

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511. 344

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-184-202

Обобщённая проблема Эстермана для нецелых степеней с почти пропорциональными слагаемыми

Ф. З. Рахмонов, П. З. Рахмонов

Рахмонов Фируз Заруллович — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана (г. Душанбе, Таджикистан).

e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Рахмонов Парвиз Заруллович — кандидат физико-математических наук, Matex Group Plc (г. Лондон, Великобритания).

e-mail: parviz.msu@gmail.com

Светлой памяти Геннадия Ивановича Архипова. Настоящая работа посвящается 80-летию со дня рождения Геннадия Ивановича Архипова — выдающегося учёного и чуткого человека. Геннадий Иванович внёс существенный вклад в развитие аналитической теории чисел и жил по простому, но глубокому принципу: «Если можешь помочь — помоги». Он всегда был готов поддержать друзей, коллег и учеников и никогда не оставлял просьбы без внимания. Его широчайшая эрудиция и энциклопедический склад ума позволяли ему добиваться успехов во всём, за что бы он ни брался. Светлая память о нём будет жить в его работах и в сердцах тех, кто имел счастье его знать.

Аннотация

При $H \geq N^{1-\frac{1}{2c}} (\ln N)^2$, где $\mathcal{L} = \ln N$, а c — нецелое фиксированное число, удовлетворяющее условиям

$$\|c\| \geq 3c \left(2^{\lfloor c \rfloor + 1} - 1 \right) \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}, \quad c > \frac{4}{3} \left(1 + \frac{52 \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \right),$$

получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N,$$

где p_1, p_2 — простые числа, n — натуральное число,

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |[n^c] - \mu_3 N| \leq H,$$

μ_1, μ_2, μ_3 — положительные фиксированные числа, причём $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$.

Ключевые слова: проблема Эстермана, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма с нецелой степенью натурального числа.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

Рахмонов Ф. З., Рахмонов П. З. Обобщённая проблема Эстермана для нецелых степеней с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышёвский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 184–202.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 511. 344

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-184-202

Generalized Estermann problem for non-integer powers with almost proportional summands

F. Z. Rakhmonov, P. Z. Rakhmonov

Rakhmonov Firuz Zarulloevich — candidate of physical and mathematical sciences, A. Juraev Institute of Mathematics of the NAS of Tajikistan (Dushanbe, Tajikistan).

e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Rakhmonov Parviz Zarulloevich — candidate of physical and mathematical sciences, Marex Group Plc (London, United Kingdom).

e-mail: parviz.msu@gmail.com

Abstract

For $H \geq N^{1-\frac{1}{2c}}(\ln N)^2$, where $\mathcal{L} = \ln N$ and c is a fixed non-integer number satisfying

$$\|c\| \geq 3c \left(2^{[c]+1} - 1 \right) \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}, \quad c > \frac{4}{3} \left(1 + \frac{52 \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \right),$$

we obtain an asymptotic formula for the number of representations of a sufficiently large integer N in the form

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N,$$

where p_1, p_2 are prime numbers, n is a natural number, and

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |[n^c] - \mu_3 N| \leq H,$$

with μ_1, μ_2, μ_3 being fixed positive constants satisfying $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$.

Keywords: Estermann problem, almost proportional summands, short exponential sum with a non-integer power of a natural number.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

Rakhmonov, F. Z., Rakhmonov, P. Z. 2025, “Generalized Estermann problem for non-integer powers with almost proportional summands”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 184–202.

1. Введение

Эстерман [1] при $n = 2$ доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^n = N, \tag{1}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число. В работах [2, 3, 4] при $n = 2, 3, 4$ эта задача исследована при более жёстких условиях, а именно, когда слагаемые почти равны. То есть получена асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n)} \mathcal{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \quad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \quad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}. \quad (2)$$

В работе [5] при произвольном фиксированном $n \geq 3$, опираясь на новые оценки коротких тригонометрических сумм Г. Вейля [6, 7, 8, 9, 10], исследована проблема Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми и получена асимптотическая формула для числа решений уравнения (1) с условиями

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |m^n - \mu_3 N| \leq H, \quad H \geq N^{1 - \frac{1}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1} + n - 1}. \quad (3)$$

Заметим, что полученная асимптотическая формула при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$ превращается в асимптотическую формулу для обобщённой проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми, а результаты [3, 4], приведённые в (2), являются частными случаями (3).

В. Н. Чубариков поставил следующую задачу: *для фиксированных нецелых значений c исследовать короткие тригонометрические суммы вида*

$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} e(\alpha[n^c]),$$

а также уравнение (1), в котором слагаемое m^n заменяется на $[m^c]$, причём рассматривается случай почти равных слагаемых.

Первая часть этой задачи была решена в работах [11, 12, 13]. Для сумм $S_c(\alpha; x, y)$ получена оценка, равномерная по c , для всех $\alpha \in [-0.5, 0.5]$, за исключением малой окрестности нуля, а также получена асимптотическая формула с остаточным членом, равномерная по c при α из малой окрестности нуля. Эти результаты позволили доказать асимптотическую формулу в обобщённой тернарной проблеме Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми [14, 15, 16], то есть при $H \geq N^{1 - \frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2$ найдена асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N, \quad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| [n^c] - \frac{N}{3} \right| \leq H,$$

в простых числах p_1, p_2 и натуральном n , где c — фиксированное нецелое число, удовлетворяющее условиям

$$\|c\| \geq 3c(2^{[c]+1} - 1) \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}, \quad c > \frac{4}{3} + \mathcal{L}^{-0.3}.$$

В настоящей работе для произвольного фиксированного нецелого c , удовлетворяющего условию (4), доказана теорема об асимптотической формуле в обобщённой проблеме Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми. Полученный результат представляет собой обобщение и уточнение основной теоремы из работы [14].

ТЕОРЕМА 1. Пусть N — достаточно большое натуральное число, $\mathcal{L} = \ln N$, μ_1, μ_2, μ_3 — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, а c — фиксированное нецелое число, удовлетворяющее условиям

$$\|c\| \geq 3c(2^{[c]+1} - 1) \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}, \quad c > \frac{4}{3} \left(1 + \frac{52 \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \right). \quad (4)$$

Пусть $J_c(N, H)$ обозначает число решений диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N$$

в простых числах p_1, p_2 и натуральном n при условиях

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |[n^c] - \mu_3 N| \leq H.$$

Тогда при $H \geq N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2$ справедлива асимптотическая формула

$$J_c(N, H) = \frac{3H^2}{c(\mu_3 N)^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3}\right),$$

где постоянная под знаком O зависит от μ_1, μ_2, μ_3 и c .

2. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1. [17]. Пусть $2 \leq T_0 \leq x$, $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули дзета-функции. Тогда

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{x^\rho}{\rho} + R_1(x, T_0), \quad R_1(x, T_0) \ll \frac{x \mathcal{L}_x^2}{T_0}.$$

ЛЕММА 2. [17]. Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что $\zeta(s) \neq 0$, в области

$$\sigma \geq 1 - \delta(t), \quad \delta(t) = \frac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2) \ln \ln(2t+2)},$$

ЛЕММА 3. [18]. Пусть ε сколь угодно малая положительная постоянная, и $T^{\frac{35}{108}+\varepsilon} \leq H \leq T$, тогда справедливы оценки

$$N(u, T+H) - N(u, T) \ll \begin{cases} (qH)^{\frac{4}{3-2u}(1-u)} (\ln qH)^9, & \text{для } \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{3}{4}, \\ (qH)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}, & \text{для } \frac{3}{4} \leq u \leq 1, \end{cases}$$

ЛЕММА 4. [19]. Пусть $y \geq x^{0.534}$, тогда справедлива оценка

$$\frac{y}{\ln x} \ll \pi(x) - \pi(x-y) \ll \frac{y}{\ln x}.$$

ЛЕММА 5. [13]. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $\mathcal{L}_x = \ln x$, A — фиксированное положительное число больше единицы, c — нецелое число с условиями

$$1 < c \leq \log_2 \mathcal{L}_x - \log_2 \ln \mathcal{L}_x^{6A}, \quad \|c\| \geq \left(2^{[c]+1} - 1\right) (A+1) \mathcal{L}_x^{-1} \ln \mathcal{L}_x. \quad (5)$$

Тогда при $y \geq \sqrt{2cx} \mathcal{L}_x^{A+\theta}$ и $x^{1-c} y^{-1} \mathcal{L}_x^A \leq |\alpha| \leq 0,5$ справедлива оценка

$$S_c(\alpha; x, y) \ll y \mathcal{L}_x^{-A},$$

где $\theta = 0$ при $c \geq 1,1$ и $\theta = 0,5$ при $c < 1,1$.

ЛЕММА 6. [13]. Пусть $x \geq x_0 > 0$, A — фиксированное положительное число больше единицы, c — нецелое число, удовлетворяющее условиям (5). Тогда при $y \geq \sqrt{2cx}^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^A$ и $|\alpha| \leq x^{1-c} y^{-1} \mathcal{L}_x^A$ справедлива асимптотическая формула

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \int_{x-y}^x e(\alpha(t^c - 0,5)) dt + O\left(\frac{y |\sin \pi \alpha|}{\mathcal{L}_x^A}\right).$$

ЛЕММА 7. [5] Пусть μ_k — фиксированное действительное число, $0 < \mu_k < 1$, N — достаточно большое натуральное число, $N_k = \mu_k N + H$, $k = 1, 2$, $N^{\frac{1}{2}} \leq H \leq N^{1-\frac{1}{30}}$,

$$S(\alpha; N_k, 2H) = \sum_{N_k-2H < p \leq N_k} e(\alpha p), \quad S_1(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n).$$

Тогда имеет место соотношение

$$S(\alpha; N_k, 2H) = \frac{S_1(\alpha; N_k, 2H)}{\ln(\mu_k N)} + O\left(\frac{H^2}{N \ln(\mu_k N)}\right).$$

ЛЕММА 8. Пусть $x \geq x_0$, A — произвольное положительное фиксированное положительное число, $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}_x^{1.5A+15}$ и $|\alpha| \leq x(2\pi y^2)^{-1}$. Тогда справедлива асимптотическая формула:

$$S_1(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n) = \frac{\sin \pi \alpha y}{\pi \alpha} e\left(\alpha \left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(\frac{y}{\mathcal{L}_x^A}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$y = x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}_x^{1.5A+15}. \quad (6)$$

Применяя преобразование Абеля в интегральной форме, имеем:

$$S_1(\alpha; x, y) = - \int_{x-y}^x \psi(u) d e(\alpha u) + e(\alpha x) \psi(x) - e(\alpha(x-y)) \psi(x-y).$$

Пользуясь представлением функции Чебышёва в виде суммы по нулям дзета-функции (лемма 1) при $T_0 = (xy^{-1} + |\alpha|x) \mathcal{L}_x^{A+2}$, найдем:

$$\begin{aligned} S_1(\alpha; x, y) = & - \int_{x-y}^x \left(u - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{u^\rho}{\rho} \right) d e(\alpha u) + e(\alpha x) \left(x - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{x^\rho}{\rho} \right) - \\ & - e(\alpha(x-y)) \left((x-y) - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{(x-y)^\rho}{\rho} \right) - \\ & - \int_{x-y}^x R(u, T_0) 2\pi i \alpha e(\alpha u) du + e(\lambda x) R(x, T_0) - e(\alpha(x-y)) R(x-y, T_0). \end{aligned}$$

Применяя к первому интегралу формулу интегрирования по частям, а также пользуясь оценкой для $R(u, T_0)$ из леммы 1 и значением параметра T_0 , найдём

$$\begin{aligned} S_1(\alpha; x, y) = & \int_{x-y}^x e(\lambda u) du - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \int_{x-y}^x u^{\rho-1} e(\lambda u) du + O\left(\frac{y}{q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_x^A}\right) = \\ = & \frac{\sin \pi \lambda y}{\pi \lambda} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2}\right)\right) - W(\alpha, x, y) + O\left(\frac{y}{\mathcal{L}_x^A}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$W(\alpha, x, y) = \sum_{|\gamma| \leq T_0} I(\rho), \quad I(\rho) = \int_{x-y}^x u^{\beta-1} e\left(\alpha u + \frac{\gamma}{2\pi} \ln u\right) du.$$

Сумму $W(\alpha, x, y)$ будем оценивать только в случае $\alpha \geq 0$. При $\alpha \leq 0$, воспользовавшись соотношением

$$\begin{aligned} \overline{W(\alpha, x, y)} &= \sum_{|\gamma| \leq T_0} \int_{x-y}^x u^{\beta-1} e\left(-\alpha u - \frac{\gamma}{2\pi} \ln u\right) du = \\ &= \sum_{|\bar{\gamma}| \leq T_0} \int_{x-y}^x u^{\rho-1} u^{\beta-1} e\left(-\alpha u + \frac{\gamma}{2\pi} \ln u\right) du = W(-\alpha, x, y), \end{aligned}$$

сведем ее оценку к случаю $\alpha \geq 0$. Оценивая интеграл $I(\rho)$ тривиально, а также по величине производной первого порядка (см. [20], стр. 359), найдем:

$$|I(\rho)| \ll x^\beta \min_{x-y \leq u \leq x} \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min |\gamma + 2\pi\alpha u|} \right). \quad (8)$$

Все нули $\rho = \beta + i\gamma$ с условием $|\gamma| \leq T_0$ разобьем на множества D_1 , D_2 и D_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ \rho : -T_0 + 2\pi\alpha u \leq \gamma + 2\pi\alpha u < -2\pi\alpha x + 2\pi\alpha u - \frac{x}{y} \right\}, \\ D_2 &= \left\{ \rho : -2\pi\alpha x + 2\pi\alpha u - \frac{x}{y} \leq \gamma + 2\pi\alpha u \leq 2\pi\alpha u - 2\pi\alpha(x-y) + \frac{x}{y} \right\}, \\ D_3 &= \left\{ \rho : 2\pi\alpha u - 2\pi\alpha(x-y) + \frac{x}{y} < \gamma + 2\pi\alpha u \leq T_0 + 2\pi\alpha u \right\}. \end{aligned}$$

Обозначая через W_1 , W_2 и W_3 соответственно суммы модулей интеграла $I(\rho)$ по нулям принадлежащим множествам D_1 , D_2 и D_3 , имеем:

$$|W(\alpha, x, y)| \leq \sum_{|\gamma| \leq T_0} |I(\rho)| = W_1 + W_2 + W_3. \quad (9)$$

В отрезке $x-y \leq u \leq x$ функция $2\pi\alpha u$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы D_1 и левой границы D_3 соответственно имеем

$$-2\pi\alpha x + 2\pi\alpha u - \frac{x}{y} \leq -\frac{x}{y}, \quad 2\pi\alpha u - 2\pi\alpha(x-y) + \frac{x}{y} \geq \frac{x}{y}.$$

Следовательно, если ρ принадлежит соответственно D_1 , D_2 или D_3 , то соответственно

$$\gamma + 2\pi\alpha u < -\frac{x}{y}, \quad -\frac{x}{y} \leq \gamma + 2\pi\alpha u \leq \frac{x}{y}, \quad \gamma + 2\pi\alpha u > \frac{x}{y}.$$

Поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma + 2\pi\alpha u$ на отрезке $x-y \leq u \leq x$ справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} \min_{x-y \leq u \leq x} |\gamma + 2\pi\alpha u| &= -\max_{x-y \leq u \leq x} (\gamma + 2\pi\alpha u) = -\gamma - 2\pi\alpha x \geq \frac{x}{y}, \quad \text{если } \rho \in D_1, \\ &-\frac{x}{y} - 2\pi\alpha y \leq \gamma + 2\pi\alpha u \leq \frac{x}{y} + 2\pi\alpha y, \quad \text{если } \rho \in D_2, \\ \min_{x-y \leq u \leq x} |\gamma + 2\pi\alpha u| &= \min_{x-y \leq u \leq x} (\gamma + 2\pi\alpha u) = \gamma + 2\pi\alpha(x-y) \geq \frac{x}{y}, \quad \text{если } \rho \in D_3. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом оценки (8) для W_1 , W_2 , и W_3 , находим

$$W_1 \ll \sum_{\rho \in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi\alpha x}, \quad W_2 \ll \sum_{\rho \in D_2} y x^{\beta-1}, \quad W_3 \ll \sum_{\rho \in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi\alpha(x-y)}.$$

Суммы W_1 и W_3 оцениваются одинаково. Оценим W_1 . Все нули в множестве

$$D_1 = \left\{ \rho : \frac{x}{y} < -\gamma - 2\pi\alpha x \leq T_0 - 2\pi\alpha x \right\},$$

разобьем на классы $D_{11}, \dots, D_{1r}$, $r \ll \ln T_0 \ll \ln x$ следующим образом: в класс D_{1n} отнесем те нули ρ , для которых выполняется условия:

$$\frac{nx}{y} < -\gamma - 2\pi\alpha x \leq \frac{(n+1)x}{y}.$$

Поэтому

$$W_1 \ll \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi\lambda x} \leq \frac{y}{x} \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{n} \leq \frac{y\mathcal{L}_x}{x} \max_{1 \leq n \leq r} \sum_{\rho \in D_{1n}} x^\beta \leq \frac{y\mathcal{L}_x}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} < \gamma \leq T} x^\beta.$$

Оценим W_2 . Представляя множество D_2 в виде

$$D_2 = \left\{ \rho : T_1 - 2\pi\alpha y - \frac{2x}{y} \leq -\gamma \leq T_1 \right\}, \quad T_1 = 2\pi\alpha x + \frac{x}{y} \leq T_0,$$

и имея в виду, что при $\alpha \leq x(2\pi y^2)^{-1}$ для длины множества D_2 выполняется неравенство

$$2\pi\lambda y + \frac{2x}{y} \leq \frac{3x}{y},$$

а также пользуясь тривиальной оценкой интеграла $I(\rho, \lambda)$, то есть первой оценкой (8), имеем

$$W_2 \leq \sum_{\rho \in D_2} |I(\rho)| \ll \frac{y}{x} \sum_{\rho \in D_2} x^\beta \leq \frac{3y}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} \leq -\gamma \leq T} x^\beta \ll \frac{y}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} \leq \gamma \leq T} x^\beta.$$

Подставляя в (9) полученные оценки для W_1 , W_2 и W_3 , имеем:

$$W(\alpha, x, y) \ll \frac{y\mathcal{L}_x}{x} \max_{|T| \leq T_0} \mathcal{V}, \quad \mathcal{V} = \sum_{T - \frac{x}{y} \leq \gamma \leq T} x^\beta. \quad (10)$$

Оценку суммы $\mathcal{V}$ сведём к оценке количества нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \sum_{T - xy^{-1} < \gamma \leq T} \left(\int_0^\beta x^u du + 1 \right) = \mathcal{L}_x \int_0^1 x^u \sum_{\substack{T - xy^{-1} < \gamma \leq T \\ \beta \geq u}} du + \sum_{T - xy^{-1} < \gamma \leq T} 1 \\ &= \mathcal{L}_x \int_0^1 x^u (N(u, T) - N(u, T - xy^{-1})) du + (N(T) - N(T - xy^{-1})). \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание, что нетривиальные нули $\rho = \beta + i\gamma$ расположены симметрично относительно критической прямой $\sigma = 0.5$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\leq \mathcal{L}_x \int_{0,5}^1 x^u (N(u, T) - N(u, T - xy^{-1})) du + \left(\frac{\sqrt{x}\mathcal{L}_x}{2} + 1 \right) (N(T) - N(T - xy^{-1})) \leq \\ &\leq \mathcal{L}_x \max_{u \geq 0,5} x^u (N(u, T) - N(u, T - xy^{-1}, \chi)) + \left(\frac{\sqrt{x}\mathcal{L}_x}{2} + 1 \right) (N(T) - N(T - xy^{-1})) \leq \\ &\leq 2\mathcal{L}_x \max_{u \geq 0,5} x^u (N(u, T) - N(u, T - xy^{-1})). \end{aligned}$$

Согласно лемме 2 функция $\zeta(\sigma + it)$ не имеет нулей в области

$$\sigma \geq 1 - \delta(t), \quad \delta(t) = \frac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2) \ln \ln(2t+2)}.$$

Следовательно, учитывая, что $\delta(T) \geq \delta(T_0)$, получаем

$$\mathcal{V} \leq 2\mathcal{L}_x \max_{0,5 \leq u \leq 1-\delta} x^u (N(u, T) - N(u, T - xy^{-1})), \quad \delta = \delta(T_0).$$

Подставляя правую часть этого неравенства в (10), найдём

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{y\mathcal{L}_x}{x} \max_{|T| \leq T_0} \max_{0,5 \leq u \leq 1-\delta} x^u \left(N(u, T) - N\left(u, T - \frac{x}{y}, \chi\right) \right). \quad (11)$$

Из соотношения $|T| \leq T_0 = (xy^{-1} + |\alpha|x) \mathcal{L}_x^{A+2}$, $0 \leq \alpha \leq x(2\pi y^2)^{-1}$ и условия (6), имеем

$$\frac{T}{(xy^{-1})^3} \leq \left(\frac{y^2}{x^2} + \alpha \frac{y^3}{x^2} \right) \mathcal{L}_x^{A+2} \leq \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{2\pi x} \right) \mathcal{L}_x^{A+2} \leq 1.$$

Следовательно, для правой части неравенства (11) выполняется условие $\frac{x}{y} \geq T^{\frac{1}{3}}$, то есть к этой сумме можно применить плотностную теорему для узких прямоугольников критической полосы (лемма 3). Полагая в этой лемме $\varepsilon = \frac{\delta}{3} - \frac{\delta^2}{1-\delta}$, получаем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{y\mathcal{L}_x^{10}}{x} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} x^u \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{4-4u}{3-2u}}, \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{y\mathcal{L}_x}{x} \max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta} x^u \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Оценка $\mathcal{A}_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{x\mathcal{L}_x^{10}}{y} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} f_1(u), \quad f_1(u) = x^u \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{u-1,5}} > 0, \\ f_1'(u) &= f_1(u) \left(\ln x + \frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{(u-1,5)^2} \right) = \frac{f_1(u)}{(u-1,5)^2} \ln \frac{y}{x^{-u^2+3u-1,25}}. \end{aligned}$$

Из условий (6) и из соотношения

$$\max_{0,5 \leq u \leq 0,75} (-u^2 + 3u - 1,25) = (-u^2 + 3u - 1,25)|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

следует, что

$$\ln \frac{y}{x^{-u^2+3u-1,25}} \geq \ln \frac{yx^{\frac{5}{8}}\mathcal{L}_x^{1,5A+15}}{x^{\frac{7}{16}}} = \ln x^{\frac{3}{16}} \mathcal{L}_x^{1,5A+15} > \ln x^{\frac{1}{5}} > 0.$$

Отсюда в свою очередь получаем, что на отрезке $0,5 \leq u \leq 0,75$ выполняется неравенство

$$f_1'(u) \geq \frac{f_1(u)}{(u-1,5)^2} \ln x^{\frac{1}{5}} > 0,$$

то есть $f'_1(u)$ положительна и $f_1(u)$ возрастающая функция в интервале $0,5 \leq u \leq 0,75$. Воспользовавшись этим свойством, а затем соотношением (6), имеем

$$\mathcal{A}_1 = \frac{x \mathcal{L}_x^{10}}{y} f_1(0,75) = \frac{x \mathcal{L}_x^{10}}{y} x^{\frac{3}{4}} \left(\frac{x}{y} \right)^{-\frac{4}{3}} = y \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}_x^{15}}{y} \right)^{\frac{2}{3}} = y \mathcal{L}_x^{-A}.$$

Оценка $\mathcal{A}_2$. Имеем

$$\mathcal{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon} \mathcal{L}_x}{x^{3-\varepsilon}} \max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta} f_2(u), \quad f_2(u) = x^u \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{2}{u}} > 0, \quad \delta = \delta(T_0). \\ f'_2(u) = f_2(u) \left(\ln x + \frac{\ln \left(\frac{y}{x} \right)}{u^2} \right) = \frac{f_2(u)}{u^2} \ln \frac{y}{x^{1-u^2}}.$$

Из условий (6) и из соотношения

$$\max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta} (-u^2 + 1) = (-u^2 + 1)|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

следует, что

$$\frac{y}{x^{1-u^2}} \geq \frac{x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}_x^{1,5A+15}}{x^{\frac{7}{16}}} \geq x^{\frac{3}{16}} \mathcal{L}_x^{1,5A+15}.$$

Отсюда, в свою очередь, получаем, что на отрезке $0,75 \leq u \leq 1 - \delta$ выполняется неравенство

$$f'_2(u) \geq \frac{f_2(u)}{u^2} \ln x^{\frac{3}{16}} > 0,$$

то есть $f'_2(u)$ положительна и $f_2(u)$ возрастающая функция в интервале $0,75 \leq u \leq 1 - \delta$. Воспользовавшись этим свойством, имеем

$$\mathcal{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon} \mathcal{L}_x}{x^{3-\varepsilon}} x^{1-\delta} \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{2}{1-\delta}} = y \cdot \frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta} - \delta + \varepsilon} \mathcal{L}_x}{y^{\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon}} = y \mathcal{L}_x \left(\frac{x^{\frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{2\delta + (1-\delta)\varepsilon}}}{y} \right)^{\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} = \\ = y \mathcal{L}_x \left(\frac{x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}_x^{1,5A+15}}{y} x^{f(\delta, \varepsilon)} \mathcal{L}_x^{-1,5A-15} \right)^{\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon}, \quad f(\delta, \varepsilon) = \frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{2\delta + (1-\delta)\varepsilon} - \frac{5}{8}.$$

Отсюда, и из соотношения (6), получим

$$\mathcal{A}_2 \ll y \cdot x^{f(\delta, \varepsilon) \frac{2\delta + (1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}} \mathcal{L}_x.$$

Далее при $\varepsilon = \frac{\delta}{3} - \frac{\delta^2}{1-\delta}$, воспользовавшись соотношением

$$f(\delta, \varepsilon) \frac{2\delta + (1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} = \frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} - \frac{5(2\delta + (1-\delta)\varepsilon)}{8(1-\delta)} = \\ = \frac{-2\delta + 8\delta^2 + 3(1-\delta)\varepsilon}{8(1-\delta)} = -\frac{\delta}{8} + \frac{3(1-\delta)\varepsilon - \delta + 7\delta^2}{8(1-\delta)} = -\frac{\delta}{8},$$

находим

$$\mathcal{A}_2 \ll y x^{-0,125\delta} \mathcal{L}_x = y \mathcal{L}_x \exp(-0,125\delta \mathcal{L}). \quad (13)$$

Пользуясь условиями $\alpha \leq x (2\pi y^2)^{-1}$ и (6), имеем

$$T_0 = \left(\frac{x}{y} + \alpha x \right) \mathcal{L}_x^{A+3} \leq \left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2\pi y^2} \right) \mathcal{L}_x^{A+3} \leq \frac{x^2}{y^2} \mathcal{L}_x^{A+3} = x^{\frac{3}{4}} \mathcal{L}_x^{-2A-33} < x^{\frac{4}{5}},$$

Воспользовавшись этим неравенством, оценим снизу параметр $\delta = \delta(T_0)$:

$$\delta(T_0) = \frac{c_1}{(\ln(2T_0 + 2))^{\frac{2}{3}} \ln \ln(2T_0 + 2)} \geq \frac{c_1}{\mathcal{L}_c^{\frac{2}{3}} \ln \mathcal{L}_x} \geq c_1 \mathcal{L}_x^{-0.6}.$$

Поэтому из (13) получаем

$$\mathcal{A}_2 \ll y \mathcal{L}_x \exp(-0,125c_1 \mathcal{L}_x^{0.4}) \ll y \mathcal{L}_x^{-A}.$$

Подставляя эту оценку и оценку для суммы $\mathcal{A}_1$ в (12), имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll y \mathcal{L}_x^{-A}.$$

Из этой оценки и (7) получим утверждение леммы 8.

2.1. Доказательство теоремы

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$H = N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2. \quad (14)$$

Вводя обозначения $N_3^c = \mu_3 N + H$ и $(N_3 - H_3)^c = \mu_3 N - H$, а затем пользуясь определением суммы $S_c(\alpha; x, y)$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{[n^c] - \mu_3 N \leq H} e(\alpha[n^c]) &= \sum_{(N_3 - H_3)^c + \{n^c\} \leq n^c \leq N_3^c + \{n^c\}} e(\alpha[n^c]) = \\ &= \sum_{(N_3 - H_3)^c < n^c \leq N_3^c} e(\alpha[n^c]) + \theta_{31} + \theta_{32} = S_c(\alpha; N_3, H_3) + \theta_3, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\theta_3 = \theta_{31} + \theta_{32}$, причём θ_{31} и θ_{32} определяются следующим образом:

- $|\theta_{31}| = 1$, если в интервале $[N_3 - H_3, ((N_3 - H_3)^c + \{n^c\})^{\frac{1}{c}}]$ длина которого меньше единицы, существует целое число, и $|\theta_{32}| = 0$ в противном случае;
- $|\theta_{32}| = 1$, если в полуинтервале $(N_3, (N_3^c + \{n^c\})^{\frac{1}{c}}]$ длина которого также меньше единицы, существует целое число, и $|\theta_{32}| = 0$ в противном случае.

Для параметров N_3 и H_3 справедливы следующие соотношения, которыми далее неоднократно будем пользоваться

$$N_3 = (\mu_3 N + H)^{\frac{1}{c}} = (\mu_3 N)^{\frac{1}{c}} \left(1 + \frac{H}{\mu_3 N} \right)^{\frac{1}{c}} = (\mu_3 N)^{\frac{1}{c}} \left(1 + \frac{H}{c\mu_3 N} + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right) \right), \quad (16)$$

$$H_3 = (\mu_3 N + H)^{\frac{1}{c}} - (\mu_3 N - H)^{\frac{1}{c}} = \frac{2H}{c(\mu_3 N)^{1-\frac{1}{c}}} + O\left(\frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}\right). \quad (17)$$

Пользуясь соотношением (15) и обозначениями

$$\mathcal{S}_1(\alpha; N_k, 2H) = \sum_{N_k - 2H < p \leq N_k} e(\alpha p), \quad N_k = \mu_k N + H, \quad k = 1, 2;$$

$J_c(N, H)$ — число решений диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N,$$

относительно простых чисел p_1, p_2 и натуральных чисел n с условиями

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |[n^c] - \mu_3 N| \leq H,$$

представим в виде

$$\begin{aligned} J_c(N, H) &= \int_{-0.5}^{0.5} e(-\alpha N) \sum_{|p_1 - \mu_1 N| \leq H} e(\alpha p_1) \sum_{|p_2 - \mu_2 N| \leq H} e(\alpha p_2) \sum_{|[n^c] - \mu_3 N| \leq H} e(\alpha [n^c]) = \\ &= \int_{-0.5}^{0.5} e(-\alpha N) (\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H) + \theta_1) (\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H) + \theta_2) (S_c(\alpha; N_3, H_3) + \theta_3) d\alpha, \end{aligned} \quad (18)$$

где $|\theta_k|$, (при $k = 1, 2$) равен 1, если соответственно нижние пределы тригонометрических сумм $\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)$, $\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H)$, $T(\alpha; N_3, H_3)$, то есть числа $N_1 - 2H$, $N_2 - 2H$, $N_3 - H_3$ целые числа, и 0 в противном случае. Перемножая скобки в подинтегральной функции в (18), получим

$$\begin{aligned} J_c(N, H) &= \int_{-0.5}^{0.5} e(-\alpha N) \mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H) \mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H) S_c(\alpha; N_3, H_3) d\alpha + \mathbb{R}_1, \\ \mathbb{R}_1 &= \int_{-0.5}^{0.5} e(-\alpha N) (\theta_3 \mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H) \mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H) + \theta_1 \theta_2 S_c(\alpha; N_3, H_3) + \\ &\quad + \theta_2 \mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H) S_c(\alpha; N_3, H_3) + \theta_1 \theta_3 \mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H) + \\ &\quad + \theta_1 \mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H) S_c(\alpha; N_3, H_3) + \theta_2 \theta_3 \mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)) d\alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

В $\mathbb{R}_1$, переходя к оценкам, пользуясь неравенством Коши, а затем соотношениями

$$\begin{aligned} \int_{-0.5}^{0.5} |\mathcal{S}_1(\alpha; N_k, 2H)|^2 d\alpha &= \pi(N_k) - \pi(N_k - 2H) \leq 2H, \quad k = 1, 2; \\ \int_{-0.5}^{0.5} |S_c(\alpha; N_3, H_3)|^2 d\alpha &= [N_3] - [N_3 - H_3] \leq H_3 + 1 \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{c}}}, \end{aligned}$$

где при выводе второго из них используется соотношение (17), имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_1 &\leq \left(\int_{-0.5}^{0.5} |\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)|^2 d\alpha \int_{-0.5}^{0.5} |\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-0.5}^{0.5} |S_c(\alpha; N_3, H_3)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left(\int_{-0.5}^{0.5} |\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)|^2 d\alpha \int_{-0.5}^{0.5} |S_c(\alpha; N_3, H_3)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-0.5}^{0.5} |\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left(\int_{-0.5}^{0.5} |\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H)|^2 d\alpha \int_{-0.5}^{0.5} |S_c(\alpha; N_3, H_3)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-0.5}^{0.5} |\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ &\ll H + \left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{c}}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}} \right)^{\frac{1}{2}} + H^{\frac{1}{2}} \ll H \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (19), имеем

$$\begin{aligned} J_c(N, H) &= \int_{-0.5}^{0.5} \mathbb{F}(\alpha) e(-\alpha N) d\alpha + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3}\right), \\ \mathbb{F}(\alpha) &= \mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H) \mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H) S_c(\alpha; N_3, H_3). \end{aligned}$$

Отрезок интегрирования $[-0, 5, 0, 5]$ разделим на точки двух классов. К точкам первого класса отнесем интервал

$$\mathfrak{M} = [-\mathfrak{a}, \mathfrak{a}], \quad \text{где} \quad \mathfrak{a} = (2cH)^{-1} \mathcal{L}^2.$$

Оставшиеся интервалы

$$\mathfrak{m}_+ = [\mathfrak{a}, 0, 5] \quad \text{и} \quad \mathfrak{m}_- = [-0, 5, -\mathfrak{a}]$$

отнесем к точкам второго класса. Обозначим через $I(\mathfrak{M})$, $I(\mathfrak{m}_+)$ и $I(\mathfrak{m}_-)$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}_+$ и $\mathfrak{m}_-$. Будем иметь

$$J_c(N, H) = I(\mathfrak{M}) + I(\mathfrak{m}_+) + I(\mathfrak{m}_-).$$

В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M})$ доставляет главный член асимптотической формулы для $J_c(N, H)$, а $I(\mathfrak{m}_+)$ и $I(\mathfrak{m}_-)$ входят в его остаточный член.

2.2. Оценка интегралов $I(\mathfrak{m}_+)$ и $I(\mathfrak{m}_-)$

Имеем

$$I(\mathfrak{m}_+) = \int_{\mathfrak{m}_+} e(-\alpha N) \mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H) \mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H) S_c(\alpha; N_3, H_3) d\alpha.$$

Переходя к оценкам, а затем воспользовавшись неравенством Коши для интегралов, находим

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{m}_+) &\ll \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_+} |T(\alpha; N_3, H_3)| \int_0^1 |\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)| |\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H)| d\alpha = \\ &= \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_+} |S_c(\alpha; N_3, H_3)| \left(\int_0^1 |\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_+} |S_c(\alpha; N_3, H_3)| (\pi(\mu_1 N + H) - \pi(\mu_1 N - H))^{\frac{1}{2}} (\pi(\mu_2 N + H) - \pi(\mu_2 N - H))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Применяя к двум последним множителям правой части полученной формулы, с учётом соотношения

$$H = N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2 \geq N^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^2 \geq (\mu_k N + H)^{0.534}, \quad k = 1,$$

леммы 4, найдём

$$\pi(\mu_k N + H) - \pi(\mu_k N - H) \ll \frac{H}{\mathcal{L}}.$$

Следовательно

$$I(\mathfrak{m}_+) \ll \frac{H}{\mathcal{L}} \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_+} |S_c(\alpha; N_3, H_3)|. \quad (20)$$

Оценим $S_c(\alpha, N_3, H_3)$ для α из множества $\mathfrak{m}_+$, используя лемму 5 в случае $c > 1$, 1 при

$$A = 2, \quad x = N_3, \quad y = H_3,$$

а также проверим выполнение каждого из следующих условий:

$$\|c\| \geq 3 \left(2^{[c]+1} - 1 \right) \frac{\ln \ln N_3}{\ln N_3}, \quad (21)$$

$$H_3 \geq \sqrt{2cN_3} (\ln N_3)^2, \quad (22)$$

$$\mathfrak{a} = (2cH)^{-1} \mathcal{L}^2 \geq \frac{(\ln N_3)^2}{H_3 N_3^{c-1}}. \quad (23)$$

Воспользовавшись определением параметра $N_3 = (\mu_3 N + H)^{\frac{1}{c}}$, имеем

$$\begin{aligned} \ln N_3 &= \frac{1}{c} \ln \left(N \left(\mu_3 + \frac{H}{N} \right) \right) = \frac{1}{c} \left(\mathcal{L} + \ln \left(\mu_3 + \frac{H}{N} \right) \right) = \\ &= \frac{\mathcal{L}}{c} \left(1 + \frac{\ln \left(\mu_3 + \frac{H}{N} \right)}{\mathcal{L}} \right) = \frac{\mathcal{L}}{c} (1 + \mathbb{R}(n)), \quad \mathbb{R}(n) \ll \mathcal{L}^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Логарифмируя обе части последнего равенства, находим

$$\ln \ln N_3 = \ln \mathcal{L} - \ln c + \ln \left(1 + \frac{\ln \left(\mu_3 + \frac{H}{N} \right)}{\mathcal{L}} \right) = \ln \mathcal{L} + O(1) = \ln \mathcal{L} \left(1 + O \left(\frac{1}{\ln \mathcal{L}} \right) \right). \quad (25)$$

Воспользовавшись формулами (24) и (25), получим

$$\begin{aligned} \frac{\ln \ln N_3}{\ln N_3} &= \frac{c \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \cdot \frac{1}{1 + \mathbb{R}(N)} \left(1 + O \left(\frac{1}{\ln \mathcal{L}} \right) \right) = \frac{c \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\mathcal{L}} \right) \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{\ln \mathcal{L}} \right) \right) = \\ &= \frac{c \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} + O \left(\frac{1}{\ln \mathcal{L}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из условия $\|c\| \geq 3(2^{[c]+1} - 1) \frac{c \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}$, следует, что

$$\|c\| \geq 3 \left(2^{[c]+1} - 1 \right) \left(\frac{\ln \ln(N_1 + H_1)}{\ln(N_1 + H_1)} + O \left(\frac{1}{\mathcal{L}} \right) \right),$$

то есть выполняется условие (21). Используя соотношения (17), (14), (16) и (24), можно установить справедливость условия (22):

$$\begin{aligned} \frac{H_3}{\sqrt{2cN_3}(\ln N_3)^2} &= \frac{\frac{2N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2}{c(\mu_3 N)^{1-\frac{1}{c}}} \left(1 + O \left(\frac{H}{N} \right) \right)}{\left(2c(\mu_3 N)^{\frac{1}{c}} \left(1 + O \left(\frac{H}{N} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathcal{L}}{c} \left(1 + O \left(\frac{1}{\mathcal{L}} \right) \right) \right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2c}}{\mu_3^{1-\frac{1}{2c}}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\mathcal{L}} \right) \right) > 1. \end{aligned}$$

Аналогично, используя соотношения (24), (17) и (16), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\ln^2 N_3}{H_3 N_3^{c-1}} &= \frac{\left(\frac{\mathcal{L}}{c} \left(1 + O \left(\frac{1}{\mathcal{L}} \right) \right) \right)^2}{\frac{2H}{c(\mu_3 N)^{1-\frac{1}{c}}} \left(1 + O \left(\frac{H}{N} \right) \right) \left((\mu_3 N)^{\frac{1}{c}} \left(1 + O \left(\frac{H}{N} \right) \right) \right)^{c-1}} = \\ &= \frac{\mathcal{L}^2}{2cH} \left(1 + O \left(\frac{1}{\mathcal{L}} \right) \right) = \mathfrak{x} + O \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathcal{L}} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Из условия $\alpha \in \mathfrak{m}_+ = [\mathfrak{x}, 0.5]$ следует условие (23). Таким образом, согласно лемме 5, с учетом соотношений (17), имеем

$$S_c(\alpha; N_3, H_3) \ll \frac{H_3}{(\ln N_3)^2} \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^2}.$$

Подставляя эту оценку в (20), найдем

$$I(\mathfrak{m}_+) \ll \frac{H}{\mathcal{L}} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_+} |S_c(\alpha; N_3, H_3)| \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3}.$$

Модули интегралов $I(\mathfrak{m}_+)$ и $I(\mathfrak{m}_-)$ совпадают, поэтому последняя оценка справедлива и для $I(\mathfrak{m}_-)$.

2.3. Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M})$

По определению интеграла $I(\mathfrak{M})$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}) = \int_{-\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}} \mathbb{F}(\alpha) e(-\alpha N) d\alpha, \quad \mathfrak{x} = \frac{\mathcal{L}^2}{2cH}, \quad (27)$$

$$\mathbb{F}(\alpha) = \mathfrak{S}_1(\alpha; N_1, 2H) \mathfrak{S}_1(\alpha; N_2, 2H) S_c(\alpha; N_3, H_3).$$

Пользуясь условием $c \geq \frac{4}{3} \left(1 + 52 \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)$ и формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, множитель которого равен $\frac{52 \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} - \frac{1}{2c} &= \frac{3}{8} \left(1 - \frac{4}{3c}\right) \geq \frac{3}{8} \left(1 - \left(1 + \frac{52 \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)^{-1}\right) = \frac{3}{8} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{52 \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)^k > \\ &> \frac{3}{8} \left(\frac{52 \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} - \frac{52^2 \ln^2 \mathcal{L}}{\mathcal{L}^2}\right) = 18.5 \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} + \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \left(1 - 1014 \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right) > 18.5 \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для нахождения асимптотической формулы функции $\mathbb{F}(\alpha; N, H)$ сначала определим асимптотическое поведение суммы $S_1(\alpha; N_k, 2H)$ при $k = 1, 2$. Полагая

$$x = N_k = \mu_k N + H, \quad y = 2H, \quad A = 3,$$

применим к этим суммам лемму 8. Проверим выполнение следующих двух условий этой леммы:

$$2H \geq (\mu_k N + H)^{\frac{5}{8}} (\ln(\mu_k N + H))^{19.5}, \quad \mathfrak{x} = (2cH)^{-1} \mathcal{L}^2 \leq \frac{\mu_k N + H}{8\pi H^2}. \quad (29)$$

Используя условие (14) и для краткости введя обозначение

$$c_2 = 2 \left(\mu_k + \frac{H}{N}\right)^{-\frac{5}{8}} \left(1 + \frac{\ln(\mu_k + \frac{H}{N})}{\mathcal{L}}\right)^{-19.5},$$

а затем применяя неравенство (28), последовательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{2H}{(\mu_k N + H)^{\frac{5}{8}} (\ln(\mu_k N + H))^{19.5}} &= \frac{2N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2}{(\mu_k N + H)^{\frac{5}{8}} (\ln(\mu_k N + H))^{19.5}} = c_2 N^{\frac{3}{8}-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^{-17.5} = \\ &= c_2 \exp \left(\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2c} \right) \mathcal{L} - 17.5 \ln \mathcal{L} \right) > c_2 \exp \left(18.5 \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \cdot \mathcal{L} - 17.5 \ln \mathcal{L} \right) = c_2 \mathcal{L}, \end{aligned}$$

то есть выполняется первое условие (29). Далее, используя условие (14), покажем, что второе условие (29) также выполняется:

$$\frac{\mathfrak{x}}{x(2\pi y)^{-2}} = \frac{(2cH)^{-1} \mathcal{L}^2}{(\mu_k N + 2H)(2\pi \cdot 2H)^{-2}} = \frac{8\pi^2 H \mathcal{L}^2}{c(\mu_k N + 2H)} = \frac{8\pi^2}{c(\mu_k + \frac{2H}{N})} \cdot \frac{\mathcal{L}^2}{N^{\frac{1}{2c}}} < 1.$$

Таким образом, оба условия леммы 8 выполнены, и поэтому имеем

$$S_1(\alpha; N_k, 2H) = \frac{\sin 2\pi \alpha H}{\pi \alpha} e(\alpha \mu_k N) + O\left(\frac{H}{\mathcal{L}^3}\right).$$

Используя лемму 7, сумму $S_1(\alpha; N_k, 2H)$, $k = 1, 2$, выражаем через сумму $S_1(\alpha; N_k, 2H)$, а затем, пользуясь последней формулой, получаем

$$S_1(\alpha; N_k, 2H) = \frac{S_1(\alpha; N_k, 2H)}{\ln(\mu_k N)} + O\left(\frac{H^2}{N \mathcal{L}}\right) = \frac{1}{\ln(\mu_k N)} \frac{\sin 2\pi \alpha H}{\pi \alpha} e(\alpha \mu_k N) + O\left(\frac{H}{\mathcal{L}^4}\right).$$

Отсюда, и из соотношения $\frac{\sin 2\pi\alpha H}{\pi\alpha} \ll H$, найдём

$$\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)\mathcal{S}_1(\alpha; N_2N, 2H) = \frac{\sin^2 2\pi\alpha H}{\pi^2\alpha^2} \frac{e(\alpha(\mu_1 + \mu_2)N)}{\ln(\mu_1N)\ln(\mu_2N)} + O\left(\frac{H^2}{\mathcal{L}^5}\right). \quad (30)$$

Теперь, используя лемму 6 при $A = 2$, $x = N_3$, $y = H_3$, найдём асимптотическое поведение суммы

$$S_c(\alpha; N_3, H_3) = \sum_{N_3 - H_3 < n \leq N_3} e(\alpha[n^c]), \quad \alpha \in [-\mathfrak{A}, \mathfrak{A}].$$

Условия (21) и (22) леммы 5, выполнение которых было продемонстрировано при оценке $I(\mathfrak{m}_+)$, совпадают с условиями леммы 6. При оценке суммы $S_c(\alpha, N_3, H_3)$ для α из множества $\mathfrak{m}_+$ в (26) показано, что имеет место

$$\frac{\ln^2 N_3}{H_3 N_3^{c-1}} = \mathfrak{A} + O\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathcal{L}}\right).$$

Из этой формулы и условия $\alpha \in \mathfrak{M} = [-\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$ непосредственно следует выполнение условия

$$|\alpha| \leq \frac{\ln^2 N_3}{H_3 N_3^{c-1}}.$$

Следовательно, согласно лемме 6, имеем

$$S_c(\alpha; N_3, H_3) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \int_{N_3 - H_3}^{N_3} e(\alpha(t^c - 0, 5)) dt + O\left(\frac{H_3 |\sin \pi\alpha|}{(\ln(N_3))^2}\right). \quad (31)$$

Оценивая остаточный член последней формулы с использованием соотношений (24) и (17), получаем

$$\frac{H_3 |\sin \pi\alpha|}{(\ln(N_3))^2} \leq \frac{H_3 \sin \pi\mathfrak{A}}{(\ln(N_3))^2} \ll \frac{H_3}{\mathcal{L}^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi\mathcal{L}^2}{2cH}\right) \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathcal{L}^2} \cdot \frac{\mathcal{L}^2}{H} \ll \frac{1}{N^{1-\frac{1}{c}}}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть формулы (31), находим

$$\begin{aligned} S_c(\alpha; N_3, H) &= \frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i\alpha} \int_{N_3 - H_3}^{N_3} e(\alpha t^c) dt + O\left(\frac{1}{N^{1-\frac{1}{c}}}\right) = \\ &= \frac{H_3(1 - e(-\alpha))}{2\pi i\alpha} \gamma_c(\alpha; N_3, H_3) + O\left(\frac{1}{N^{1-\frac{1}{c}}}\right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\gamma_c(\alpha; N_3, H_3) = \int_{-0,5}^{0,5} e(\alpha(N_3 + H_3(t - 0.5))^c) dt. \quad (33)$$

Найдём асимптотическую формулу для интеграла $\gamma_c(\alpha; N_3, H_3)$. Пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} N_3^c &= \mu_3 N + H, & H_3^2 N_3^{c-2} &\ll \frac{H^2}{N^{2-\frac{2}{c}}} \cdot N^{\frac{c-2}{c}} = \frac{H^2}{N}, \\ cH_3 N_3^{c-1} &= c \left(\frac{2H}{c(\mu_3 N)^{1-\frac{1}{c}}} + O\left(\frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}\right) \right) (\mu_3 N)^{\frac{c-1}{c}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right) = 2H + O\left(\frac{H^2}{N}\right), \end{aligned}$$

которые следуют из соотношений (17) и (16), получаем

$$\begin{aligned} (N_3 + H_3(t - 0.5))^c &= N_3^c \left(1 + \frac{H_3(t - 0.5)}{N_3}\right)^c = N_3^c \left(1 + \frac{cH_3(t - 0.5)}{N_3} + O\left(\frac{H_3^2}{N_3^2}\right)\right) = \\ &= N_3^c + cH_3 N_3^{c-1}(t - 0.5) + O(H_3^2 N_3^{c-2}) = \\ &= \mu_3 N + H + 2H(t - 0.5) + O\left(\frac{H^2}{N}\right) = \mu_3 N + 2Ht + \mathbb{R}_2, \quad \mathbb{R}_2 \ll \frac{H^2}{N}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (33), учитывая, что $e(\alpha\mathbb{R}_2) - 1 \ll |\alpha|\mathbb{R}_2$ и $|\alpha| \ll \mathcal{L}^2 H^{-1}$, получаем

$$\gamma(\alpha; N_3, H_3) = \int_{-0,5}^{0,5} e(\alpha(\mu_3 N + 2Ht + \mathbb{R}_2)) dt = e(\mu_3 N \alpha) \frac{\sin(2\pi\alpha H)}{2\pi\alpha H} + O\left(\frac{H\mathcal{L}^2}{N}\right). \quad (34)$$

Используя формулу Тейлора для функций $\cos 2\pi\alpha$ и $\sin 2\pi\alpha$ в окрестности нуля $|\alpha| \leq \mathfrak{x}$, найдем

$$\frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i \alpha} = \frac{1 - \cos 2\pi\alpha + i \sin 2\pi\alpha}{2\pi i \alpha} = \frac{1 - (1 + O(\alpha^2)) + 2\pi i \alpha + O(\alpha^3)}{2\pi i \alpha} = 1 + O\left(\frac{\mathcal{L}^2}{H}\right). \quad (35)$$

Далее, перемножая почленно формулы (34) и (35) и воспользовавшись неравенством

$$\left| \frac{\sin(2\pi\alpha H)}{2\pi\alpha H} \right| \ll 1, \text{ получим}$$

$$\frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i \alpha} \gamma(\alpha; N_3, H_3) = (e(\mu_3 N \alpha) \frac{\sin(2\pi\alpha H)}{2\pi\alpha H} + O\left(\frac{H\mathcal{L}^2}{N}\right)).$$

Отсюда и из (32) получим

$$S_c(\alpha; N_3, H) = H_3 \frac{\sin(2\pi\alpha H)}{2\pi\alpha H} e(\mu_3 N \alpha) + O\left(\frac{H^2 \mathcal{L}^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}\right). \quad (36)$$

Почленно перемножая формулы (30) и (36), а затем оценивая остаточный член этого произведения, обозначенный через $\mathbb{R}_4$, с использованием неравенства $|\sin(2\pi\alpha H)| \ll |2\pi\alpha H|$ и соотношения (17), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(\alpha) &= \frac{H_3}{2H \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} \cdot \frac{\sin^3 2\pi\alpha H}{\pi^3 \alpha^3} e(\alpha(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)N) + \mathbb{R}_4, \\ \mathbb{R}_4 &\ll \frac{\sin^2 2\pi\alpha H}{\pi^2 \alpha^2 \mathcal{L}^2} \cdot \frac{H^2 \mathcal{L}^2}{N^{2-\frac{1}{c}}} + \frac{H_3 |\sin(2\pi\alpha H)|}{|2\pi\alpha H|} \frac{H^2}{\mathcal{L}^5} + \frac{H^4}{N^{2-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3} \ll \\ &\ll \frac{H^4}{N^{2-\frac{1}{c}}} + \frac{H^3}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^5} + \frac{H^4}{N^{2-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3} \ll \frac{H^3}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^5}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для функции $\mathbb{F}(\alpha)$, то есть правую часть последней формулы, в (27), получаем

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{M}) &= \frac{H_3}{2H \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} J(H) + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3}\right), \\ J(H) &= \int_{-\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}} \frac{\sin^3 2\pi\alpha H}{\pi^3 \alpha^3} d\alpha. \end{aligned} \quad (37)$$

Заменяя $J(H)$ близким к нему несобственным интегралом, не зависящим от $\mathcal{L}$, и используя формулу (см. [21], стр. 174)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^n mu}{u^n} du = \frac{\pi m^{n-1}}{2^n (n-1)!} \left[n^{n-1} - \frac{n}{1!} (n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} (n-4)^{n-1} + \dots \right],$$

при $m = 1$ и $n = 3$, найдём

$$\begin{aligned} J(H) &= \frac{8H^2}{\pi} \int_0^{2\pi\mathfrak{x}H} \frac{\sin^3 u}{u^3} du = \frac{8H^2}{\pi} \left(\int_0^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3} du - \int_{2\pi\mathfrak{x}H}^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3} du \right) = \\ &= \frac{8H^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H}{\mathcal{L}^6}\right) = 3H^2 + O\left(\frac{H^2}{\mathcal{L}^6}\right). \end{aligned}$$

Подставляя значение интеграла $J(H)$ в формулу (37), найдём

$$I(\mathfrak{M}) = \frac{3HH_3}{2\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathcal{L}^A}\right) + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathcal{L}^8}\right).$$

Воспользовавшись формулой (17) и соотношением

$$\frac{1}{\ln(\mu_k N)} - \frac{1}{\mathcal{L}} = \frac{-\ln \mu_k}{(\mathcal{L} - \ln \mu_k)\mathcal{L}} \ll \frac{1}{\mathcal{L}^2},$$

получим

$$I(\mathfrak{M}) = \frac{3H^2}{c(\mu_3 N)^{1-\frac{1}{c}}\mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathcal{L}^3}\right).$$

Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math.Soc. 1937. V. 11. P. 501–516.
2. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.
3. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.
4. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. № 8. С. 87 – 89.
5. Рахмонов Ф. З. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25, № 4(95). С. 120 – 137.
6. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 2(93). С. 139–168.
7. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2024. Т. 67. № 3-4. С. 125-136.
8. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Проблема Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2023. Т. 66. № 9-10. С. 481-488.
9. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в больших дугах // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2023. Т. 66. № 11-12. С. 625-633.
10. Рахмонов З. Х. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. № 3. С. 71-94

11. Рахмонов П. З. Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа // Вестн. Моск. ун-та. сер.1, математика. механика. 2012. № 6. С. 51 – 55.
12. Рахмонов П. З. Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2012. Т. 55. № 3. С. 185 – 191.
13. Рахмонов П. З. Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа // Математические заметки. 2014. Т. 95. Вып. :5. С. 763 – 774.
14. Рахмонов П. З. Обобщенная тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2016. Т. 100. Вып. :3. С. 410 – 420.
15. Рахмонов П. З. Обобщённая тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, № 1. С. 248 – 253.
16. Рахмонов П. З. Обобщённая тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2013. № 2(151). С. 7 – 16.
17. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел // М. Наука. 2-ое изд. 1983.
18. Zhan Tao On the Mean Square of Dirichlet L -Functions // Acta Mathematica Sinica. New Series. 1992. V. 8. № 2. P. 204 – 224.
19. Baker R., Harman G. The difference between consecutive primes // Proc. London Math. Soc. 1996. V. 72. P. 261 – 280.
20. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана // М.: Физматлит. 1994. 376 с.
21. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. ч. 1. Основные операции анализа // М.: Физматгиз. 1963.

REFERENCES

1. Estermann, T., 1937, “Proof that every large integer is the sum of two primes and a square”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 11, pp. 501–516.
2. Rakhmonov, Z. Kh., 2003, “Ternary Estermann problem with almost equal summands”, *Matematicheskie Zametki (Mathematical Notes)*, vol. 74, Is. 4, pp. 564–572, (in Russian).
3. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, “Cubic Estermann problem with almost equal summands”, *Matematicheskie Zametki (Mathematical Notes)*, vol. 95, Is. 3, pp. 445–456, (in Russian).
4. Rakhmonov, F. Z., Rahimov, A. O., 2016, “On an additive problem with almost equal summands”, *Research in Algebra, Number Theory, Functional Analysis and Related Topics*, Saratov National Research State University, vol. 8, pp. 87–89, (in Russian).
5. Rakhmonov, F. Z., 2024, “Asymptotic formula in the generalization of ternary Estermann problem with almost proportional summands”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, Is. 4(95), pp. 120–137, (in Russian).
6. Rakhmonov, Z. Kh., Rakhmonov, F. Z., 2024, “Asymptotic formula in Waring’s problem with almost proportional summands”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, Is. 2(93), pp. 139–168, (in Russian).

7. Rakhmonov, Z. Kh., Rakhmonov, F. Z., 2024, “Asymptotic formula in Waring’s problem with almost proportional summands”, *Doklady Natsional’noy Akademii Nauk Tadzhikistana*, vol. 67, Is. 3-4, pp. 125–136, (in Russian).
8. Rakhmonov, Z. Kh., Rakhmonov, F. Z., 2023, “Waring’s problem with almost proportional summands”, *Doklady Natsional’noy Akademii Nauk Tadzhikistana*, vol. 66, Is. 9-10, pp. 481–488, (in Russian).
9. Rakhmonov, Z. Kh., Rakhmonov, F. Z., 2023, “Behaviour of short G. Weyl exponential sums on major arcs”, *Doklady Natsional’noy Akademii Nauk Tadzhikistana*, vol. 66, Is. 11-12, pp. 625–633, (in Russian).
10. Rakhmonov, Z. Kh., 2023, “Generalization of Waring’s problem for nine almost proportional cubes”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, Is. 3, pp. 71–94, (in Russian).
11. Rakhmonov, P. Z., 2012, “Short trigonometric sums with a non-integer power of a natural number”, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, Is. 6, pp. 51–55, (in Russian).
12. Rakhmonov, P. Z., 2012, “Short trigonometric sums with a non-integer power of a natural number”, *Doklady Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan*, vol. 55, Is. 3, pp. 185–191, (in Russian).
13. Rakhmonov, P. Z., 2014, “Short sums with non-integer powers of natural numbers”, *Matematicheskie Zametki (Mathematical Notes)*, vol. 95, Is. 5, pp. 763–774, (in Russian).
14. Rakhmonov, P. Z., 2016, “Generalized ternary Estermann problem for non-integer powers with almost equal summands”, *Matematicheskie Zametki (Mathematical Notes)*, vol. 100, Is. 3, pp. 410–420, (in Russian).
15. Rakhmonov, P. Z., 2015, “Generalized ternary Estermann problem for non-integer powers with almost equal summands”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, Is. 1, pp. 248–253, (in Russian).
16. Rakhmonov, P. Z., 2013, “Generalized ternary Estermann problem for non-integer powers with almost equal summands”, *Izvestiya Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan*, No. 2(151), pp. 7–16, (in Russian).
17. Karatsuba, A. A., 1983, *Basic analytic number theory*, Moscow: Nauka, 2nd ed., (in Russian).
18. Zhan, T., 1992, “On the mean square of Dirichlet L -functions”, *Acta Mathematica Sinica. New Series*, vol. 8, No. 2, pp. 204–224.
19. Baker, R., Harman, G., 1996, “The difference between consecutive primes”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 72, pp. 261–280.
20. Voronin, S. M., Karatsuba, A. A., 1994, *Riemann zeta-function*, Moscow: Fizmatlit, 376 pp., (in Russian).
21. Whittaker, E. T., Watson, G. N., 1963, *A Course of Modern Analysis, Vol. 1: Fundamental Operations of Analysis*, Moscow: Fizmatgiz, (in Russian).

Получено: 12.10.2025

Принято в печать: 08.12.2025