $\ln \ln \ln q = o(\sqrt{\ln \ln n}), n \rightarrow \infty$. Тогда имеем:

$$\ln \ln \ln q \ll \sqrt{\ln \ln n} \iff \ln \ln q \ll e^{\sqrt{\ln \ln n}} \Rightarrow \ln \ln q \ll (\ln n)^\alpha, \forall \alpha > 0 \iff \ln q \ll e^{(\ln n)^\alpha}, \forall \alpha > 0.$$

В частности, если для некоторого $C > 0$ $q \leq n^C$, то условие $\ln \ln \ln q = o(\sqrt{\ln \ln n}), n \rightarrow \infty$, выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Из условия $\ln \ln \ln q(n) = o(\sqrt{\ln \ln n})$ не следует, что $\exists C > 0 : q(n) < n^C, \forall n$.

Действительно, если $q(n) = e^{\sqrt{(\ln n)^3}}$, то $\ln \ln \ln q(n) = \ln \ln \sqrt{(\ln n)^3} = o(\sqrt{\ln \ln n})$, но $\forall C e^{(\sqrt{\ln n})^3} > n^C = e^{C \ln n}$, начиная с некоторого номера.

Теперь докажем теорему 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q = q(n)$ – некоторая последовательность с условием

$$\exists C > 0 : q(n) < n^C, \forall n.$$

Тогда количество $m \leq n$ таких, что выполняются условия

$$\begin{cases} \nu(mq + 1) < \ln \ln n + \omega_1 \sqrt{\ln \ln n} \\ \nu((m+1)q + 1) < \ln \ln n + \omega_2 \sqrt{\ln \ln n} \end{cases}$$

равно $nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $\nu(n)$ в силу утверждения 2 имеем:

$$A_n = \sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q}} \frac{1}{p} = \ln \ln n + o(\sqrt{\ln \ln n}), n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$B_n = \left(\sum_{\substack{p \leq n, \\ p \nmid q}} \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A_n} = \sqrt{\ln \ln n} + o(\sqrt{\ln \ln n}), n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, утверждение теоремы вытекает из теоремы 3.

Приведем примеры, когда количество $m \leq n$ таких, что выполняются условия

$$\begin{cases} \nu(mq + 1) < f_1(n, \omega_1) \\ \nu((m + 1)q + 1) < f_2(n, \omega_2) \end{cases} \quad \text{для некоторых функций } f_i(n, \omega_i), \text{ не равно } Cn + o(n), n \rightarrow \infty.$$

ПРИМЕР 7. Пусть $q = 2$. Рассмотрим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \nu(2m + 1) < 2 \\ \nu(2(m + 1) + 1) < 2 \end{cases} \quad (19)$$

Данная система эквивалентна системе равенств

$$\begin{cases} \nu(2m + 1) = 1 \\ \nu(2(m + 1) + 1) = 1 \end{cases},$$

которая равносильна тому, что числа $2m + 1$ и $2(m + 1) + 1$ являются простыми.

Таким образом, количество $m \leq n$, удовлетворяющих системе (19), равно количеству пар простых близнецов, не превосходящих $2n + 3$. Обозначим это количество как $\pi_2(2n + 3)$.

Известна оценка (см. [7])

$$\pi_2(n) \leq C \frac{n}{(\ln n)^2},$$

для некоторого $C > 0$.

ПРИМЕР 8. Пусть $q = q(n) = \prod_{i=1}^{k(n)} p_i$, где $k(n) = [\sqrt{\ln n}]$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \nu(mq + 1) < \ln n \\ \nu((m + 1)q + 1) < \ln n \end{cases} \quad (20)$$

Докажем, что количество $m \leq n$, удовлетворяющих системе (20), равно n для достаточно больших n .

Действительно, пусть $mq + 1 = \prod_{p \mid mq+1} p^{\alpha_p}$. Так как $q = \prod_{i=1}^{k(n)} p_i$, то $mq + 1$ не делится на p_i , $i \leq k(n)$. Тогда имеем $nq + 1 \geq mq + 1 \geq p_{k(n)}^{\nu(mq+1)}$, откуда

$$\begin{aligned} \nu(mq + 1) &\leq \frac{\ln(nq + 1)}{\ln p_{k(n)}} \leq c \frac{\ln(nq)}{\ln(k \ln k)} \leq c \frac{\ln n + \ln q}{\ln k} \leq c \left(\frac{\ln n}{\ln \ln n} + \frac{\theta(p_k)}{\ln k} \right) \leq \\ &\leq c \left(\frac{\ln n}{\ln \ln n} + \frac{k \ln k}{\ln k} \right) \leq c \left(\frac{\ln n}{\ln \ln n} + \sqrt{\ln n} \right) < \ln n, \end{aligned}$$

для любого $m \leq n$ при достаточно больших n .

Аналогично $\nu((m + 1)q + 1) < \ln n$ для любого $m \leq n$ при достаточно больших n .

Значит, неравенства системы (20) выполнены для любого $m \leq n$, что и требовалось доказать.

Наконец, из теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q = q(n)$ – некоторая последовательность с условием

$$\exists C > 0 : q(n) < n^C, \forall n.$$

Пусть $t_n(\omega) = |\{m \leq n : \nu(mq + 1) < \nu((m+1)q + 1) + \omega\sqrt{2 \ln \ln n}\}|$. Тогда

$$t_n(\omega) = nD(\omega) + o(n) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

откуда следует, что

$$P\left(\frac{\nu(mq + 1) - \nu((m+1)q + 1)}{\sqrt{2 \ln \ln n}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = D(x), n \rightarrow \infty,$$

$$\text{где } P(f(m) < x) = \frac{|\{m \leq n : f(m) < x\}|}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $X_n(m) = \frac{\nu(mq + 1) - \ln \ln n}{(\ln \ln n)^{\frac{1}{2}}}$, $1 \leq m \leq n$.

В силу следствия 1 имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n(m) < \omega_1, X_n(m+1) < \omega_2) = D(\omega_1)D(\omega_2).$$

Значит, характеристическая функция $(X_n(m), X_n(m+1))$ стремится к характеристической функции нормального распределения:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \exp \left\{ i \left(\xi \frac{\nu(mq + 1) - \ln \ln n}{(\ln \ln n)^{\frac{1}{2}}} + \eta \frac{\nu((m+1)q + 1) - \ln \ln n}{(\ln \ln n)^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi x + \eta y)} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2} \right\} dx dy. \end{aligned}$$

При $\eta = -\xi$ имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \exp \left\{ i \xi \frac{\nu(mq + 1) - \nu((m+1)q + 1)}{(\ln \ln n)^{\frac{1}{2}}} \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2} \right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x - \frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi y - \frac{y^2}{2}} dy = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x - \frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 - 2i\xi x - \xi^2) - \frac{\xi^2}{2} \right\} dx \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\exp\{-\xi^2/2\}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \right\} du \right)^2 = e^{-\xi^2}. \end{aligned}$$

Найдем функцию плотности для данной характеристической функции, т.е. найдем функцию $\rho(x)$ такую, что

$$e^{-\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \rho(x) dx.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} e^{-x^2/2} dx = e^{-\xi^2/2},$$

то при $\xi = \sqrt{2}\eta$, $x = y/\sqrt{2}$ имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta y} \frac{e^{-y^2/4}}{\sqrt{2}} dy = e^{-\eta^2},$$

откуда $\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4}$.

Таким образом,

$$P\left(\frac{\nu(mq+1) - \nu((m+1)q+1)}{\sqrt{\ln \ln n}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt = \left| t = u\sqrt{2}, dt = \sqrt{2} du \right| = F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

где $F(x)$ – функция распределения нормального закона. При замене $y = x/\sqrt{2}$ получим, что

$$P\left(\frac{\nu(mq+1) - \nu((m+1)q+1)}{\sqrt{2 \ln \ln n}} < y\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(y).$$

Также имеем $\frac{t_n(\omega/\sqrt{2})}{n} \rightarrow \int_{-\infty}^{\omega} \rho(x) dx$. Сделав замену переменной $\omega' = \omega/\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{t_n(\omega')}{n} \rightarrow \int_{-\infty}^{\omega'\sqrt{2}} \rho(x) dx = |u = x/\sqrt{2}| = \int_{-\infty}^{\omega'} \sqrt{2} \rho(u\sqrt{2}) du = \int_{-\infty}^{\omega'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = D(\omega'),$$

откуда следует, что $t_n(\omega) = nD(\omega) + o(n)$, $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2 доказана.

5. Заключение

В данной статье исследована задача о распределении значений функции ν в соседних точках арифметической прогрессии $mq+1$, где параметр q может зависеть от n и расти не быстрее, чем степень n . Работа расширяет результат Левека, перенося его на случай прогрессий.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору В.Н. Чубарикову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламперти, Дж. Вероятность // Москва: Наука. 1973. 184 с.
2. Hardy, G. H., Ramanujan, S. The normal number of prime factors of a number // Quarterly Journal of Mathematics. 1917. Vol. 48. P. 76–92.
3. Erdős, P., Кас, М. The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions // American Journal of Mathematics. 1940. Vol. 49, №1. P. 738–742.

4. LeVeque, W. J. On the size of certain number-theoretic functions // Transactions of the American Mathematical Society. 1949. Vol. 66, №2. P. 440–463.
5. Крамер, Г. Математические методы статистики // Москва: Мир, 1976. 648 с.
6. Erdős, P., Wintner, A. Additive Arithmetical Functions and Statistical Independence // American Journal of Mathematics. 1939. Vol. 61, №3. P. 713–721.
7. Jie W. Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem // Acta Arithmetica. 2004. Vol. 114, №3. P. 215–273.
8. Прахар, К. Распределение простых чисел // Москва: Мир, 1976. 512 с.

REFERENCES

1. Lamperti, J. 1973, *Probability*, Nauka, Moscow.
2. Hardy, G.H. & Ramanujan, S. 1917, "The normal number of prime factors of a number n ", *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 48, pp. 76–92.
3. Erdős, P. & Kac, M. 1940, "The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions", *American Journal of Mathematics*, vol. 62, no. 1, pp. 738–742.
4. LeVeque, W.J. 1949, "On the size of certain number-theoretic functions", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 66, no. 2, pp. 440–463.
5. Cramér, H. 1976, *Mathematical methods of statistics*, Mir, Moscow.
6. Erdős, P. & Wintner, A. 1939, "Additive arithmetical functions and statistical independence", *American Journal of Mathematics*, vol. 61, no. 3, pp. 713–721.
7. Wu, J. 2004, "Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem", *Acta Arithmetica*, vol. 114, no. 3, pp. 215–273.
8. Prachar, K. 1976, *Distribution of prime numbers*, Mir, Moscow.

Получено: 30.06.2025

Принято в печать: 08.12.2025