ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511, 517, 519.2 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-203-220

Об одном применении теоремы А.Н. Колмогорова

В. Н. Соболев, А. А. Фролов

Соболев Виталий Николаевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; РТУ МИРЭА (г. Москва).
e-mail: vitalii.sobolev@math.msu.ru
Фролов Андрей Александрович — старший преподаватель, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).
e-mail: faa75@yandex.ru

Аннотация

В статье на классе $\mathscr{K}$ бесконечных двоичных последовательностей без 1-серий строится согласованное распределение вероятностей P, которое индуцируется однородной цепью Маркова с матрицей перехода за один шаг $\mathbb{P}_\phi$, и полностью определяемой золотым сечением ϕ. Использование цепи Маркова при построении вероятностной меры P позволяет применить теорему А.Н. Колмогорова о продолжении меры. Асимптотическое распределение подкласса $\mathscr{K}^0$ бесконечных двоичных последовательностей без 1-серий, начинающихся с нуля, совпадает с аналогичным асимптотическим распределением классической равновероятностной модели. При этом асимптотическое распределение данного класса $\mathscr{K}^0$ совпадает с вероятностью $\mathsf{P}(\mathscr{K}^0)$.

Ключевые слова: теорема Колмогорова о продолжении меры, цепи Маркова, энтропия цепи Маркова, числа Фибоначчи, золотое сечение, двоичные последовательности, равновероятностные последовательности, распределение вероятностей, равномерное распределение, частотное распределение, асимптотическое распределение, асимптотическое поведение, предельное распределение, энтропия.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Соболев В. Н., Фролов А. А. Об одном применении теоремы А.Н. Колмогорова // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 203–220.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 511, 517, 519.2 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-203-220

On the application of A.N. Kolmogorov's Theorem

V. N. Sobolev, A. A. Frolov

Sobolev Vitaliy Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; RTU MIREA (Moscow).
e-mail: vitalii.sobolev@math.msu.ru
Frolov Andrey Alexandrovich — senior lecturer, HSE University (Moscow).
e-mail: faa75@yandex.ru

Abstract

In the article, on the class $\mathscr{K}^0$ of infinite binary sequences without the runs of ones, a consistent probability distribution P is constructed which is induced by a time-homogeneous Markov chain with a one-step transition matrix $\mathbb{P}_\phi$, and is completely determined by the golden ratio ϕ. Using a Markov chain to construct a probability measure P allows us to apply Kolmogorov's existence theorem. The asymptotic distribution of the subclass $\mathscr{K}^0$ of infinite binary sequences without the runs of ones starting with zero coincides with the analogous asymptotic distribution of the classical equiprobable scheme . And in this case, the asymptotic distribution of the class $\mathscr{K}^0$ coincides with the probability $\mathsf{P}(\mathscr{K}^0)$.

Keywords: Kolmogorov's existence theorem, Markov chains, entropy of Markov chains, Fibonacci numbers, golden ratio, binary sequences, equidistributed sequences, probability distribution, uniform distribution, frequency distribution, asymptotic distribution, asymptotic behavior, limiting distribution, entropy.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
Sobolev, V. N., Frolov, A. A. 2025, "On the application of A.N. Kolmogorov's Theorem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 203–220.

1. Введение

Построение асимптотических распределений [1, стр. 82] в своём основании содержит закон равномерного распределения. В силу чего используемые при таком построении семейства распределений оказываются несогласованными. Что в свою очередь приводит к тому, что получаемые асимптотические распределения оказываются вероятностно не связаными с исходными семействами распределений. Следующая фундаментальная теорема А.Н. Колмогорова о продолжении вероятностной меры [2, стр. 67, 398] позволяет избежать этого.

Теорема 1. *Задание на конечномерных пространствах $\mathscr{K}_n$ согласованных распределений P_n определяет на измеримом пространстве $(\mathscr{K}, \mathscr{F})$ такую единственную вероятностную меру P, что каждая P_n есть проекция P на $\mathscr{K}_n$.*

В работе на конкретном примере показано, как с помощью теоремы А.Н. Колмогорова вероятностно обосновывать построение асимптотических распределений. При этом само построение согласованных распределений для применения данной теоремы опирается на теорию цепей Маркова.

Так в статье на классе бесконечных двоичных последовательностей без 1-серий (нет двух подряд идущих единиц) [3, 4, 5]

$$\mathscr{K} = \{\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : x_k \cdot x_{k+1} \neq 1\}\ , x_k \in \{0, 1\}$$

двумя разными наборами вероятностных мер: $\{\widetilde{\mathrm{P}}_n\}$ и $\{\mathrm{P}_n\}$, заданных на конечных подпространствах

$$\mathscr{K}_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k \cdot x_{k+1} \neq 1\}\ ,$$

будет построено одно и тоже асимптотическое распределение вероятностей [6, 7, 8] появление последовательности из множеств

$$\mathscr{K}^0 = \{\overline{x} \in \mathscr{K} : x_1 = 0\}\ , \quad \mathscr{K}^1 = \{\overline{x} \in \mathscr{K} : x_1 = 1\}\ .$$

Первый тип распределений $\{\widetilde{\mathrm{P}}_n\}$ определяется на основе равновероятностной модели. Для его построения на каждом конечном пространстве $\mathscr{K}_n$ в качестве вероятностного закона берётся равномерное распределение $\widetilde{\mathrm{P}}_n$, то есть вероятности $\widetilde{\mathrm{P}}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ появления любой последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $\mathscr{K}_n$ при фиксированном n берутся равными между собой. Данные распределения $\{\widetilde{\mathrm{P}}_n\}$ в силу равномерного закона распределения оказываются несогласованными (см. далее п. 2.2). Поэтому их предельное распределение на $\mathscr{K}$ оказывается вероятностно не связанным с ними.

Построение второго семейства распределений $\{\mathrm{P}_n\}$, доставляющего такое же асимптотическое распределение, что и семейство $\{\widetilde{\mathrm{P}}_n\}$, как уже говорилось выше, опирается на теорему А.Н. Колмогорова (см., также [7, стр. 204] и [9, стр. 110]) и задаётся с помощью однородной цепи Маркова [10].

Таким образом, данное распределение $\{\mathrm{P}_n\}$ гарантирует существование на множестве всех двоичных последовательностей бесконечной длины с носителем $\mathscr{K}$ вероятностной меры P, которая соответствует асимптотическому распределению. В силу чего асимптотическое распределение равновероятностных мер $\widetilde{\mathrm{P}}_n$ приобретает в ней законное с вероятностной точки зрения основание. Значение энтропии такой цепи Маркова, как будет показано ниже, наиболее близко к энтропии равновероятностной модели. Кроме того, построеная в работе цепь Маркова может быть задана достаточно простым способом, описанным в теореме 4.

2. Основные определения и понятия

2.1. Множество последовательностей без 1-серий

Поскольку носитель $\mathscr{K}$ рассматриваемых далее распределений есть множество последовательностей без 1-серий [3, 4], то вначале дадим их определения и рассмотрим основные свойства и структуру данных множеств.

Обозначим при каждом натуральном $n \in \mathbb{N}$ множество двоичных последовательностей (цепочек, векторов) без 1-серий как и множество подобных последовательностей бесконечной длины $\mathscr{K}$.

В [5] доказывается, что

$$|\mathscr{K}_n| = |(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k \cdot x_{k+1} \neq 1\}\,| = F_{n+2}\,,$$

где F_n – числа Фибоначчи, которые можно определить рекуррентно [5, 11] как

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\,, \quad F_1 = F_2 = 1\,.$$

Множества $\mathscr{K}_n$ распадаются на два подкласса

$$\mathscr{K}_n^0 = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_k x_{k+1} \neq 1\,,\, x_1 = 0\}\ , \quad \mathscr{K}_n^1 = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_k x_{k+1} \neq 1\,,\, x_1 = 1\}\ ,$$

а множество $\mathscr{K}$ соответственно на

$$\mathscr{K}^0 = \{\overline{x} \in \mathscr{K} : x_1 = 0\}\ , \quad \mathscr{K}^1 = \{\overline{x} \in \mathscr{K} : x_1 = 1\}\ .$$

Мощности множеств $\mathscr{K}_n^0$, $\mathscr{K}_n^1$, также как и мощность $\mathscr{K}_n$, выражаются (см. доказательство в [5]) через соответствующие числа Фибоначчи:

$$\left|\mathscr{K}_n^0\right| = F_{n+1}\,, \quad \left|\mathscr{K}_n^1\right| = F_n\,.$$

В силу существования предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi \tag{1}$$

соотношение между числом элементов в данных двух поклассах $\mathscr{K}_n$ с ростом n асимптотически [12, стр. 72] сохраняется:

$$\frac{\left|\mathscr{K}_n^0\right|}{\left|\mathscr{K}_n^1\right|} \sim \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,. \tag{2}$$

Здесь ϕ – золотое сечение или число Фидия [11].

Нам так же понадобится разложение каждого из множеств $\mathscr{K}_n^0$, $\mathscr{K}_n^1$ на части:

$$\mathscr{K}_n^0 = \mathscr{K}_n^{00} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{01}\,, \quad \mathscr{K}_n^1 = \mathscr{K}_n^{10} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{11}\,,$$

где

$$\mathscr{K}_n^{00} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_1 = 0\,, x_n = 0\}\ , \quad \mathscr{K}_n^{01} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_1 = 0\,, x_n = 1\}\ ,$$

$$\mathscr{K}_n^{10} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_1 = 1\,, x_n = 0\}\ , \quad \mathscr{K}_n^{11} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_1 = 1\,, x_n = 1\}\ .$$

Мощности классов $\mathscr{K}_n^{ij}$, как и раньше мощности классов $\mathscr{K}_n^i$, будут выражаться через числа Фибоначчи:

$$\left|\mathscr{K}_n^{00}\right| = F_n\,, \quad \left|\mathscr{K}_n^{10}\right| = F_{n-1}\,, \quad \left|\mathscr{K}_n^{01}\right| = F_{n-1}\,, \quad \left|\mathscr{K}_n^{11}\right| = F_{n-2}\,,$$

и

$$\left|\mathscr{K}_n^{00}\right| + \left|\mathscr{K}_n^{10}\right| = \left|\mathscr{K}_n^0\right|\ , \quad \left|\mathscr{K}_n^{01}\right| + \left|\mathscr{K}_n^{11}\right| = \left|\mathscr{K}_n^1\right|\ .$$

В связи с таким разбиением также возникает класс векторов

$$\widetilde{\mathscr{K}_n^0} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_n = 0\} = \mathscr{K}_n^{00} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{10}\,,$$

которые заканчиваются единицей, и класс векторов

$$\widetilde{\mathscr{K}_n^1} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_n = 1\} = \mathscr{K}_n^{11} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{01}\,,$$

которые заканчиваются нулём.

2.2. Вероятностные пространства

Положим в качестве *пространства элементарных событий* (*исходов*) Ω множество всех бесконечных последовательностей без 1-серий, то есть $\Omega = \mathscr{K}$. Элементарными событиями данного пространства будут двоичные последовательности без 1-серий $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$. С пространством Ω связаны конечномерные пространства элементарных исходов $\Omega_n = \mathscr{K}_n$.

Кроме пространств элементарных событий Ω_n определим алгебры событий $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$ как множества всех подмножеств соответствующих пространств элементарных событий. В силу конечности Ω_n будут конечны и $\mathcal{F}_n$, поскольку $|\mathcal{F}_n| = 2^{|\Omega_n|}$.

Вероятность $\mathrm{P}_n(A)$ для любого события (подмножества последовательностей) $A \in \mathcal{F}_n$ суть аддитивная, неотрицательная и нормированная функция событий (множеств). Её можно задавать разными способами. В нашем случае в силу конечности пространств Ω_n для полного описания вероятностной меры P_n на Ω_n достаточно определить P_n на множестве элементарных событий, то есть на множестве двоичных последовательностей (цепочек) из Ω_n

$$\overline{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ,$$

приписав каждой такой последовательности вероятность её появления:

$$\mathrm{P}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) := P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ .$$

Тогда любая вероятностная мера P_n полностью описывается [2, стр. 33] таким конечным набором вероятностей и для произвольного события $A \in \mathcal{F}_n$ вероятность $\mathrm{P}_n(A)$ может быть представлена в виде суммы соответствующих ей значений $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вероятностей $\mathrm{P}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\mathrm{P}_n(A) = \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A} P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ .$$

В общем случае в силу несчётности $\mathscr{K}$ возникает вопрос о задании на $\mathcal{F}$ вероятностной меры P. Для его решения, как уже говорилось выше, удобно использовать фундаментальную теорему А.Н. Колмогорова о продолжении вероятностной меры, в формулировке которой используется понятие согласованности вероятностных мер. Для полного описания данной теоремы кратко напомним основные моменты, связанные с этим понятием.

Говорят, что *распределения* P_n на $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ и P_m на $(\Omega_m, \mathcal{F}_m)$ *согласованы*, если две меры P_n^* и P_m^*, индуцированые на пересечении $\Omega_n \cdot \Omega_m$ соответственно мерами P_n и P_m, на данном пересечении совпадают.

В последнем определении без ограничения общности можно считать, что $m < n$. Тогда в рассматриваемом нами случае в силу определения Ω_n и Ω_m имеем $\Omega_m = \Omega_n \cdot \Omega_m$. Таким образом, согласованность P_n и P_m означает, что $\mathrm{P}_n(A) = \mathrm{P}_m(A)$ при всех $A \in \mathcal{F}_m$. В этом случае говорят, что вероятностная мера P_m является *проекцией меры* P_n.

Совпадение $\mathrm{P}_n(A) = \mathrm{P}_m(A)$ при всех $A \in \mathcal{F}_m$ в нашем дискретном случае может быть заменено выполнением следующих равенств для всех $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathscr{K}_m$

$$\mathrm{P}_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum \mathrm{P}_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \ ,$$

в которых суммирование ведётся по всевозможным наборам $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ из $\mathscr{K}_n$ таким, что начало вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ фиксировано.

Система таких согласованных распределений и используется в формулировке теоремы Колмогорова [2, стр. 67, 398].

3. Частотная модель распределения конечного набора векторов

3.1. Построение частотной модели как равномерного равномерного распределения

На множестве всех последовательностей $\mathscr{K}_n$ рассмотрим вероятности попадания произвольной цепочки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в множества $\mathscr{K}_n^0$ и $\mathscr{K}_n^1$ в предположении о том, что появление любой последовательности из $\mathscr{K}_n$ равновозможно. Поскольку количество таких цепочек, как мы уже указывали выше, равно F_{n+2}, то вероятности их появления одинаковы и определяется формулой

$$\widetilde{\mathrm{P}}_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{1}{F_{n+2}}\,.$$

В этом случае говорят, что на $\mathscr{K}_n$ задано равномерное распределение $\widetilde{\mathrm{P}}_n$, а вероятности попадания произвольной цепочки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в множества $\mathscr{K}_n^0$ и $\mathscr{K}_n^1$ находятся как отношения мощностей соответствующих множеств:

$$\widetilde{\mathrm{P}}_n\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^0\right\} = \frac{\left|\mathscr{K}_n^0\right|}{\left|\mathscr{K}_n\right|} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\,, \tag{3}$$

$$\widetilde{\mathrm{P}}_n\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^1\right\} = \frac{\left|\mathscr{K}_n^1\right|}{\left|\mathscr{K}_n\right|} = \frac{F_{n}}{F_{n+2}}\,, \tag{4}$$

то есть для их определения используется классическое определение вероятностей.

3.2. Определение асимптотического распределения в рамках частотной модели

При классическом определении вероятностей $\widetilde{\mathrm{P}}_n$ асимптотическое распределение находится как обычные пределы отношения вероятностей (3) и (4):

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\mathrm{P}}_n\left(\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n^0\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{1}{\phi}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \widetilde{\mathrm{P}}_n\left(\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n^1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n}}{F_{n+2}} = \frac{1}{\phi^2}\,, \tag{5}$$

где $\overline{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n$.

Значениям пределов (5) часто сопоставляются вероятностям попадания последовательности $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots,$
$x_n, \ldots) \in \mathscr{K}$ в множества $\mathscr{K}^0$ и $\mathscr{K}^1$соответственно, то есть в соответствии с (5) на данных двух множествах определяется вероятностная мера $\widetilde{\mathrm{P}}$ так, чтобы попаданию произвольной цепочки $\overline{x}$ в множества $\mathscr{K}^0$ и $\mathscr{K}^1$ соответствовали вероятности

$$\widetilde{\mathrm{P}}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^0\right\} := \frac{1}{\phi}\,, \tag{6}$$

$$\widetilde{\mathrm{P}}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^1\right\} := \frac{1}{\phi^2}\,. \tag{7}$$

В силу справедливости равенств $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ и свойств предела вектор

$$\vec{q} = (q_0, q_1) = \left(\frac{1}{\phi}, \frac{1}{\phi^2}\right) \tag{8}$$

является стохастическим. Это также следует из известного для золотого сечения [11, стр. 24] равенства $\phi^2 = 1 + \phi$.

3.3. Несогласованность распределений в рамках частотной модели

Сопоставление вектора $\vec{q}=(q_0,q_1)$ вероятностям попадания в множества $\mathscr{K}^0$ и $\mathscr{K}^1$ с вероятностной точки зрения носит условный характер. Это можно объяснить тем, что распределения $\widetilde{\mathrm{P}}_n$, $n\in\mathbb{N}$ не согласованы, то есть не удовлетворяют теореме Колмогорова о продолжении меры (см. выше теорему 2). В связи с этим они не позволяют определить на $\mathscr{K}$ согласованную с ними вероятность $\widetilde{\mathrm{P}}$ так, чтобы выполнялись равенства $\widetilde{\mathrm{P}}\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\in\mathscr{K}^0\right\}=\phi^{-1}$ и $\widetilde{\mathrm{P}}\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\in\mathscr{K}^1\right\}=\phi^{-2}$.

Для дальнейших рассуждений отметим, что в предельном случае (8) отношение асимптотических вероятностей q_0 и q_1 в точности равно ϕ, в то время как согласно (1) отношение вероятностей (3) и (4)

$$\frac{\widetilde{\mathrm{P}}_n\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathscr{K}_n^0\right\}}{\widetilde{\mathrm{P}}_n\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathscr{K}_n^1\right\}}=\frac{\left|\mathscr{K}_n^0\right|}{\left|\mathscr{K}_n^1\right|}=\frac{F_{n+1}}{F_n}\sim\phi \tag{9}$$

зависит от n (длины вектора) и только стремится к ϕ с ростом n.

4. Марковская модель как метод построения согласованных распределений

Для построения согласованных распределений будем использовать цепь Маркова.

4.1. Построение распределения вероятностей как цепи Маркова

Цепь Маркова или иначе *модель испытаний, связанных в цепь Маркова* можно полностью определить (подробнее см. [7, стр. 140]), задав вероятности P_n на всех двоичных последовательностях $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ из $\mathscr{K}_n$ по формуле (в ней нижнии индексы вероятностей перехода и составляют «цепь», последовательно «зацепляясь друг за друга»)

$$\mathrm{P}_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right):=q_{x_1}\cdot p_{x_1x_2}\cdot p_{x_2x_3}\cdot\ldots\cdot p_{x_{n-1}x_n}\,, \tag{10}$$

в которой вероятности перехода $p_{x_kx_{k+1}}$ от числа x_k к числу x_{k+1} в силу того, что $x_k\in\{0,1\}$, имеют всего четыре значения: p_{00}, p_{01}, p_{11}, p_{10} , а вероятности q_{x_1} появления первого значения x_1 в последовательности $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ только два: q_0, q_1. Значения p_{00}, p_{01}, p_{11}, p_{10} записанные в виде матрицы

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix}p_{00}&p_{01}\\p_{10}&p_{11}\end{pmatrix}$$

составляют *матрицу перехода* однородной цепи Маркова за один шаг [7, 2], а значения q_0, q_1, записанные в виде стохастического вектора $\vec{q}=(q_0,q_1)$ — *начальное распределение* цепи Маркова.

Цепь Маркова полностью определяется своей матрицей перехода и своим начальным распределением. В контексте нашей задачи цепь Маркова используется как способ задания распределений P_n с помощью формулы (10).

Семейство распределений $\{\mathrm{P}_n\}$, построенное по правилу (10), является согласованным. Поэтому согласно теореме Колмогорова на множестве бесконечных бинарных последовательностей $\mathscr{K}$ оно определяет некоторое распределение P.

4.2. Условие совпадения асимптотических распределений

Найдём среди множества согласованных семейств распределений вида (10) те, которые индуцируют на $\mathscr{K}$ меру P так, чтобы вероятности множеств $\mathscr{K}^0$ и $\mathscr{K}^1$ совпадали бы со значениями вероятностей (6) и (7) асимптотического распределения $\widetilde{\mathrm{P}}$ из классической частотной модели, то есть так, чтобы гарантировать для P выполнение равенств

$$\mathrm{P}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^0\right\} = \frac{1}{\phi}\,, \tag{11}$$

$$\mathrm{P}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^1\right\} = \frac{1}{\phi^2} \tag{12}$$

и, следовательно, соотношения

$$\frac{\mathrm{P}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^0\right\}}{\mathrm{P}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^1\right\}} = \phi\,.$$

Аналогичные требования наложим и на сами вероятностные меры P_n:

$$\mathrm{P}_n\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^0\right\} = \frac{1}{\phi}\,, \tag{13}$$

$$\mathrm{P}_n\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^1\right\} = \frac{1}{\phi^2}\,. \tag{14}$$

Таким образом, построеные распределения P_n будут не просто гарантировать существование на пространстве бесконечных последовательностей распределения P со свойствами (11) и (12), но и при каждом натуральном n сами будут обладать подобными свойствами (13) и (14). Такое свойство данных распределений, в частности позволяет заменять при статистических исследованиях распределение P на P_n при любом натуральном n.

Обратим внимание на то, что асимптотическое распределение в смысле равенств (6) и (7) не совпадает с предельным распределением цепи Маркова [13, стр. 118] как численно так и по определению. Изучение связи между ними требует отдельного рассмотрения.

Оказывается, что за численные значения асимптотического распределения цепи Маркова в рассматриваемой нами задаче отвечает только её начальное распределение. При этом матрица переходных вероятностей может быть любой из класса матриц вида

$$\mathbb{P}_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $0 < \alpha < 1$. Обозначим класс распределений вероятностей, определяемых матрицами вида $\mathbb{P}_\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, через $\mathscr{P}$.

Лемма 1. *Распределение вероятностей цепи Маркова, порождаемое матрицей (15) и начальным вектором $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$, определяет на множестве $\mathscr{K}$ распределение* P*, для которого выполнены равенства (11) и (12).*

Доказательство. 1. По построению $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$ есть начальное распределение цепи, то есть ϕ^{-1} – это вероятность появления на первом месте последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ нуля, а ϕ^{-2} – вероятность появления единицы. Поэтому равенства (11) и (12) верны, как вероятности появления на первом месте нуля и единицы соответственно. Их можно рассматривать как вероятностные меры одномерных цилиндров (одномерных цилиндрических множеств) $(0, x_2, \ldots, x_{n,\ldots})$ и $(1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots})$.

2. Распределение цепи Маркова (10) порождаемое матрицей (15) будет иметь своим носителем (множество, на котором оно невырождено) только такие последовательности, в которых

никакие две единицы не стоят рядом, поскольку вероятность такого события определяется элементом $p_{11} = 0$ матрицы $\mathbb{P}_\alpha$, то есть вероятность того, что две единицы стоят рядом равна нулю. Из этого условия следует, что $p_{10} = 1$, то есть для любой последовательности из носителя с вероятностью единица после 1 следует 0. Такие последовательности и составляют множество $\mathscr{K}$.

□

Аналогичное доказательство имеет подобная лемма и для пространств $\mathscr{K}_n$ с распределением P_n.

Лемма 2. *Распределение вероятностей цепи Маркова, порождаемое матрицей (15) и начальным вектором $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$, определяет на множестве $\mathscr{K}_n$ распределение P_n, для которого выполнены равенства (13) и (14).*

4.3. Энтропия как условие близости цепи Маркова к статистической модели

Согласно результатам предыдущего пункта имеется бесконечно много распределений (моделей), построенных с помощью цепей Маркова, асимптотические распределения которых совпадают с асимптотическим распределением частотной модели. Как известно, частотная модель описывается с помощью равномерного распределения и в теории вероятностей называется классической.

Среди всех моделей, построенных нами выше с помощью цепи Маркова, определим наиболее близкую к классической частотной модели, аппелируя к понятию энтропии (см. [14, 15, 16]). Поскольку самая большая энтропия соответствует равномерному распределению [2, стр. 295], то среди всех распределений из класса $\mathscr{P}$, описываемого матрицами (15) и начальным вектором (8), возьмём только то, которое имеет максимальную данном классе распределений энтропию.

Поскольку "выравнивание" вероятностей приводит к увеличению энтропии, то не вызывает удивления, что самой большой энтропией обладает равномерное распределение, поскольку у него вероятности "выравнены" на всей области определения, то есть вероятности всех цепочек из $\mathscr{K}$ равны. Ближайшей ступенью близости с точки зрения разбиения пространства элементарных исходов (последовательностей) на классы (далее *классы равномерности*), внутри которых элементарные исходы имеют одинаковые значения вероятностей, являются распределения с двумя классами равномерности.

Ниже мы докажем, что модель с максимальной энтропией единствена, имеет ровно два класса равномерности и может быть определена с помощью матрицы перехода (17), начального распределения (8), которое совпадает с асимптотическим распределением частотной модели.

Для описания энтропии кроме матрицы $\mathbb{P}$ введём матрицу *переходных вероятностей цепи Маркова* за $m \in \mathbb{N}_0$ *шагов*:

$$\mathbb{P}^{(m)} := \left\| p_{ij}^{(m)} \right\| .$$

Согласно определению $\mathbb{P}^{(0)} := E, \mathbb{P}^{(1)} := \mathbb{P}$. Для таких матриц $\mathbb{P}^{(m)}$ однородных цепей Маркова верно равенство $\mathbb{P}^{(m)} = \mathbb{P}^m$.

В нашем случае путем подстановки соответствующих значений вероятностей в общую формулу [7, стр. 145] для цепей Маркова с двумя состояниями для $\mathbb{P}_\alpha^{(m)}$ получается представление

$$\mathbb{P}_\alpha^m = \frac{1}{1+\alpha}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(-\alpha)^m}{1+\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из него следует, что если $0 < \alpha < 1$, то при $m \to +\infty$ существуют *предельные вероятности* (см. [7, стр. 833] и [13, стр. 118])

$$\pi_j := \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0\,,$$

такие, что

$$\mathbb{P}^m \longrightarrow \tfrac{1}{1+\alpha}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\pi} \\ \vec{\pi} \end{pmatrix},$$

где предельная матрица состоит из двух одинаковых стохастических векторов

$$\overline{\pi} = \left(\tfrac{1}{1+\alpha}\,,\ \tfrac{\alpha}{1+\alpha} \right). \tag{16}$$

В силу определения компонент вектор $\overline{\pi}$ через определение предела последовательности чисел вектор $\overline{\pi}$ единственен. Поскольку при $0 < \alpha < 1$ все финальные вероятности положительны, то есть

$$\overline{\pi} = (\pi_0,\, \pi_1) > 0\,,$$

то любая цепь Маркова с такими параметрами *эргодическая* [7, стр. 811]. Напомним, что в этом случае стохастический вектор $\vec{\pi}$ так же является *стационарным* (или *инвариантным*) *распределением* [7, стр. 147, 809] однородной цепи Маркова, то есть он является левым собственным вектором матрицы переходных вероятностей $\mathbb{P}$ с собственным значением $\lambda = 1$:

$$\vec{q}\,(\mathbb{P} - E) = 0\,.$$

К тому же вектор $\vec{\pi}$ будет совпадать с предельным распределением цепи Маркова [10, стр. 117]. Каждому стохастическому вектору $\vec{q} = (1-q, q)$ сопоставим число $H\,(\vec{q})$, воспользовавшись формулой

$$H\,(\vec{q}) = -\,(1-q)\log_2(1-q) - q\log_2(q)\,,$$

которое называется *энтропией вектора* $\vec{q}$ (при этом $\log_2(0)$ заменяется на 0).

Для эргодической цепи Маркова с $\mathbb{P}_\alpha$ вида (15) существует величина $H_\infty(\mathbb{P}_\alpha)$, называемая *предельной энтропией* или *энтропией цепи Маркова* [15], которая определяется равенством

$$H_\infty(\mathbb{P}_\alpha) = \sum_{k=0}^{1} \pi_k H\left(\mathbb{P}_{(k+1)}\right) =$$

$$= \pi_0 \cdot H\left(\mathbb{P}_{(1)}\right) = -\pi_0 \cdot \left((1-\alpha)\log_2(1-\alpha) + \alpha\log_2(\alpha)\right).$$

где $\mathbb{P}_{(k+1)}$ означает k-ю строку матрицы перехода $\mathbb{P}_\alpha$ вида (15).

Из определения следует, что предельная энтропия $H_\infty(\mathbb{P}_\alpha)$ при каждом фиксированном α из интервала $(0,1)$ в силу эргодичности цепи Маркова не зависит от начального распределения $\vec{q}$, и поэтому будет одинакова при фиксированной матрице $\mathbb{P}_\alpha$ и различных начальных распределениях $\vec{q} = (q_0, q_1)$.

4.4. Марковская модель с максимальной энтропией

Приведём доказательство того, что модель с максимальной энтропией и фиксированным начальным распределением единственна, точнее верна следующая теорема.

Теорема 2. *Максимум энтропии $H_\infty(\mathbb{P}_\alpha)$ из класса $\mathscr{P}$ достигается на цепи Маркова с матрицей перехода за один шаг*

$$\mathbb{P}_{\phi^{-2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & 3-\sqrt{5} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi} & \frac{1}{\phi^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

и равен

$$H_\phi := H\left(\phi^{-2}\right) = \log_2\phi \approx \frac{25}{36}\,.$$

Доказательство. Поскольку, как указано выше, для каждого представителя рассматриваемого семейства цепей Маркова с $\mathbb{P}_\alpha$ существует $H_\infty(\mathbb{P}_\alpha)$, а стационарное распределение имеет вид (16), то при $0<\alpha<1$ для решения задачи нужно найти максимум функции

$$H(\alpha) := H_\infty(\mathbb{P}_\alpha) = \pi_0 \cdot h(\alpha) =$$

$$= -\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\log_2(1-\alpha) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\log_2(\alpha)\ .$$

Её производная

$$H'(\alpha) = \frac{2\log_2(1-\alpha) - \log_2(\alpha)}{1+\alpha}\,.$$

Тогда равенство $H'(\alpha)=0$ возможно при

$$\alpha = (1-\alpha)^2\ , \quad 1-3\alpha+\alpha^2 = 0\,.$$

Откуда при таких соотношениях на α в силу равенств

$$H(\alpha) = \frac{\alpha-1}{1+\alpha}\log_2(1-\alpha) - \frac{2\alpha}{1+\alpha}\log_2(1-\alpha) =$$

$$= -\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)\log_2(1-\alpha) = -\log_2(1-\alpha)$$

следует, что

$$H(\alpha) = -\log_2(1-\alpha)\ .$$

Единственным положительным решением уравнения $H'(\alpha)=0$ является число

$$\alpha_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{1}{\phi}\,,$$

где ϕ было определено выше формулой (2). Поэтому

$$H(\alpha_0) = -\log_2(1-\alpha_0) = \log_2\phi \approx \frac{25}{36}$$

и

$$H_\phi := \max_\alpha H(\alpha) = \log_2\phi \approx 0,6942419\,.$$

Данное значение соответствует цепи Маркова с матрицей перехода за один шаг

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_0 & \alpha_0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi} & 1-\frac{1}{\phi} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Найдём явное значение стационарного вектора для такой матрицы, проверив тем самым, что асимптотическое распределение численно не совпадает с предельным распределением цепи Маркова.

Лемма 3. *Стационарный вектор цепи Маркова с матрицей $\mathbb{P}_{\phi^{-2}}$ равен*

$$\overline{\pi} = \left(\ \frac{\phi}{\sqrt{5}}\,, \frac{\phi-1}{\sqrt{5}}\ \right) = \left(\ \frac{\phi^2}{1+\phi^2}\,, \frac{1}{1+\phi^2}\ \right). \tag{18}$$

Доказательство. 1. Поскольку в рассматриваемом случае

$$\overline{\pi} = \left(\tfrac{1}{1+\alpha_0}\,,\, \tfrac{\alpha_0}{1+\alpha_0} \right), \quad \alpha_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{1}{\phi}\,,$$

то

$$\alpha_0 = 1 - \frac{1}{\phi} = 1 - \left(1 - \frac{1}{\phi^2}\right) = \frac{1}{\phi^2}$$

и

$$\overline{\pi} = \left(\tfrac{1}{1+1/\phi^2}\,,\, \tfrac{1/\phi^2}{1+1/\phi^2} \right) = \left(\tfrac{\phi^2}{1+\phi^2}\,,\, \tfrac{1}{1+\phi^2} \right).$$

2. Иначе

$$\frac{1}{1+\alpha_0} = \frac{1}{1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{5-\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}\,.$$

Откуда

$$\overline{\pi} = \left(\tfrac{\phi}{\sqrt{5}}\,,\, \tfrac{\phi-1}{\sqrt{5}} \right) = \left(\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}\,,\, \tfrac{5-\sqrt{5}}{10} \right) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{5}}\,,\, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \right).$$

□

Замечание 6. *Согласно (18) при совпадении начального распределения $\vec{q}$ со стационарным $\overline{\pi}$ вероятность появления нуля в ϕ^2 раз больше появления единицы.*

Замечание 7. *Также при любом начальном распределении $\vec{q}$ согласно (18) асимптотически (при больших n) появления нуля в ϕ^2 раз больше появления единицы .*

В качестве примера для сравнения укажем, что для цепи Маркова с матрицей перехода за один шаг

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть в случае, когда переход в состояния 1 или 0 после появления 0 равновероятностен, соответствующее значение энтропии равно

$$H_2 := H_\infty\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} = \frac{24}{36}\,.$$

4.5. Построение распределения цепи Маркова через классы равномерности

Как уже говорилось выше, поскольку равномерную модель определяют как модель, у которой все исходы равноправны, то в этом смысле наиболее близкой к ней является модель, у которой все исходы делятся на два класса, внутри которых все реализации равноправны между собой. В рассматриваемой модели в общем случае таких равновероятностных классов векторов оказывается не более четырёх. Четыре класса появляются при большинстве произвольных значений начального распределения цепи Маркова $\vec{q} = (q_0, q_1)$. А при начальном распределении $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$ таких классов всего два. Меньше для случая согласованных распределений быть не может, поскольку тогда существует только один класс равнораспределённых векторов, то есть цепь Маркова вырождается в равномерное на $\mathscr{K}$ распределение (частотную модель), при котором в нашей задаче, как мы уже видели, исчезает свойство согласованности распределений. Таким образом, построенная выше цепь Маркова является наилучшей на $\mathscr{K}$ в смысле числа таких классов.

Теорема 3. *Распределение вероятностей цепи Маркова, порождаемое матрицей (17) и начальным вектором* $\vec{q} = (q_0, q_1)$, *разбивает множество* $\mathscr{K}_n$ *на четыре класса* $\mathscr{K}_n^{ij}$, $i, j = 0, 1$ *равновероятностных векторов. При этом для* $\overline{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^{00}$

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_0 \cdot \frac{1}{\phi^{n-1}}\,,$$

для $\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n^{10}$

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_1 \cdot \frac{1}{\phi^{n-2}}\,,$$

для $\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n^{01}$

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_0 \cdot \frac{1}{\phi^{n}}\,,$$

для $\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n^{11}$

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_1 \cdot \frac{1}{\phi^{n-1}}\,.$$

Доказательство. 1. Равнораспределённость цепочек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в каждом из четырёх рассматриваемых классов докажем методом математической индукции опираясь на равенство вероятностей появления в них подпоследовательностей 010 и 000. Вероятности появления подпоследовательностей 010 и 000 равны в силу справедливости следующих равенств:

$$p_{01} \cdot p_{10} = \frac{1}{\phi^2} \cdot 1 = \frac{1}{\phi} \cdot \frac{1}{\phi} = p_{00} \cdot p_{00}\,, \tag{19}$$

где вероятности p_{01}, p_{10}, p_{00} берутся из (17).
2. Если рассмотреть $\overline{x}_n = (0, \ldots, 0) \in \mathscr{K}_n^{00}$, то

$$\mathrm{P}_n\,(0, \ldots, 0) = q_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$
$$= q_0 \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\phi} = q_0 \cdot \frac{1}{\phi^{n-1}}\,.$$

Возьмём вектор $\overline{x}_n = (0, \ldots, 0) \in \mathscr{K}_n^{00}$ в качестве базы индукции для доказательства равновероятности цепочек из класса $\mathscr{K}_n^{00}$. Индукцию будем проводить по количеству единиц в векторе. Предположим, что утверждение верно для любых векторов $\overline{x}_n(k)$, содержащих ровно k единиц, из класса $\mathscr{K}_n^{00}$.

Рассмотрим произвольный вектор $\overline{x}_n(k+1) \in \mathscr{K}_n^{00}$, содержащий $k+1$ единицу. Пусть у него первая единица стоит на j-ом месте. Рассмотрим вектор $\overline{x}_n(k) \in \mathscr{K}_n^{00}$, у которого отсутствует единица на j-ом месте, а все остальные позиции единиц совпадают с позициями единиц у вектора $\overline{x}_n(k+1) \in \mathscr{K}_n^{00}$. Тогда

$$\mathrm{P}_n\,(\overline{x}_n(k+1)) = q_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{j-1} i_j} \cdot p_{i_j i_{j+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$
$$= q_0 \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{01} \cdot p_{10} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$
$$= q_0 \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{00} \cdot p_{00} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$
$$= \mathrm{P}_n\,(\overline{x}_n(k)) = q_0 \cdot \frac{1}{\phi^{n-1}}\,.$$

Таким образом, утверждение доказано для любого вектора $\overline{x}_n$ из класса $\mathscr{K}_n^{00}$.
3. Если теперь рассмотреть вектор $\overline{x}_n = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{K}_n^{10}$, содержащий ровно одну единицу, то

$$\mathrm{P}_n\,(1, 0, \ldots, 0) = q_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$

$$= q_1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\phi} = q_1 \cdot \frac{1}{\phi^{n-2}}\,.$$

Для вектора с одной единицей $\overline{x}_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathscr{K}_n^{01}$ имеем

$$\mathrm{P}_n\,(0, \ldots, 0, 1) = q_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$

$$= q_0 \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\phi^2} = q_0 \frac{1}{\phi^n}\,.$$

Для вектора $\overline{x}_n = (1, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathscr{K}_n^{11}$ ровно с двумя единицами

$$\mathrm{P}_n\,(1, 0, \ldots, 0, 1) = q_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$

$$= q_1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi^{n-1}}\,.$$

Доказательства совпадения значения вероятностей внитри одного данного класса векторов для классов $\mathscr{K}_n^{10}$, $\mathscr{K}_n^{01}$, $\mathscr{K}_n^{11}$ проводим аналогично доказательству для класса $\mathscr{K}_n^{00}$, только в качестве базиса индукции нужно взять соответственно вектора $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \ldots 0, 1)$, $(1, 0, \ldots 0, 1)$.

□

Последняя теорема позволяет определить изучаемое нами распределение не матрицей (17) и начальным распределением (8), а вероятностями появления только двух векторов из двух классов равновероятностных подмножеств. Такой способ определения данного распределения не требует никаких утверждений из теории цепей Маркова и достаточно лаконичен.

Теорема 4. *Согласованные распределения вероятностей*

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\phi^n}\,, \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \widetilde{\mathscr{K}_n^0}\,,$$

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\phi^{n+1}}\,, \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \widetilde{\mathscr{K}_n^1}$$

определяют на множестве $\mathscr{K}$ распределение P, *для которого выполнены равенства (11) и (12). Оно так же совпадает с распределением, порождаемым матрицей (17) и начальным вектором $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$.*

Доказательство. Заметим, что в теореме 3 вероятности появления любой последовательности из множеств $\mathscr{K}_n^{00}$ и $\mathscr{K}_n^{10}$ при $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$ совпадают: для $\overline{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^{00}$

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_0 \cdot \frac{1}{\phi^{n-1}} = \frac{1}{\phi^n}\,,$$

для $\overline{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^{10}$

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_1 \cdot \frac{1}{\phi^{n-2}} = \frac{1}{\phi^n}\,.$$

На этом основании их можно объединить в один равновероятностный класс:

$$\widetilde{\mathscr{K}_n^0} = \{\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n : x_n = 0\} = \mathscr{K}_n^{00} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{10},$$

мощность которого согласно формулам из пункта 2. равна F_{n+1}.

Аналогичная картина с множествами $\mathscr{K}_n^{11}$ и $\mathscr{K}_n^{01}$. Поэтому определим множество

$$\widetilde{\mathscr{K}_n^1} = \{\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n : x_n = 1\} = \mathscr{K}_n^{11} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{01}\,,$$

мощность которого равна F_n, а вероятность появления вектора из него – ϕ^{-n-1}. □

4.6. Некоторые следствия

Одним из следствий доказанной выше теоремы 5 является следующее известное утверждение о числах Фибоначчи и золотом сечении. В рамках нашей задачи оно имеет вероятностный смысл и вероятностное доказательство.

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$\frac{F_{n+1}}{\phi^n} + \frac{F_n}{\phi^{n+1}} = 1\,. \tag{20}$$

Доказательство. Поскольку общее количество векторов из класса $\widetilde{\mathscr{K}_n^0}$ равно F_{n+1}, а вероятность появления любого из них равна ϕ^{-n}, произведение $F_{n+1}\cdot\phi^{-n}$ есть вероятность появления любого вектора из класса $\widetilde{\mathscr{K}_n^0}$.

Аналогично общее количество векторов из класса $\widetilde{\mathscr{K}_n^1}$ равно F_n, а вероятность появления любого из них равна ϕ^{-n-1}. Поэтому вероятность появления любого вектора из класса $\widetilde{\mathscr{K}_n^1}$ равна произведению $F_n\cdot\phi^{-n-1}$.

Сумма данных вероятностей равна единице, поскольку они составляют полную группу событий, и поэтому одно из данных событий появится обязательно. Данные рассуждения можно записать как

$$F_{n+1}\cdot\phi^{-n} + F_n\cdot\phi^{-n-1} = \mathrm{P}_n\left\{\overline{x}_n \in \widetilde{\mathscr{K}_n^0}\right\} + \mathrm{P}_n\left\{\overline{x}_n \in \widetilde{\mathscr{K}_n^1}\right\} =$$

$$= \mathrm{P}_n\left\{\overline{x}_n \in \widetilde{\mathscr{K}_n^0},\, \overline{x}_n \in \widetilde{\mathscr{K}_n^1}\right\} = \mathrm{P}_n\left\{\overline{x} \in \widetilde{\mathscr{K}_n}\right\} = 1\,.$$

□

Замечание 8. *Соотношение (20) соответствует известному представлению степени числа ϕ:*

$$\phi^{n+1} = F_n + \phi F_{n+1}.$$

Следствием теоремы 4 является другое доказательство равенств (13) и (14), которое показывает структуру сохранения асимптотических значений распределения при переходе от векторов длины $n-1$ к векторам длины n.

Следствие 2. *Вероятности последовательностей из $\mathscr{K}_n^0$ (или $\mathscr{K}_n^1$) при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ совпадают между собой и с вероятностями (6) (или (7)) асимптотического распределения частотной модели.*

Доказательство. Вероятности попадания произвольной цепочки в множества $\mathscr{K}_n^0$ и $\mathscr{K}_n^1$ можно легко найти исходя из теоремы 4:

$$\mathrm{P}_n\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathscr{K}_n^0\right\} = \frac{F_n}{\phi^n} + \frac{F_{n-1}}{\phi^{n+1}} = \frac{F_{n-1}+\phi F_n}{\phi^{n+1}} = \frac{\phi^n}{\phi^{n+1}} = \frac{1}{\phi}\,, \tag{21}$$

$$\mathrm{P}_n\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathscr{K}_n^1\right\} = \frac{F_{n-1}}{\phi^n} + \frac{F_{n-2}}{\phi^{n+1}} = \frac{F_{n-2}+\phi F_{n-1}}{\phi^{n+1}} = \frac{\phi^{n-1}}{\phi^{n+1}} = \frac{1}{\phi^2}\,. \tag{22}$$

□

В заключение данного пункта отметим, что рассматриваемое нами распределение встречается в других задачах и обладает ещё рядом дополнительных свойств (см, например, работы [17, стр. 111] и [18, стр. 348]), изучение которых выходят за рамки данной работы.

5. Заключение

На примере последовательностей без 1-серий в статье показано, как строить множество согласованных распределений, которые задаются с помощью однородной цепи Маркова. Эти распределения строятся согласованными так, чтобы асимптотическое распределение вероятностей (8) из классической частотной модели совпадало с аналогичным распределением предложенной модели, а само распределение было максимально близко к равномерному в смысле близости энтропий.

Такой подход, благодаря выполнению теоремы А.Н. Колмогорова о продолжении меры, позволяет использовать методы теории вероятностей при изучении свойств бесконечных последовательностей без 1-серий в контексте множеств $\widetilde{\mathscr{K}_n^0}$ и $\widetilde{\mathscr{K}_n^1}$, что даёт строгое математическое обоснование получаемым результатам, а кроме того позволяет применять вероятностные методы при её дальнейшем исследовании, и математически обосновывают совпадение результатов для пространств статистических экспериментова в рамках предложенной марковской модели.

Отметим, что стационарное распределение предложенной здесь цепи Маркова для обоснования асимптотического распределения равновероятностной модели появляется в качестве предельного распределения в теореме А.О. Гельфонда [19] об остатках разложения чисел из интервала $(0, 1]$, если в ней в качестве основания разложения θ взять ϕ.

Предложенный метод можно очевидным образом повторять в других подобных задачах для изменения частотной модели на модель согласованных распределений.

6. Благодарности

Авторы приносят благодарность проф. В.Н. Чубарикову и к.ф.-м.н. В.В. Козлову за постоянное внимание к данной работе, плодотворное обсуждение и редакционные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 156 с.

2. Боровков А. А. Вероятность. — М.: Наука, 1986. 432 с.

3. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1944, т. 8, вып. 1, с. 3–48.

4. Амелькин В. А. Алгоритмы точного решения задач перечисления, кодирования и генерирования серийных последовательностей // Сиб. журн. вычисл. математики. 2001, т. 4, № 1, с. 1-12.

5. Минеев М. П., Чубариков В. Н. Лекции по арифметическим вопросам криптографии. — М.: Луч, 2014. 224 с.

6. Прохоров А. В. Вероятность и математическая статистика: энциклопедия / под редакцией Ю.В. Прохорова. — М.: БРЭ, 2003. 910 с.

7. Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: МЦНМО, 2004. 927 с.

8. Феллер У. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1984. 752 с.

9. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. — М.: Наука, 1971. 664 с.

10. Романовский В. И. Дискретные цепи Маркова — М.,Л.: Гостехиздат, 1949. 436 с.

11. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1964. 71 с.

12. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2008. 638 с.

13. Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 328 с.

14. Шеннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963. 829 с.

15. Хинчин А. Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // УМН. 1953, т. 8., № 3(55), с. 3–20.

16. Юшкевич А. А. О предельных теоремах, связанных с понятием энтропии цепей Маркова // УМН. 1953, т. 8, № 5(57), с. 177–180.

17. Вершик А. М., Н. А. Сидоров Н. А. Арифметические разложения, ассоциированные с поворотом окружности и непрерывными дробями // Алгебра и анализ, 1993, т. 5, № 6, с. 97–115.

18. Куликова В. Л., Олехова Е. Ф., Оселедец В. И. Об абсолютной непрерывности меры Эрдёша для золотого сечения, числа трибоначчи и марковских цепей второго порядка // ТВП, 2024, т. 69, № 2, с. 335–353.

19. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, т. 23, в. 6, с. 809–814.

REFERENCES

1. Kac, M. 1959, *Probability and related topics in physical sciences, Lectures in Applied Mathematics, vol. I*, Interscience Publishers, New York, 266 p.

2. Borovkov, A.A. 2013, *Probability theory*, Springer-Verlag, Berlin, 733 p.

3. Goncharov, V.L. 1944, “Du domaine de l’analyse combinatoire”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 8, no. 1, pp. 3–48.

4. Amelkin, V.A. 2001, “Algorithms for exact solving the problems of enumeration, coding, and generation of serial sequences” [Algoritmy tochnogo resheniya zadach perechisleniya, kodirovaniya i generirovaniya serijnykh posledovatel’nostej], *Sibirskii Zhurnal Vychislitel’noi Matematiki*, vol. 4, no. 1, pp. 1–12.

5. Mineev, M.P. & Chubarikov, V.N. 2014, *Lectures on the arithmetic aspects of cryptography* [Lektsii po arifmeticheskim voprosam kriptografii], Izdatel’stvo Luch, Moscow, 224 p.

6. Prokhorov, A.V. (ed.) 2003, *Probability and mathematical statistics: Encyclopedia* [Veroyatnost’ i matematicheskaya statistika: entsiklopediya], Izdatel’stvo Bol’shaya Rossiiskaya Entsiklopediya, Moscow, 910 p.

7. Shiryaev, A.N. 2004, *Probability* [Veroyatnost’], Izdatel’stvo MTsNMO, Moscow, 927 p.

8. Feller, W. 1957, *An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1*, John Wiley & Sons, New York, 462 p.

9. Gikhman, I.I. & Skorokhod, A.V. 2004, *The theory of stochastic processes, Vol. 1*, Springer-Verlag, Berlin, 574 p.

10. Romanovsky, V.I. 1970, *Discrete Markov chains*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 408 p.

11. Vorobyov, N.N. 1964, *Fibonacci numbers* [Chisla Fibonacci], Izdatel'stvo Nauka, Moscow, 71 p.

12. Arkhipov, G.I., Sadovnichy, V.A. & Chubarikov, V.N. 2008, *Lectures on mathematical analysis* [Lektsii po matematicheskomu analizu], Izdatel'stvo Drofa, Moscow, 638 p.

13. Klimov, G.P. 1986, *Probability theory and mathematical statistics*, Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, Moscow, 336 p.

14. Shannon, C.E. 1963, *Works on information theory and cybernetics* [Raboty po teorii informatsii i kibernetike], Izdatel'stvo Inostrannoi Literatury, Moscow, 829 p.

15. Khinchin, A.Ya. 1953, "The concept of entropy in probability theory", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol. 8, no. 3, pp. 3–20.

16. Yushkevich, A.A. 1953, "On limit theorems connected with the concept of entropy of Markov chains", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 8, no. 5, pp. 177–180.

17. Vershik, A.M. & Sidorov, N.A. 1994, "Arithmetic expansions associated with the rotation of a circle and continued fractions", *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 5, no. 6, pp. 1121–1136.

18. Kulikova, V.L., Olekhova, E.F. & Oseledets, V.I. 2024, "On absolute continuity of the Erdos measure for the golden ratio, Tribonacci numbers, and second-order Markov chains", *Theory of Probability and Its Applications*, vol. 69, no. 2, pp. 265–280.

19. Gelfond, A.O. 1959, "A common property of number systems", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 23, no. 6, pp. 809–814.

Получено: 27.09.2025
Принято в печать: 08.12.2025