ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511. 344 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-158-183

Плотность нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы

З. Х. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, академик НАН Таджикистана, Таджикский национальный университет (г. Душанбе, Таджикистан).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmomov@gmail.com

Аннотация

Для количества нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в узких прямоугольниках критической полосы ($\mathrm{Re}\, s \geqslant \alpha \geqslant 0{,}5$ и $T < \mathrm{Im} s \leqslant T + H$), при

$$H > T^{\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = \theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},$$

где (κ,λ) — произвольная экспоненциальная пара, $\varepsilon < 10^{-4}$ — любое фиксированное положительное число, $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, получена оценка вида

$$N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) \ll H^{a(1-\alpha)} \ln^c T,$$

причём $a = 2{,}4$, $c = 172$, если $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{3}$ или $\frac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant 1$, и соответственно $a = \frac{8}{3}$, $c = 50$, если $\frac{2}{3} < \alpha < \frac{5}{6}$.

Ключевые слова: нетривиальные нули дзета-функции Римана, плотностная теорема, узкие прямоугольники критической полосы, экспоненциальная пара.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:
Рахмонов З. Х. Плотность нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 158–183.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 511. 344 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-158-183

Density of zeros of the Riemann zeta function in narrow rectangles of the critical strip

Z. Kh. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, Academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Tajik National University (Dushanbe, Tajikistan). *e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmomov@gmail.com*

Светлой памяти Геннадия Ивановича Архипова

Abstract

For the number of zeros of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ in narrow rectangles of the critical strip ($\mathrm{Re}\, s \geqslant \alpha \geqslant 0.5$ and $T < \mathrm{Im} s \leqslant T + H$), assuming

$$H > T^{\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = \theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2},$$

where (κ, λ) is an arbitrary exponent pair, $\varepsilon < 10^{-4}$ is any fixed positive number, and $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, an estimate of the form

$$N(\alpha, T + H) - N(\alpha, T) \ll H^{a(1-\alpha)} \ln^c T,$$

is obtained. Here $a = 2{,}4$ and $c = 172$ when $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{3}$ or $\frac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant 1$, and respectively $a = \frac{8}{3}$ and $c = 50$ when $\frac{2}{3} < \alpha < \frac{5}{6}$.

Keywords: Nontrivial zeros of the Riemann zeta-function, density theorem, narrow rectangles of the critical strip, exponent pair.

Bibliography: 30 titles.

For citation:
Rakhmonov, Z. Kh. 2025, “Density of zeros of the Riemann zeta function in narrow rectangles of the critical strip” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 158–183.

1. Введение

Определение 1. *Пусть $N(\alpha, T)$ — число нулей функции Римана $\zeta(s)$ в области $\mathrm{Re}\, s \geqslant \alpha \geq 0{,}5$ и $0 \leq \mathrm{Im} s \leq T$. Оценка вида*

$$N(\alpha, T) \ll T^{a(1-\alpha)} \ln^c T, \quad \ln T, \tag{1}$$

с положительными абсолютными постоянными a и c называется плотностной теоремой.

Наилучшая плотностная теорема принадлежит М. Хаксли [1]. Он доказал (1) с $a = 2.4$ и $c = 244$. А. А. Карацуба [2] дал новый вариант доказательства теоремы Хаксли. Методом работы [2] С. А. Гриценко [3] доказал (1) с $a = 2.4$ и $c = 33.6$.

Определение 2. *При $H < T$ оценка вида*

$$N(\alpha, T + H) - N(\alpha, T) \ll H^{a(1-\alpha)} \ln^c T, \tag{2}$$

с положительными абсолютными постоянными a и c называется плотностной теоремой в узких прямоугольниках критической полосы.

Впервые проблему распределения нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы и в коротких промежутках критической прямой исследовал А. Сельберг [4]. Он доказал, что если $H \geqslant T^{\theta}$, $\theta > 0{,}5$ и $0{,}5 < \alpha \leqslant 1$, то справедливы следующие оценки:

$$N(\alpha, T + H) - N(\alpha, T) = O\left(\frac{H}{\alpha - 0{,}5}\right), \tag{3}$$

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geqslant c_1 H \ln T, \tag{4}$$

где $N_0(t)$ — количество нулей нечетного порядка функции $\zeta(0{,}5 + it)$ на промежутке $(0, T)$. В этой работе А. Сельберг высказал гипотезы, что условие $\theta > 0{,}5$ в этих оценках может быть заменено условием $\theta > æ$, $æ < 0{,}5$. Эти гипотезы в 1984 г. решил А. А. Карацуба [5, 6, 7, 8] и доказал, что неравенства (3) и (4) имеют место при $H \geqslant T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$. Он [9, 8, 10, 11] также доказал, что при таких H для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}. \tag{5}$$

В работах [12, 13, 14, 15, 16] доказано, что неравенства (3), (4) и (5) имеют место при

$$H > T^{\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = \theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},$$

где (κ,λ) — произвольная экспоненциальная пара. Хиз-Браун [17], с помощью своей теоремы о четвертом моменте дзета-функции Римана на критической прямой при $H \geq T^{\frac{7}{8}+\varepsilon}$ доказал (2) с $a = 2{,}4$ и $c = 244$. Жан Тао [18] доказал (2) с $a = \frac{8}{3}$ и $c = 216$ при условии $H > T^{\frac{35}{108}+\varepsilon}$.

Основным результатом этой работы является доказательство теоремы о плотности нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы, которая ранее была анонсирована автором в работе [19].

Теорема 1. *Пусть (κ,λ) — произвольная экспоненциальная пара, $\varepsilon < 10^4$ — любое фиксированное положительное число, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$,*

$$\theta = \theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \qquad H > T^{\theta+\varepsilon},$$

тогда (2) выполняется при $a = 2{,}4$, $c = 172$, если $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{3}$ или $\frac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant 1$; и соответственно, $a = \frac{8}{3}$, $c = 50$, если $\frac{2}{3} < \alpha < \frac{5}{6}$.

Показатель $\theta(\kappa,\lambda)$ также появляется в оценках остаточных членов в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге, проблеме делителей Дирихле и второго момента дзета-функции Римана на критической прямой. Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa,\lambda)$ принадлежит Дж. Бургейну и Н. Уотту [20], которые доказали, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \theta(\kappa,\lambda) = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \leqslant \frac{1515}{4816} = 0.314546\cdots, \tag{6}$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Отсюда и из теоремы 1 следует:

Следствие 1. *Неравенство (2) справедливо при*

$$H \geqslant T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}, \qquad a = \frac{8}{3}, \qquad c = 50.$$

При доказательстве основной теоремы мы существенно используем метод работ А. А. Карацубы [2, 6], в которых, соответственно, доказаны плотностная теорема Хаксли и гипотеза Сельберга о количестве нулей дзета-функции Римана в окрестности критической прямой (см. также [21, 22, 23]).

2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. [2]. *Пусть $s = \sigma + it$, $t \geqslant 2\pi$, положительные числа y и z удовлетворяют условиям $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $2\pi yz = t$. Тогда при $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2$ справедливо следующее равенство:*

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant y} n^{-s} + \chi(s)\sum_{n\leqslant z} n^{s-1} + O(t^{0{,}5-\sigma}z^{-1+\sigma} + y^{-\sigma}\ln t),$$

где

$$\chi(s) = e\left(-\frac{t}{2\pi}\ln\frac{t}{2\pi} + \frac{t}{2\pi} - \frac{7}{8}\right)(2\pi)^{\sigma-1}t^{0{,}5-\sigma}.$$

Лемма 2. [2]. *Пусть $S(t)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[t_0, t_k]$ функция,*

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k.$$

Тогда, полагая $d = \min\limits_{0\leqslant r<k}(t_{r+1} - t_r)$, будем иметь

$$\sum_{r=1}^{k} |S(t_r)|^2 \leqslant d^{-1} \int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2 dt + 2\left(\int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2 dt \int_{t_0}^{t_k} |S'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 3. [2]. *Пусть $a(n)$ — произвольные комплексные числа, $0 < H < T$, $N \geq 2$,*

$$I = \int_{T}^{T+H} \left|\sum_{n\leq N} a(n) n^{it}\right|^2 dt.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$I \leqslant (H + 32N \ln N) \sum_{n\leq N} |a(n)|^2.$$

Лемма 4. [24]. *При $x \geq 2$ имеем:*

$$\sum_{n\leqslant x} \tau_r^l(n) \ll x(\ln x)^{r^{l-1}}.$$

Лемма 5. [25]. *Пусть $f(u)$ — вещественная дифференцируемая функция в интервале (a, b), причем внутри интервала ее производная $f'(u)$ монотонна и знакопостоянна и при постоянном δ с условием $0 < \delta < 1$ удовлетворяет неравенству $|f'(u)| \leqslant \delta$. Тогда имеем*

$$\sum_{a<n\leqslant b} e(f(n)) = \int\limits_{a}^{b} e(f(u)) du + O\left(3 + \frac{2\delta}{1-\delta}\right).$$

Лемма 6. [2]. *Пусть вещественные функции $f(n)$ и $\varphi(n)$ удовлетворяют на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:*

а) *$f^{(4)}(n)$ и $\varphi^{(2)}(n)$ — непрерывные функции;*

б) *существуют числа H_1, U, A, $1 \leqslant A \leqslant U$, $0 < b - a \leqslant U$, такие что*

$$A^{-1} \ll f^{(2)}(n) \ll A^{-1}, \qquad f^{(3)}(n) \ll A^{-1}U^{-1}, \qquad f^{(4)}(n) \ll A^{-1}U^{-2},$$
$$\varphi(n) \ll H_1, \qquad \varphi'(n) \ll H_1 U^{-1}, \qquad \varphi^{(2)}(n) \ll H_1 U^{-2}.$$

Тогда, определяя числа n_m из уравнения $f'(n_m) = m$, будем иметь:

$$\sum_{a\leq n\leq b} \varphi(n) e(f(n)) = \sum_{f'(a)\leq m\leq f'(b)} C(m) Z(m) + R,$$

где $C(m) = 1$, если $f'(a) < m < f'(b)$, и $C(m) = 0{,}5$, если $m = f'(a)$ или $m = f'(b)$,

$$Z(m) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\varphi(n_m)}{\sqrt{f''(n_m)}} e(f(n_m) - m n_m),$$

$$R = H_1\big(T_a + T_b + \ln\big(f'(b) - f'(a) + 2\big)\big),$$

$$T_\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } f'(\mu) - \text{целое;} \\ \min(\sqrt{A}, \|f'(\mu)\|^{-1}), & \text{если } f'(\mu) - \text{нецелое.} \end{cases}$$

Лемма 7. [26]. *Пусть действительная функция $f(u)$ и монотонная функция $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ монотонна, $|f'(u)| \geqslant m_1 > 0$ и $|g(u)| \leqslant M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m_1}.$$

Определение 3. *Если $B \geq 1$, $0 < h \leq B$, $F(u) \in C^\infty(B, 2B)$, $A \geq 1$,*

$$AB^{1-r} \ll |F^{(r)}(u)| \ll AB^{1-r}, \qquad r = 1, 2, 3, \dots,$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от r, и имеет место оценка

$$\sum_{B<n\leq B+h} e(F(n)) \ll A^\kappa B^\lambda, \qquad 0 \leqslant \kappa \leq 0{,}5 \leq \lambda \leq 1,$$

то пара (κ, λ) называется экспоненциальной парой. Тривиальная оценка

$$\sum_{B<n\leq B+h_1} e(F(n)) \leqslant h_1 \leqslant B,$$

показывает, что $(0, 1)$ является экспоненциальной парой.

Э. Филлипс [27] показал, что если (κ, λ) — экспоненциальная пара, то

$$A(\kappa, \lambda) = \left(\frac{\kappa}{2\kappa+2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\kappa+2}\right), \qquad (A\text{-процесс}),$$
$$B(\kappa, \lambda) = (\lambda - 0{,}5, \kappa + 0{,}5); \qquad (B\text{-процесс})$$

также являются экспоненциальными парами. A-процесс выводится из неравенства Вейля [27] (см. также [28], стр. 26, лемма 3), а B-процесс доказывается с помощью леммы 6.

3. Доказательство теоремы 1

Не ограничивая общности, будем считать, что $H = T^{\theta+\varepsilon}$ и $2(\theta+\varepsilon)\varepsilon^{-1} - 1$ — целое число. Пусть

$$R = N(\alpha, T + H) - N(\alpha, T).$$

Положим в лемме 1 $y = (T/2\pi)^{\frac{1}{2}}$, $2\pi z = t$, $s = \sigma + it$, $\sigma \geqslant 0.5$, $T \leqslant t \leqslant T + H$; получим

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant y} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n\leqslant t/2\pi y} n^{-1+s} + O(T^{-0.5\sigma}\ln T).$$

Граница изменения n во второй сумме зависит от t. Освободимся от этой зависимости. Имеем

$$|\chi(s)| = |(2\pi)^{\sigma-1}t^{0.5-\sigma}| \leqslant T^{0.5-\sigma};$$

$$y \leqslant \frac{t}{2\pi y} \leqslant y + \frac{H}{\sqrt{2\pi T}} \leqslant y + 1.$$

Поэтому

$$\left|\chi(s) \sum_{y<n\leqslant t/2\pi y} n^{-1+s}\right| \ll T^{0.5-\sigma+0.5(-1+\sigma)} \ll T^{-0.5\sigma}.$$

Следовательно,

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant y} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n\leqslant y} n^{-1+s} + O(T^{-0.5\sigma}\ln T). \tag{7}$$

В этом представлении $\zeta(s)$ границы изменения n уже не зависят от t. Далее возьмем

$$M_x(s) = \sum_{m \leqslant x} \mu(m) m^{-s}, \qquad x = T^{0.5\varepsilon}.$$

Умножим обе части (7) на $M_x(s)$ и преобразуем правую часть, получим

$$\zeta(s) M_x(s) = 1 + \sum_{x < n \leqslant xy} a(n) n^{-s} + \chi(s) M_x(s) \sum_{n \leqslant y} n^{-1+s} + O(T^{-0,2}), \tag{8}$$

где

$$a(n) = \sum_{\substack{m|n \\ m \leqslant x, \frac{n}{m} \leqslant y}} \mu(m), \qquad |a(n)| \leqslant \tau(n).$$

Если $s = \rho$, то левая часть (8) обращается в нуль, поэтому

$$\left|1 + O(T^{-0,2})\right| = \left|1 + \sum_{x < n \leqslant xy} a(n) n^{-\rho} + \chi(\rho) M_x(\rho) \sum_{n \leqslant y} n^{-1+\rho}\right|$$

или, предполагая $T \gg 1$, имеем неравенство:

$$1 \leqslant 2 \left| \sum_{x < n \leqslant xy} a(n) n^{-\rho} \right| + 2 \left| \chi(\rho) \sum_{m \leqslant x} \mu(m) m^{-\rho} \sum_{n \leqslant y} n^{-1+\rho} \right|.$$

Промежутки суммирования по n и m разобьем на промежутки вида $a < b \leqslant 2a$. В каждом случае получится не более $\ln T$ промежутков и приходим к такому неравенству:

$$1 \leqslant 2 \sum^{\ln^2 T} |S(\rho)|, \tag{9}$$

где $S(\rho)$ имеет один из следующих видов:

$$S(\rho) = \sum_{N < n \leqslant N_1} a(n) n^{-\rho}, \qquad x < N \leqslant yx, \tag{10}$$

$$S(\rho) = \chi(\rho) \sum_{M < m \leqslant M_1} \mu(m) m^{-\rho} \sum_{Y < n \leqslant Y_1} n^{-1+\rho}. \tag{11}$$

Обозначим через D количество сумм $S(\rho)$ в правой части (9); $D \ll \ln^2 T$. Занумеруем эти суммы в произвольном порядке $S_1(\rho)$, $S_2(\rho)$, …, $S_D(\rho)$. Все нули ρ с условием $\operatorname{Re}\rho \geqslant \alpha$, $T < \operatorname{Im}\rho \leqslant T + H$, а их R штук, разобьем на классы A_1, A_2, …, A_D следующим образом: в класс A_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant D$ отнесем те ρ, для которых

$$|S_\nu(\rho)| \geqslant (2D)^{-1}.$$

Каждое ρ из общего количества R попадает хотя бы в один класс A_ν. Действительно, если некоторое ρ не попало бы ни в один из классов A_ν, то для этого ρ:

$$|S_\nu(\rho)| < (2D)^{-1}, \qquad \nu = 1, 2, ..., D;$$

$$2 \sum_{\nu=1}^{D} |S_\nu(\rho)| < 1,$$

что противоречит (9). Далее найдется хотя бы один класс A_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant D$, в котором не меньше чем RD^{-1} нулей ρ. Обозначим этот класс буквой A, а отвечающую ему сумму буквой $S(\rho)$. Имеем

$$(2D)^{-1} \leqslant |S(\rho)|, \qquad \rho \in A, \qquad |A| \geqslant RD^{-1}.$$

Мнимые части $\rho \in A$ лежат на промежутке $(T, T+H)$; будем считать, что $\gamma = \mathrm{Im}\rho$ занумерованы в порядке возрастания γ.

Разделим $(T, T+H]$ на промежутки вида $n, n+1$; те из них, для которых n — четное число, отнесем к множеству B_1, оставшиеся — к множеству B_2. В одном из множеств B_1 или B_2 попадет не менее чем $0.5RD^{-1}$ нулей ρ; множество этих нулей мы обозначим буквой B. Наконец, B разобьем на $\ll \ln T$ множеств следующим образом: к множеству E_1 отнесем те ρ, у которых мнимые части γ являются первыми на своих промежутках $(n, n+1]$ (если таких несколько, берем любое из них), к множеству E_2 отнесем те ρ, у которых γ являются вторыми на своих промежутках, и так далее. Так как на промежутке $(n, n+1]$ лежит не более чем $c\ln T$ чисел $\gamma = \mathrm{Im}\rho$, то и множеств E_ν будет не более чем $c\ln T$ штук. Следовательно найдется такое E_ν, в котором будет не менее $R(Dc\ln T)^{-1}$ нулей ρ. Итак, получили множество нулей ρ такое, что

$$(2D)^{-1} \leqslant |S(\rho)|, \qquad \rho \in E, \qquad |E| \geqslant R(Dc\ln T)^{-1}. \tag{12}$$

Отметим, что если ρ, $\rho' \in E$, то

$$|\mathrm{Im}\rho - \mathrm{Im}\rho'| = |\gamma - \gamma'| \geqslant 1.$$

3.1. Сумма $S(\rho)$ имеет вид (10)

Пусть $S(\rho)$ имеет вид (10). Из условий на n получаем

$$T^{0.5\varepsilon} = x < N < N_1 \leqslant xy \leqslant T^{0.5(1+\varepsilon)}.$$

Рассмотрим пять возможных случаев:

1. $T^{0.5\varepsilon} < N \leqslant H^{\frac{3}{5}}$;
2. $H^{\frac{3}{5}} < N \leqslant H^{\frac{4}{5}}$; $\alpha \in \left(\frac{2}{3}, \ \frac{5}{6}\right)$;
3. $H^{\frac{3}{5}} < N \leqslant H^{\frac{4}{5}}$, $\alpha \notin \left(\frac{2}{3}, \ \frac{5}{6}\right)$;
4. $H^{\frac{4}{5}} < N \leqslant H$;
5. $H < N \leqslant T^{0.5(1+\varepsilon)}$.

3.1.1. Случай $T^{0.5\varepsilon} < N \leqslant H^{\frac{3}{5}}$

Промежуток $(T^{0.5\varepsilon}, H^{\frac{3}{5}}]$ разделим точками $H^{\frac{1}{r}}$, $r = 2, 3, \cdots, r_0$; $r_0 = 2(\theta+\varepsilon)\varepsilon^{-1} - 1$, $\theta = \theta(k,\lambda) = \frac{k+\lambda}{2k+2}$, на r_0 промежутков F_r:

$$F_r = \left(H^{\frac{1}{r+1}}, H^{\frac{1}{r}}\right), \qquad r = r_0, \cdots, 2, \qquad F_1 = \left(H^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{3}{5}}\right).$$

Возведя обе части (12) в степень $2(r+1)$, найдем

$$(2D)^{-2(r+1)} \leqslant |S^{r+1}(\rho)|^2 = \left| \sum_{N^{r+1} < n \leqslant N_1^{r+1}} A_{r+1}(n) n^{-\rho} \right|^2, \tag{13}$$

где
$$A_{r+1}(n) = \sum_{n_1\cdots n_{r+1}=n} a(n_1)\cdots a(n_{r+1}).$$

Так как $|a(n)| \leqslant \tau(n)$, то
$$|A_{r+1}(n)| \leqslant \sum_{n_1\cdots n_{r+1}=n} \tau(n_1)\cdots\tau(n_{r+1}) = \sum_{d_1k_1\cdots d_{r+1}k_{r+1}=n} 1 = \tau_{2r+2}(n). \tag{14}$$

Суммируя обе части неравенства (13) по $\rho \in E$ и имея в виду, что $D \ll \ln^2 T$, $|E| \gg R\ln^{-3} T$, получим
$$R \ll \ln^{4r+7} T \sum_{\rho\in E} \left| \sum_{N^{r+1}<n\leqslant N_1^{r+1}} A_{r+1}(n) n^{-\rho} \right|^2.$$

Во внутренней сумме по n сделаем частное суммирование и, помня, что $\beta \geqslant \alpha$, найдем
$$R \leqslant N^{-2(r+1)\alpha} \ln^{4r+7} T \sum_{\rho\in E} \left| \sum_{N^{r+1}<n\leqslant u} A_{r+1}(n) n^{-i\gamma} \right|^2. \tag{15}$$

Здесь $u \leqslant N_1^{r+1}$ такое, при котором правая часть (15) максимальна. К сумме по ρ применим лемму 2, полагая в ней $t_\nu = \gamma$, $\delta = 1$. Находим
$$R \leqslant N^{-2(r+1)\alpha} \ln^{4r+7} T \left(I_1 + \sqrt{I_1 I_2} \right), \tag{16}$$

где
$$I_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{N^{r+1}<n\leqslant u} A_{r+1}(n) n^{-it} \right|^2 dt,$$
$$I_2 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{N^{r+1}<n\leqslant u} A_{r+1}(n) n^{-it} \ln n \right|^2 dt.$$

Каждый из интегралов I_1 и I_2 оцениваем, пользуясь леммами 3 и 4:
$$I_1 \ll (H + N^{r+1}\ln T) \sum_{N^{r+1}<n\leqslant N_1^{r+1}} |A_{r+1}(n)|^2 \ll$$
$$\ll (H + N^{r+1}) \ln T \sum_{N^{r+1}<n\leqslant N_1^{r+1}} \tau_{2r+2}^2(n) \ll (H + N^{r+1}) N^{r+1} \ln^{(2r+2)^2} T;$$
$$I_2 \ll (H + N^{r+1}) \ln^3 T \sum_{N^{r+1}<n\leqslant N_1^{r+1}} \tau_{2r+2}^2(n) \ll (H + N^{r+1}) N^{r+1} \ln^{(2r+2)^2+2} T.$$

Подставляя эти оценки в правую часть неравенства (16), получим
$$R \leqslant N^{-2(r+1)\alpha} \ln^{4r+7} T \cdot (H + N^{r+1}) N^{r+1} \ln^{(2r+2)^2+1} T \ll$$
$$\ll (H + N^{r+1}) N^{(r+1)(1-2\alpha)} \ln^{(2r+2)^2+4r+8} T. \tag{17}$$

Так как $N \in F_r$, то $H^{\frac{1}{r+1}} < N$, то есть $H < N^{r+1}$, и, следовательно,
$$R \ll N^{2(r+1)(1-\alpha)} \ln^{(2r+2)^2+4r+8} T. \tag{18}$$

Опять так как $N \in F_r$, то $N \leqslant H^{\frac{1}{r}}$ при $r = r_0, \cdots, 2$ и $N \leqslant H^{\frac{3}{5}}$ при $r = 1$. Поэтому, если $r = r_0, \cdots, 5$ или $r = 1$, то из (18) имеем

$$R \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{172} T.$$

Осталось рассмотреть случай $N \in F_r$, $r = 2, 3, 4$. Если $N \leqslant H^{\frac{6}{5(r+1)}}$, то из (18) следует

$$R \leqslant H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{124} T.$$

Итак, пусть $r = 2, 3, 4$ и $H^{\frac{6}{5(r+1)}} < N \leqslant H^{\frac{1}{r}}$. Заменяя в (17) $r+1$ на r, найдем

$$R \ll (H + N^r) N^{r(1-2\alpha)} \ln^{4r^2+4r+4} T.$$

Так как $H \geqslant N^r$, $\alpha \geqslant 0.5$, то

$$R \ll H N^{r(1-2\alpha)} \ln^{4r^2+4r+4} T \ll H^{1+\frac{6r}{5(r+1)}(1-2\alpha)} \ln^{84} T. \tag{19}$$

Если для α выполняются неравенства $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2} + \frac{r+1}{12}$, то

$$1 + \frac{6r}{5(r+1)}(1-2\alpha) = \frac{12}{5}(1-\alpha) + \frac{12}{5(r+1)}\left(\alpha - \frac{1}{2} - \frac{r+1}{12}\right) \leqslant 2.4(1-\alpha),$$

и нужная оценка следует из (19).

Пусть теперь

$$\frac{1}{2} + \frac{r+1}{12} \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 2 \leqslant r \leqslant 4.$$

Вернемся к (12)

$$1 \leqslant \ln^{2r} T |S^r(\rho)| = \ln^{2r} T \left| \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} A_r(n) n^{-\rho} \right|. \tag{20}$$

Пусть

$$\varphi = \varphi(\rho) = \arg \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} A_r(n) n^{-\rho}.$$

Тогда (20) перепишется так:

$$1 \leqslant \ln^{2r} T e^{-i\varphi(\rho)} \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} A_r(n) n^{-\rho},$$

Суммируя обе части последнего неравенства по $\rho \in E$ и меняя порядок суммирования, найдем:

$$R \ll \ln^{2r+3} T \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} |A_r(n)| \left| \sum_{\rho \in E} e^{-i\varphi(\rho)} n^{-\rho} \right|;$$

$$R^2 \ll \ln^{4r+6} T \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} |A_r(n)|^2 \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} \left| \sum_{\rho \in E} e^{-i\varphi(\rho)} n^{-\rho} \right|^2.$$

Для первой суммы имеем оценку:

$$\sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} |A_r(n)|^2 \leqslant \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} \tau_{2r}^2(n) \ll N^r \ln^{4r^2-1} T.$$

Следовательно,

$$R^2 \leqslant N^r \ln^{4r^2+4r+5} T \cdot W, \qquad W = \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} \left| \sum_{\rho \in E} e^{-i\varphi(\rho)} n^{-\rho} \right|^2. \tag{21}$$

Далее,

$$\begin{aligned} W &= \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} \sum_{\rho, \rho_1 \in E} e^{-i(\varphi(\rho) - \varphi(\rho_1))} n^{-\beta - \beta_1 - i(\gamma - \gamma_1)} = \\ &= \sum_{\substack{\rho, \rho_1 \in E \\ \gamma = \gamma_1}} \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} n^{-\beta - \beta_1} + \sum_{\substack{\rho, \rho_1 \in E \\ \gamma \neq \gamma_1}} e^{-i(\varphi(\rho) - \varphi(\rho_1))} \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} n^{-\beta - \beta_1 - i(\gamma - \gamma_1)} \ll \\ &\ll R N^{r(1-2\alpha)} + \sum_{\substack{\rho, \rho_1 \in E \\ \gamma \neq \gamma_1}} \left| \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} n^{-\beta - \beta_1 - i(\gamma - \gamma_1)} \right|. \end{aligned}$$

К последней сумме по n применим формулу частного суммирования; учитывая, что $\beta,\ \beta_1 \geqslant \alpha$, найдем:

$$W \ll R N^{r(1-2\alpha)} + N^{-2r\alpha} \sum_{\substack{\rho, \rho_1 \in E \\ \gamma \neq \gamma_1}} \left| \sum_{N^r < n \leqslant u} n^{-i(\gamma - \gamma_1)} \right|,$$

причем $u \leqslant N_1^r$ и такое, при котором правая часть максимальна. Двойную сумму по $\rho, \rho_1 \in E$, $\gamma \neq \gamma_1$ разобьем на $\ll \ln T$ сумм вида $V < \gamma - \gamma_1 \leqslant V_1$, $1 \leqslant V < V_1 \leqslant 2V \leqslant H$. Переходя к максимальной сумме, получим, что

$$\begin{aligned} W &\ll R N^{r(1-2\alpha)} + N^{-2r\alpha} \ln T \sum_{V < \gamma - \gamma_1 \leqslant V_1} \left| \sum_{N^r < n \leqslant u} n^{-i(\gamma - \gamma_1)} \right| \ll \\ &\ll R N^{r(1-2\alpha)} + R N^{-2r\alpha} \ln T \sum_{V < \gamma - \gamma_0 \leqslant V_1} \left| \sum_{N^r < n \leqslant u} n^{-i(\gamma - \gamma_0)} \right|, \end{aligned}$$

где внешнее суммирование проводится по числам γ, а γ_0 — фиксированное число из промежутка $(T, T+H]$.

Если $V_1 \leqslant \pi N^r$, то к сумме по n применим лемму 5:

$$\sum_{N^r < n \leqslant u} n^{-i(\gamma - \gamma_0)} = \int_{N^r}^{u} n^{-i(\gamma - \gamma_0)} dn \ll \frac{N^r}{|\gamma - \gamma_0| + 1};$$

$$W \ll R N^{r(1-2\alpha)} + R N^{-2r\alpha} \ln T \sum_{V < \gamma - \gamma_0 \leqslant V_1} \frac{N^r}{\gamma - \gamma_0 + 1} \ll R N^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T.$$

Если $V_1 > \pi N^r$, то к сумме по n применим лемму 6:

$$\begin{aligned} \sum_{N^r < n \leqslant u} n^{-i(\gamma - \gamma_0)} &= \sum_{M \leqslant m \leqslant M_1} \left(\frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi} \right)^{1/2} m^{-1} e \left(-\frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi} \ln \frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi e} + \frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi} \ln m \right) + \\ &\quad + O(N^r V^{-0.5}) \ll V^{0.5} \left| \sum_{M \leqslant m \leqslant M_1} m^{i(\gamma - \gamma_0) - 1} \right| + N^r V^{-0.5}, \end{aligned}$$

$$M = \frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi u}, \quad M_1 = \frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi N^r}.$$

Таким образом, при любом V, $1 \leqslant V \leqslant H$, для W выполняется такая оценка:

$$W \ll RN^{r(1-2\alpha)}\ln^2 T + RV^{0.5}N^{-2r\alpha}\ln T \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1}\left(\left|\sum_{M\leqslant m\leqslant M_1} m^{-1+i(\gamma-\gamma_0)}\right| + N^r V^{-1}\right). \quad (22)$$

Границы изменения m зависят от переменной суммирования γ. Освободимся от этой зависимости за счет незначительного огрубления оценки. Возьмем

$$B = \left[VN^{-r}\right] + 1, \qquad U = V(2\pi u)^{-1}, \qquad U_1 = V(\pi N^r)^{-1}.$$

Имеем цепочку равенств:

$$\sum_{M\leqslant m\leqslant M_1} m^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} = \sum_{U\leqslant n\leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} \sum_{M\leqslant m\leqslant M_1}\frac{1}{2B+1}\sum_{|b|\leqslant B} e\left(\frac{b(n-m)}{2B+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2B+1}\sum_{M\leqslant m\leqslant M_1}\sum_{U\leqslant n\leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} +$$
$$+ \frac{1}{2B+1}\sum_{0<|b|\leqslant B}\sum_{U\leqslant n\leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} e\left(\frac{bn}{2B+1}\right)\sum_{M\leqslant m\leqslant M_1} e\left(\frac{-bm}{2B+1}\right).$$

Последняя сумма по m суммируется и легко оценивается по абсолютной величине числом $(2B+1)|b|^{-1}$. Следовательно,

$$\sum_{M\leqslant m\leqslant M_1} m^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} \ll \sum_{|b|\leqslant B}\frac{1}{|b|+1}\left|\sum_{U\leqslant n\leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} e\left(\frac{bn}{2B+1}\right)\right| \ll$$
$$\ll \ln T\left|\sum_{U\leqslant n\leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} e\left(\frac{bn}{2B+1}\right)\right|,$$

где $|b| \leqslant B$ и такое, при котором правая часть максимальна. Подставляя эту оценку в (22), находим:

$$W \ll RN^{r(1-2\alpha)}\ln^2 T + RV^{0.5}N^{-2r\alpha}\ln^2 T \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1}\left(\left|\sum_{U\leqslant n\leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} e\left(\frac{bn}{2B+1}\right)\right| + \frac{N^r}{V}\right). \quad (23)$$

Возводя основное неравенство (12) в степень r, будем считать:

$$1 \leqslant \ln^{2r} T\left|\sum_{N^r<k\leqslant N_1^r} A_r(k)k^{-\beta+i\gamma}\right|. \quad (24)$$

Заменяя единицу в правой части (23) под знаком суммы по γ большой величиной, именно правой частью (24), получим:

$$W \ll RN^{r(1-2\alpha)}\ln^2 T + RV^{0.5}N^{-2r\alpha}\ln^{2r+2} T\cdot W_1, \quad (25)$$
$$W_1 = \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1}\left(\left|\sum_{U\leqslant n\leqslant U_1}\sum_{N^r<k\leqslant N_1^r} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} e\left(\frac{bn}{2B+1}\right) A_r(k)k^{-\beta+i\gamma}\right| + \right.$$
$$\left. + N^r V^{-1}\left|\sum_{N^r<k\leqslant N_1^r} A_r(k)k^{-\beta+i\gamma}\right|\right).$$

Наконец, в последних двух суммах сделаем частное суммирование по n и k; при этом за знак модуля выносятся максимумы величин n^{-1} и $k^{-\beta}$, а верхние границы изменения n и k заменяются какими-то другими; получим:

$$W_1 \ll N^{r-r\alpha}V^{-1}(W_2+W_3), \tag{26}$$

$$W_2 = \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1}\left|\sum_{U\leqslant n\leqslant U_2}\sum_{N^r<k\leqslant N_2^r} n^{i(\gamma-\gamma_0)}e\left(\frac{bn}{2B+1}\right)A_r(k)k^{i\gamma}\right|,$$

$$W_3 = \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_3}\left|\sum_{N^r<k\leqslant N_3^r} A_r(k)k^{i\gamma}\right|, \qquad U_2\leqslant U_1, \quad N_2,\ N_3\leqslant N_1.$$

Записывая модуль внутренней суммы в W_2 в виде произведения суммы на $e^{-i\varphi(\gamma)}$ и меняя порядки суммирования, находим:

$$W_2 \ll \sum_{U\leqslant n\leqslant U_2}\sum_{N^r<k\leqslant N_2^r}|A_r(k)|\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)}(nk)^{i\gamma}\right| \ll$$

$$\ll \sum_{UN^r\leqslant m\leqslant U_2N_2^r} B(m)\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)}m^{i(\gamma-\gamma_0)}\right|, \tag{27}$$

$$B(m)\leqslant \sum_{nk=m}|A_r(k)| \ll \sum_{k|m}\tau_{2r}(k)=\tau_{2r+1}(m);$$

$$W_3 = \sum_{N^r\leqslant k\leqslant N_3^r}|A_r(k)|\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)}k^{i(\gamma-\gamma_0)}\right|. \tag{28}$$

Применяя к (27) и (28) неравенство Коши, оценку (14) и лемму 4, получим

$$W_2^2 \ll V\ln^{(2r+1)^2-1}T\sum_{UN^r\leqslant m\leqslant U_2N_2^r}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)}m^{i(\gamma-\gamma_0)}\right|^2,$$

$$W_3^2 \ll N^r\ln^{4r^2-1}T\sum_{N^r\leqslant k\leqslant N_3^r}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)}k^{i(\gamma-\gamma_0)}\right|^2.$$

Применив к правым частям полученных неравенств лемму 2, получим:

$$W_2^2 \ll V\ln^{(2r+1)^2-1}T\left(I_1+\sqrt{I_1I_2}\right), \qquad W_3^2 \ll N^r\ln^{4r^2-1}T\left(I_3+\sqrt{I_3I_4}\right), \tag{29}$$

где

$$I_1=\int\limits_{UN^r}^{U_2N_2^r}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1}e^{-i\varphi(\gamma)}m^{i(\gamma-\gamma_0)}\right|^2dm,$$

$$I_2=\int\limits_{UN^r}^{U_2N_2^r}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1}(\gamma-\gamma_0)e^{-i\varphi(\gamma)}m^{i(\gamma-\gamma_0)-1}\right|^2dm,$$

$$I_3=\int\limits_{N^r}^{N_3^r}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1}e^{-i\varphi(\gamma)}k^{i(\gamma-\gamma_0)}\right|^2dk,$$

$$I_4=\int\limits_{N^r}^{N_3^r}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1}(\gamma-\gamma_0)e^{-i\varphi(\gamma)}k^{i(\gamma-\gamma_0)-1}\right|^2dk.$$

Интегралы I_1, I_2, I_3 и I_4 оцениваются одинаково: после возведения модуля соответствующей суммы в квадрат, интеграл берется и сумма по γ и γ_1 оценивается тривиально суммой модулей слагаемых (следует помнить, что число слагаемых по γ, γ_1 не превосходит R, а γ, γ_1 таковы, что $|\gamma-\gamma_1|\geqslant 1$ и $U=V(2\pi u)^{-1}\asymp VN^{-r}$). Последовательно находим:

$$\begin{aligned}I_1&=\sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1}}e^{i(\varphi(\gamma_1)-\varphi(\gamma))}\int\limits_{UN^r}^{U_2N_2^r}m^{i(\gamma-\gamma_1)}dm=\\ &=\sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1}}e^{i(\varphi(\gamma_1)-\varphi(\gamma))}\,\frac{(U_2N_2^r)^{i(\gamma-\gamma_1)+1}-(UN^r)^{i(\gamma-\gamma_1)+1}}{i(\gamma-\gamma_1)+1}\ll\\ &\ll RUN^r+UN^r\sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1\\ \gamma\neq\gamma_1}}(|\gamma-\gamma_1|+1)^{-1}\ll RUN^r\ln T\ll RV\ln T;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2&=\sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1}}e^{i(\varphi(\gamma_1)-\varphi(\gamma))}(\gamma-\gamma_0)(\gamma_1-\gamma_0)\int\limits_{UN^r}^{U_2N_2^r}m^{i(\gamma-\gamma_1)-2}dm=\\ &=\sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1}}e^{i(\varphi(\gamma_1)-\varphi(\gamma))}\,(\gamma-\gamma_0)(\gamma_1-\gamma_0)\frac{(U_2N_2^r)^{i(\gamma-\gamma_1)-1}-(UN^r)^{i(\gamma-\gamma_1)-1}}{i(\gamma-\gamma_1)-1}\ll\\ &\ll V^2(UN^r)^{-1}R+V^2(UN^r)^{-1}\sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1\\ \gamma\neq\gamma_1}}|\gamma-\gamma_1|^{-1}\ll V^2(UN^r)^{-1}R\ln T\ll RV\ln T;\end{aligned}$$

$$I_3\ll RN^r\ln T;$$

$$I_4\ll V^2N^{-r}R\ln T.$$

Подставляя найденные оценки для интегралов I_1, I_2, I_3 и I_4 в (29), а при оценке W_3 пользуясь условием $V_1>\pi N^r$, найдем

$$W_2^2 \ll V \ln^{(2r+1)^2-1} T \left(RV \ln T + \sqrt{RV \ln T \cdot RV \ln T} \right) \ll RV^2 \ln^{(2r+1)^2} T,$$
$$W_3^2 \ll N^r \ln^{4r^2-1} T \left(RN^r \ln T + \sqrt{RN^r \ln T \cdot V^2 N^{-r} R \ln T} \right) \ll$$
$$\ll R \ln^{4r^2-1} T (N^{2r} \ln T + N^r V \ln T) \ll RV^2 \ln^{4r^2} T.$$

Из (26), (25) и (21) последовательно получаем:

$$W_1 \ll N^{r-r\alpha} V^{-1} \left(R^{0,5} V \ln^{2r^2+2r+0,5} T + R^{0,5} V \ln^{2r^2} T \right) \ll R^{0.5} N^{r(1-\alpha)} \ln^{2r^2+2r+0,5} T;$$
$$W \ll RN^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T + RV^{0.5} N^{-2r\alpha} \ln^{2r+2} T \cdot R^{0.5} N^{r(1-\alpha)} \ln^{2r^2+2r+0,5} T \ll$$
$$\ll RN^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T + R^{1.5} V^{0.5} N^{r(1-3\alpha)} \ln^{2r^2+4r+2,5} T;$$
$$R \leqslant N^r \ln^{4r^2+4r+5} T \cdot \left(N^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T + R^{0.5} V^{0.5} N^{r(1-3\alpha)} \ln^{2r^2+4r+2,5} T \right) \ll$$
$$\ll N^{2r(1-\alpha)} \ln^{4r^2+4r+7} T + R^{0.5} V^{0.5} N^{r(2-3\alpha)} \ln^{6r^2+8r+7.5} T.$$

Помня, что $V \leqslant H$, перепишем последнюю оценку для величины R в следующей удобной форме:

$$R \ll N^{2r(1-\alpha)} \ln^{4r^2+4r+7} T + HN^{r(4-6\alpha)} \ln^{12r^2+16r+15} T. \tag{30}$$

Мы рассматриваем случай:

$$H^{\frac{6}{5(r+1)}} < N \leqslant H^{\frac{1}{r}}, \quad \frac{1}{2} + \frac{r+1}{12} \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad r = 2, 3, 4.$$

Легко видеть, что $\alpha > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, тогда

$$R \ll H^{2(1-\alpha)} \ln^{4r^2+4r+7} T + H^{1+\frac{12r}{5(r+1)}(2-3\alpha)} \ln^{12r^2+16r+15} T.$$

Отсюда, пользуясь соотношением

$$1 + \frac{12r}{5(r+1)}(2-3\alpha) - \frac{12}{5}(1-\alpha) = \frac{12(2r-1)}{5(r+1)} \left(\frac{17r-7}{12(2r-1)} - \alpha \right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{12(2r-1)}{5(r+1)} \left(\frac{17r-7}{12(2r-1)} - \frac{1}{2} - \frac{r+1}{12} \right) = -\frac{2r(r-2)}{5(r+1)} \leqslant 0,$$

имеем

$$R \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{95} T.$$

3.1.2. Случай $H^{0.6} < N \leqslant H^{0.8}$; $\alpha \notin \left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{6}\right)$

Если $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 2/3$, то, полагая в (17) $r = 0$, найдем

$$R \ll (HN^{1-2\alpha} + N^{2(1-\alpha)}) \ln^{12} T \leqslant (H^{1+0.6(1-2\alpha)} + H^{1.6(1-\alpha)}) \ln^{14} T =$$
$$= (H^{2.4(1-\alpha)+1.2(\alpha-2/3)} + H^{1.6(1-\alpha)}) \ln^{14} T \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{14} T.$$

При $5/6 \leqslant \alpha \leqslant 1$ применим оценку (30), полагая в ней $r = 1$. Находим

$$R \ll (N^{2(1-\alpha)} + HN^{4-6\alpha}) \ln^c T \ll (H^{1.6(1-\alpha)} + H^{1+0.6(4-6\alpha)}) \ln^{43} T =$$
$$= (H^{1.6(1-\alpha)} + H^{2.4(1-\alpha)+1.2(5/6-\alpha)}) \ln^{43} T \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{43} T.$$

3.1.3. Случай $H^{0.6} < N \leqslant H^{0.8}$; $2/3 \leqslant \alpha \leqslant 5/6$

Пусть сначала $H^{0.6} < N \leqslant H^{2/3}$. Полагая в оценке (17) $r = 1$, найдем:

$$R \ll (HN^{2-4\alpha} + N^{4(1-\alpha)}) \ln^{28} T \ll H^{8/3(1-\alpha)} \ln^{28} T.$$

Пусть теперь $H^{2/3} \leqslant N \leqslant H^{0.8}$, $2/3 \leqslant \alpha \leqslant 3/4$. Применим (17) при $r = 0$. Находим

$$R \ll (HN^{1-2\alpha} + N^{2(1-\alpha)}) \ln^{14} T \ll (H^{1+2/3(1-2\alpha)} + H^{8/5(1-\alpha)}) \ln^{14} T =$$
$$= (H^{8/3(1-\alpha)+4/3(\alpha-3/4)} + H^{8/5(1-\alpha)}) \ln^{14} T \ll H^{8/3(1-\alpha)} \ln^{14} T.$$

Наконец, если $H^{2/3} \leqslant N \leqslant H^{0.8}$ и $3/4 \leqslant \alpha \leqslant 5/6$, то, пользуясь оценкой (30) при $r = 1$, получим:

$$R \ll (N^{2(1-\alpha)} + HN^{4-6\alpha}) \ln^{50} T \ll (H^{8/5(1-\alpha)} + H^{1+2/3(4-6\alpha)}) \ln^{50} T =$$
$$= (H^{8/5(1-\alpha)} + H^{8/3(1-\alpha)+4/3(3/4-\alpha)}) \ln^{50} T \ll H^{8/3(1-\alpha)} \ln^{50} T.$$

3.1.4. Случай $H^{0.8} < N \leqslant H$

Если $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 3/4$, то, полагая в (17) $r = 0$, найдем:

$$R \ll (HN^{1-2\alpha} + N^{2(1-\alpha)}) \ln^{14} T \ll (H^{1+4/5(1-2\alpha)} + H^{2(1-\alpha)}) \ln^{14} T =$$
$$= (H^{2.4(1-\alpha)+0.8(\alpha-3/4)} + H^{2(1-\alpha)}) \ln^{14} T \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{14} T.$$

При $0.75 \leqslant \alpha \leqslant 1$ применим оценку (20), полагая в ней $r = 1$. Находим

$$R \ll (N^{2(1-\alpha)} + HN^{4-6\alpha}) \ln^{14} T \ll (H^{2(1-\alpha)} + H^{1+4/5(4-6\alpha)}) \ln^{14} T =$$
$$= (H^{2(1-\alpha)} + H^{2.4(1-\alpha)+2.4(0.75-\alpha)}) \ln^{14} T \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{14} T.$$

3.1.5. Случай $H \leqslant N \leqslant T^{0.5(1+\varepsilon)}$

Возводя основное неравенство (12) в квадрат и просуммировав обе части получившегося неравенства по $\rho \in E$, получим

$$R \ll \ln^7 T \sum_{\rho \in E} \left| \sum_{N < n \leqslant N_1} a(n) n^{-\rho} \right|^2.$$

Во внутренней сумме по n сделаем частное суммирование. При этом за знак модуля вынесется максимум величины $n^{-\beta}$, а верхняя граница изменения n заменится на N_2, $N_2 \leqslant N_1$. Помня, что $\beta \geqslant \alpha$, получим

$$R \ll N^{-2\alpha} \ln^7 T \sum_{\rho \in E} \left| \sum_{N < n \leqslant N_2} a(n) n^{-i\gamma} \right|^2.$$

К сумме по ρ применим лемму 2, полагая в ней $t_\nu = \gamma$, $\delta = 1$. Находим

$$R \ll N^{-2\alpha} \left(I_1 + \sqrt{I_1 I_2} \right) \ln^7 T. \tag{31}$$

где

$$I_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{N < n \leqslant N_2} a(n) n^{-it} \right|^2 dt,$$

$$I_2 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{N < n \leqslant N_2} a(n) n^{-it} \ln n \right|^2 dt.$$

Оценим сверху интеграл I_1. Имеем

$$I_1 = \int\limits_0^H \left| \sum_{N<n\leqslant N_2} a(n) n^{-i(T+t)} \right|^2 dt \leqslant \int\limits_0^H \exp\left(1 - \left(\frac{t}{H}\right)^2\right) \left| \sum_{N<n\leqslant N_2} a(n) n^{-i(T+t)} \right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant e \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{t}{H}\right)^2\right) \left| \sum_{N<n\leqslant N_2} a(n) n^{-i(T+t)} \right|^2 dt =$$

$$= e \sum_{N<n_1,n_2\leqslant N_2} a(n_1)a(n_2) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{-iT} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{t}{H}\right)^2 - it\ln\frac{n_1}{n_2}\right) dt.$$

При вещественном α справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-t^2 - i\alpha t\right) dt = \sqrt{\pi} \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right).$$

Поэтому

$$I_1 \leqslant e\sqrt{\pi} H \sum_{N<n_1,n_2\leqslant N_2} a(n_1)a(n_2) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right).$$

Представляя последнюю сумму в виде двух слагаемых, одно из которых получается при $n_1 = n_2$, приходим к оценке

$$I_1 \ll H(\Sigma_0 + W_0), \qquad \Sigma_0 = \sum_{N<n\leqslant N_2} a^2(n),$$

$$W_0 \leqslant \sum_{N<n_1<n_2\leqslant N_2} a(n_1)a(n_2) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right).$$

Оценим сумму Σ_0, пользуясь леммой 4 и имея в виду, что $|a(n)| \leqslant \tau(n)$. Найдем:

$$\Sigma_0 \leqslant \sum_{N<n\leqslant N_2} \tau^2(n) \ll N \ln^2 T.$$

Теперь оценим W_0. Если в W_0 выполняется условие $n_2 - n_1 \geqslant K = NH^{-1}\ln T$, то

$$\ln\frac{n_2}{n_1} = \ln\left(1 + \frac{n_2 - n_1}{n_1}\right) \geqslant \ln\left(1 + \frac{\ln T}{2H}\right) \geqslant \frac{\ln T}{4H}.$$

Следовательно

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\ln^2 T}{64}\right).$$

Таким образом, если $n_2 - n_1 > K$, то соответствующая часть суммы W_0 есть величина порядка

$$O\left(\exp\left(-0.01\ln^2 T\right)\right).$$

Оценим оставшуюся часть суммы W_0, которую обозначим W_1:

$$W_1 = \sum_{N<n_1\leqslant N_2} a(n_1) \sum_{\substack{n_1<n_2\leqslant n_1+K \\ n_2\leqslant N_2}} a(n_2) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right).$$

Записывая коэффициенты $a(n_1)$ и $a(n_2)$ в явном виде, получим:

$$W_1 = \sum_{m_1,m_2\leqslant x}\mu(m_1)\mu(m_2)W(m_1,m_2), \qquad y=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac12}, \tag{32}$$
$$W(m_1,m_2)=\sum_{\substack{N<m_1n_1\leqslant N_2\\ n_1\leqslant y}}\ \sum_{\substack{m_1n_1<m_2n_2\leqslant m_1n_1+K\\ n_2\leqslant y,\ m_2n_2\leqslant N_2}}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{m_2n_2}{m_1n_1}\right)^2\right)\left(\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right)^{-iT}.$$

Обозначим через d наибольший общий делитель чисел m_1 и m_2. Тогда $m_1 = ad$, $m_2 = bd$, $(a,b) = 1$. Переменные суммирования представим так:

$$n_1 = bn_3 + n_3', \quad n_2 = an_4 + n_4'.$$

Причем n_3' и n_4' меняются в пределах $0\leqslant n_3' < b$, $0 \leqslant n_4' < a$, а при заданных n_3', n_4' переменные n_3, n_4 меняются в пределах

$$N_3 = (Nm_1^{-1} - n_3')b^{-1} < n_3 \leqslant (N_2m_1^{-1} - n_3')b^{-1} = N_3', \qquad n_3 \leqslant (y - n_3')b^{-1},$$
$$(n_1m_1m_2^{-1} - n_4')a^{-1} < n_4 \leqslant (n_1m_1m_2^{-1} - n_4' + Km_2^{-1})a^{-1},$$
$$n_4 \leqslant (y - n_4')a^{-1}, \qquad n_4 \leqslant (N_2m_2^{-1} - n_4')a^{-1} = N_4.$$

Далее имеем:

$$(n_1m_1m_2^{-1} - n_4')a^{-1} = ((bn_3 + n_3')ab^{-1} - n_4')a^{-1} = n_3 + n_3'b^{-1} - n_4'a^{-1} = n_3 + \alpha - \beta,$$
$$\alpha = n_3'b^{-1}, \quad \beta = n_4'a^{-1}.$$

Поэтому

$$n_3 + \alpha - \beta < n_4 \leqslant n_3 + \alpha - \beta + K_1, \quad K_1 = K(abd)^{-1}, \quad n_4 \leqslant (y - n_4')a^{-1}, \quad n_4 \leqslant N_4.$$

Пользуясь введенными обозначениями, дробь n_1m_1/n_2m_2 представим так:

$$\frac{m_1n_1}{m_2n_2} = \frac{an_1}{bn_2} = \frac{abn_3 + an_3'}{abn_4 + bn_4'} = \frac{n_3+\alpha}{n_4+\beta}.$$

Сумма $W(m_1,m_2)$ будет теперь выглядеть следующим образом:

$$W(m_1,m_2) = \sum_{0\leqslant n_3'<b}\ \sum_{0\leqslant n_4'<a} W(n_3',n_4'), \tag{33}$$
$$W(n_3',n_4') = \sum_{\substack{N_3<n_3\leqslant N_3'\\ n_3\leqslant(y-n_3')b^{-1}}}\ \sum_{\substack{n_3+\alpha-\beta<n_4\leqslant n_3+\alpha-\beta+K_1\\ n_4\leqslant N_4,\ n_4\leqslant(y-n_4')a^{-1}}}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_4+\beta}{n_3+\alpha}\right)^2\right)\left(\frac{n_3+\alpha}{n_4+\beta}\right)^{-iT}.$$

Переменная суммирования n_4 принимает все значения натуральных чисел из полуинтервала

$$h_3 + \alpha - \beta < n_4 \leqslant \min\left\{n_3 + \alpha - \beta + K_1,\ N_4,\ (y - n_4')a^{-1}\right\}.$$

Поэтому n_4 можно заменить величиной $n_3 + h$; $n_4 = n_3 + h$, где h принимает значения:

$$\alpha - \beta < h \leqslant \min\left\{\alpha - \beta + K_1,\ N_4 - n_3,\ (y - n_4')a^{-1} - n_3\right\} = h_1.$$

Таким образом

$$W(n_3', n_4') = \sum_{\substack{N_3 < n_3 \leqslant N_3' \\ n_3 \leqslant (y - n_3')b^{-1}}} \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant h_1} E(n_3,h) \left(\frac{n_3+\alpha}{n_3+h+\beta} \right)^{-iT},$$

$$E(n_3,h) = \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{n_3+h+\beta}{n_3+\alpha} \right)^2 \right).$$

Меняя порядок суммирования, найдем:

$$W(n_3', n_4') \leqslant \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1} \left| \sum_{N_3<n_3\leqslant N_5} E(n_3,h) \left(\frac{n_3+\alpha}{n_3+h+\beta} \right)^{-iT} \right|,$$

где

$$N_5 = \min\left\{ N_3',\, (y-n_3')b^{-1},\, N_4 - h,\, (y-n_4')a^{-1} - h \right\}.$$

Во внутренней сумме по n_3 сделаем частное суммирование, а затем с учетом следующих соотношений

$$E_u'(u,h) = E(u,h) \frac{H(\alpha-\beta-h)}{(u+h+\beta)(u+\alpha)} \ln \frac{n_3+h+\beta}{n_3+\alpha} < 0,$$

$$C(u,h) = \sum_{N_3<n_3\leqslant u} \left(\frac{n_3+\alpha}{n_3+h+\beta} \right)^{-iT}, \qquad 0 < E(u,h) \leqslant 1,$$

то есть в частности, пользуясь монотонностью функции $E(u,h)$, последовательно получим:

$$W(n_3', n_4') \leqslant \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1} \left| -\int_{N_3}^{N_5} C(u,h) E_u'(u,h)du + E(N_5,h)C(N_5,h) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1} \left| C(N_5',h) \right| (2E(N_5,h) + E(N_3,h)) \ll \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1} \left| \sum_{N_3<n_3\leqslant N_5'} \left(\frac{n_3+\alpha}{n_3+h+\beta} \right)^{-iT} \right|,$$

где $N_3 < N_5' \leqslant N_5$. Отметим, что для $W_1(n_1, n_4')$ выполняются следующие условия, которыми мы будем далее пользоваться:

$$h+\beta-\alpha = \frac{m_2n_2 - m_1n_1}{abd} \geqslant (ab)^{-1},$$
$$N^2 \leqslant m_1m_2y^2 \leqslant abd^2T.$$

Для оценки внутренней суммы в $W_1(n_3', n_4')$ пользуемся методом экспоненциальных пар (определение 3). Положим

$$f(u) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{u+h+\beta}{u+\alpha};$$
$$h_1 = N_5' - N_3 \leqslant N_3 = (Nm_1^{-1} - n_3')b^{-1};$$
$$B = N(abd)^{-1};$$
$$A = T(h+\beta-\alpha)(abd)^2N^{-2} \geqslant 1.$$

Производная порядка r, $r = 1, 2, \cdots$ функции $f(u)$ имеет вид

$$f^{(r)}(u) = \frac{(-1)^r (r-1)! T}{2\pi (u+h+\beta)^r (u+\alpha)^r} \sum_{i=1}^{r} C_r^i (u+\alpha)^{r-1} (h+\beta-\alpha),$$

и выполняются следующие соотношения

$$AB^{1-r} \ll f^{(r)}(u) \ll AB^{1-r}, \qquad AB^{1-r} = T(h+\beta-\alpha)(abd)^{r+1}N^{-r-1}.$$

Следовательно, для любой экспоненциальной пары (κ,λ) имеем:

$$W(n_3', n_4') \leqslant \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1} A^\kappa B^\lambda \ll T^\kappa N^{\lambda-2\kappa}(abd)^{2\kappa-\lambda}K_1^{\kappa+1} \ll$$
$$\ll N^{1+\lambda-\kappa}T^k H^{-\kappa-1}(abd)^{\kappa-\lambda-1}\ln^{\kappa+1} T.$$

Тем самым из (32) и (33) получим:

$$W(m_1,m_2) \ll N^{1+\lambda-\kappa}T^k H^{-\kappa-1}(m_1m_2)^{\kappa-\lambda}\ln^{\kappa+1} T;$$
$$W_1 \ll N^{1+\lambda-\kappa}T^\kappa H^{-\kappa-1}x^{2(1+\kappa-\lambda)}\ln^{\kappa+1} T.$$

Так как $x < N \ll xT^{0.5}$, $x = T^{0.5\varepsilon}$ и $\kappa \leqslant \lambda$, то

$$W_1 \ll NT^{\frac{\kappa+\lambda}{2}}H^{-\kappa-1}x^{2+\kappa-\lambda}\ln^{\kappa+1} T \leqslant NT^{\frac{\kappa+\lambda}{2}+\varepsilon}H^{-\kappa-1}\ln^{\kappa+1} T =$$
$$= N\left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}+\frac{\varepsilon}{\kappa+1}}}{H}\right)^{\kappa+1}\ln^{\kappa+1} T.$$

Поэтому, если $H \geqslant T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}+\varepsilon}$, то

$$W_1 \ll N\ln^2 T.$$

Объединяя это с оценками W_0 и Σ_0, находим:

$$I_1 \ll HN\ln^2 T.$$

Оценивая интеграл I_2 также как и I_1, получим:

$$I_2 \ll HN\ln^3 T.$$

Отсюда и из (31), пользуясь соотношением $N \geqslant H$, найдем:

$$R \ll HN^{1-2\alpha}\ln^{10} T \ll H^{2(1-\alpha)}\ln^{10} T.$$

Таким образом, случай, когда $S(\rho)$ имеет вид (10), рассмотрен полностью.

3.2. Сумма $S(\rho)$ имеет вид (11)

Пусть $S(\rho)$ имеет вид (11). Так как

$$|\chi(\rho)| \ll T^{0.5-\beta}, \quad \beta = \operatorname{Re}\rho,$$

то, переходя в (11) к неравенствам, найдем:

$$1 \leqslant T^{0.5-\beta}\ln^2 T\left|\sum_{Y<n\leqslant Y_1} n^{-1+\rho}\sum_{M<m\leqslant M_1}\mu(m)m^{-\rho}\right|, \qquad Y \leqslant y = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac12}, \quad M_1 \leqslant x = T^{0.5\varepsilon}.$$

Производя частное суммирование по m и n, приходим к неравенству:

$$1 \leqslant T^{0.5-\beta}Y^{-1+\beta}M^{-\beta}\ln^2 T\left|\sum_{Y<n\leqslant Y_2} n^{-i\gamma}\sum_{M<m\leqslant M_2}\mu(m)m^{-i\gamma}\right|, \qquad Y_2 \leqslant Y_1, \quad M_2 \leqslant M_1.$$

Возводя это неравенство в квадрат и просуммировав обе части получившегося неравенства по $\rho \in E$, получим:

$$R \ll T^{1-2\alpha} Y^{2\alpha-2} M^{-2\alpha} \ln^7 T \sum_{\rho \in E} \left| \sum_{M<m\leqslant M_2} \mu(m) m^{-i\gamma} \sum_{Y<n\leqslant Y_2} n^{-i\gamma} \right|^2 .$$

К сумме по ρ применяя лемму 2, получим:

$$R \ll T^{1-2\alpha} Y^{2\alpha-2} M^{-2\alpha} \ln^7 T \left(I_1 + \sqrt{I_1 I_2} \right), \tag{34}$$

$$I_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{M<m\leqslant M_2} \mu(m) m^{-it} \sum_{Y<n\leqslant Y_2} n^{-it} \right|^2 dt,$$

$$I_2 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{M<m\leqslant M_2} \mu(m) m^{-it} \sum_{Y<n\leqslant Y_2} n^{-it} \ln mn \right|^2 dt.$$

Оценим сверху интеграл I_1. Применяя прием, который был использован при преобразовании I_1 в пункте 3.1.5, найдем:

$$I_1 \leqslant e\sqrt{\pi} H \sum_{M<m_1,m_2\leqslant M_2} \mu(m_1)\mu(m_2) \sum_{Y<n_1,n_2\leqslant Y_2} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} \right)^2 \right) \left(\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} \right)^{-iT}.$$

Представляя последнюю сумму в виде двух слагаемых, одно из которых получается при $m_1 n_1 = m_2 n_2$, приходим к оценке

$$I_1 \ll H(\Sigma_0 + W_0),$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{M<m_1,m_2\leqslant M_2} \mu(m_1)\mu(m_2) \sum_{\substack{Y<n_1,n_2\leqslant Y_2 \\ m_1n_1=m_2n_2}} 1 \ll \sum_{MY<k\leqslant M_1Y_1} \tau^2(k) \ll MY \ln^3 T,$$

$$W_0 = \sum_{M<m_1,m_2\leqslant M_2} \mu(m_1)\mu(m_2) \sum_{\substack{Y<n_1,n_2\leqslant Y_2 \\ m_1n_1<m_2n_2}} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_2 n_2}{m_1 n_1} \right)^2 \right) \left(\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} \right)^{-iT}.$$

Оценим W_0. Если в W_0 выполняется условие $m_2n_2 - m_1n_1 \geqslant K$, $K = MYH^{-1}\ln T$, то

$$\ln \frac{m_2 n_2}{m_1 n_1} = \ln \left(1 + \frac{m_2n_2 - m_1n_1}{m_1n_1} \right) \geqslant \ln \left(1 + \frac{\ln T}{4H} \right) \geqslant \frac{\ln T}{8H};$$

Следовательно

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_2 n_2}{m_1 n_1} \right)^2 \right) \leqslant \exp\left(-\frac{\ln^2 T}{256} \right).$$

Таким образом, если $m_2n_2 - m_1n_1 > K$, то соответствующая часть суммы W_0 есть величина порядка

$$O\left(\exp\left(-0.01 \ln^2 T \right) \right). \tag{35}$$

Отметим, что при $YM \leqslant H \ln T$, все суммы W_0 также имеют порядок (35). Оценим оставшуюся часть суммы W_0, которую обозначим W_1:

$$W_1 = \sum_{M<m_1,m_2\leqslant M_2} \mu(m_1)\mu(m_2) W(m_1, m_2), \tag{36}$$

$$W(m_1, m_2) = \sum_{Y<n_1,n_2\leqslant Y_2} \sum_{\substack{m_1n_1<m_2n_2\leqslant m_1n_1+K \\ Y<n_2\leqslant Y_2}} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_2 n_2}{m_1 n_1} \right)^2 \right) \left(\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} \right)^{-iT}.$$

Обозначим через d наибольший общий делитель чисел m_1 и m_2. Тогда $m_1 = ad$, $m_2 = bd$, $(a,b)=1$. Переменные суммирования представим так:

$$n_1 = bn_3 + n_3', \quad n_2 = an_4 + n_4'.$$

Причем n_3' и n_4' меняются в пределах $0 \leqslant n_3' < b$, $0 \leqslant n_4' < a$, а при заданных n_4', n_4' переменные n_3, n_4 меняются в пределах

$$\begin{aligned} Y_3 = (Y - n_3')b^{-1} < n_3 \leqslant (Y_2 - n_3')b^{-1} = Y_3', \\ (n_1 m_1 m_2^{-1} - n_4')a^{-1} < n_4 \leqslant (n_1 m_1 m_2^{-1} - n_4' + K m_2^{-1})a^{-1}, \\ Y_4 = (Y - n_4')a^{-1} < n_4 \leqslant (Y_2 - n_4')a^{-1} = Y_4'. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} (n_1 m_1 m_2^{-1} - n_4')a^{-1} &= ((bn_3 + n_3')ab^{-1} - n_4')a^{-1} = n_3 + n_3' b^{-1} - n_4' a^{-1} = \\ &= n_3 + \alpha - \beta, \qquad \alpha = n_3' b^{-1}, \qquad \beta = n_4' a^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$n_3 + \alpha - \beta < n_4 \leqslant n_3 + \alpha - \beta + K_1, \qquad K_1 = K(abd)^{-1}, \qquad Y_4 < n_4 \leqslant Y_4'.$$

Пользуясь введенными обозначениями, дробь $m_1 n_1 / m_2 n_2$ представим так:

$$\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} = \frac{an_1}{bn_2} = \frac{abn_3 + an_3'}{abn_4 + bn_4'} = \frac{n_3 + \alpha}{n_4 + \beta}.$$

Сумма $W(m_1, m_2)$ будет теперь выглядеть следующим образом:

$$W(m_1, m_2) = \sum_{0 \leqslant n_3' < b} \sum_{0 \leqslant n_4' < a} W(n_3', n_4'), \tag{37}$$

$$W(n_3', n_4') = \sum_{Y_3 < n_3 \leqslant Y_3'} \sum_{\substack{n_3 + \alpha - \beta < n_4 \leqslant n_3 + \alpha - \beta + K_1 \\ Y_4 < n_4 \leqslant Y_4'}} \exp\left(- \left(\frac{H}{2} \ln \frac{n_4 + \beta}{n_3 + \alpha} \right)^2 \right) \left(\frac{n_3 + \alpha}{n_4 + \beta} \right)^{-iT}.$$

Переменная суммирования n_4 принимает все значения натуральных чисел из полуинтервала

$$\max(Y_4,\ h_3 + \alpha - \beta) < n_4 \leqslant \min(Y_4',\ n_3 + \alpha - \beta + K_1).$$

Поэтому n_4 можно заменить величиной $n_3 + h$; $n_4 = n_3 + h$, где h принимает значения:

$$h_1 = \max(Y_4 - n_3,\ \alpha - \beta) < h \leqslant \min(Y_4' - n_3,\ \alpha - \beta + K_1) = h_2.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} W_1(n_3', n_4') &= \sum_{Y_3 < n_3 \leqslant Y_3'} \sum_{h_1 < h \leqslant h_2} E(n_3, h) \left(\frac{n_3 + \alpha}{n_3 + h + \beta} \right)^{-iT}, \\ E(n_3, h) &= \exp\left(- \left(\frac{H}{2} \ln \frac{n_3 + h + \beta}{n_3 + \alpha} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования, найдем:

$$W_1(n_3', n_4') \leqslant \sum_{\alpha - \beta < h \leqslant \alpha - \beta + K_1} \left| \sum_{N < n_3 \leqslant N_1} E(n_3, h) \left(\frac{n_3 + \alpha}{n_3 + h + \beta} \right)^{-iT} \right|,$$

где $N = \max(Y_3,\, Y_4 - h)$, $N_1 = \min(Y_3',\, Y_4' - h)$. Поступая аналогично как при оценке $W(n_3', n_4')$ пункта 3.1.5, найдем:

$$W_1(n_3', n_4') \ll \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1} \left| \sum_{N<n_3\leqslant N_2} \left(\frac{n_3+\alpha}{n_3+h+\beta} \right)^{-iT} \right|,$$

где $N_2 \leqslant N_1$. Отметим, что для $W_1(n_3', n_4')$ выполняются следующие условия, которыми мы будем далее пользоваться:

$$h+\beta-\alpha = \frac{m_2n_2 - m_1n_1}{abd} \geqslant (ab)^{-1},$$
$$Y(ab)^{-0.5} \ll Ya^{-1} \ll Yb^{-1} \ll Yb^{-1} \ll Ya^{-1} \ll Y(ab)^{-0.5}, \qquad Y \leqslant T^{0.5}.$$

Для оценки внутренней суммы в $W_1(n_3', n_4')$ применим метод экспоненциальных пар (определение 3). Положим

$$f(u) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{u+h+\beta}{u+\alpha}, \qquad B = Y(ab)^{-0.5};$$
$$h_1 = N_2 - N \leqslant N, \qquad A = T(h+\beta-\alpha)abY^{-2} \geqslant 1.$$

Следовательно, для произвольной экспоненциальной пары (κ, λ) имеем:

$$W_1(n_3', n_4') \leqslant \sum_{\alpha-\beta<n\leqslant\alpha-\beta+K_1} A^\kappa B^\lambda \ll T^\kappa Y^{\lambda-2\kappa}(ab)^{\kappa-0.5\lambda} K_1^{k+1} \ll$$
$$\ll Y^{1+\lambda-\kappa} M^{\kappa+1} T^\kappa H^{-\kappa-1} (ab)^{-1-0.5\lambda} d^{-\kappa-1} \ln^{\kappa+1} T.$$

Тем самым из (37) с учетом $\lambda - \kappa - 1 < 0$, а затем из (36) для W_1 получаем:

$$W(m_1, m_2) \ll Y^{1+\lambda-\kappa} M^{\kappa+1} T^\kappa H^{-\kappa-1} (ab)^{-0.5\lambda} d^{-\kappa-1} \ln^{\kappa+1} T \ll$$
$$\ll Y^{1+\lambda-\kappa} M^{\kappa+1} T^\kappa H^{-\kappa-1} (m_1m_2)^{-0.5\lambda} \ln^{\kappa+1} T,$$
$$W_1 \ll Y^{1+\lambda-\kappa} T^k H^{-\kappa-1} M^{3+\kappa-\lambda} \ln^{\kappa+1} T.$$

Так как $Y \leqslant T^{0.5}$, $x = T^{0.5\varepsilon}$ и $\kappa - \lambda \leqslant 0$, то

$$W_1 \ll YMT^{\frac{\kappa+\lambda}{2}+\varepsilon} H^{-\kappa-1} \ln^{k+1} T = YM \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}+\frac{\varepsilon}{\kappa+1}}}{H} \right)^{\kappa+1} \ln^{k+1} T.$$

Поэтому, если $H \geqslant T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}+\varepsilon}$, то

$$W_1 \ll YM \ln^2 T.$$

Объединяя это с оценками W_0 и Σ_0, находим:

$$I_1 \ll HYM \ln^2 T.$$

Оценивая интеграл I_2 также как и I_1, получим:

$$I_2 \ll HYM \ln^3 T.$$

Отсюда и из (34), пользуясь соотношениями

$$Y \leqslant y = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad 1 \leqslant M \leqslant x = T^{0.5\varepsilon}, \qquad H = T^{\theta+\varepsilon} < T^{\frac{1}{2}},$$

последовательно найдем:

$$R \ll T^{1-2\alpha} Y^{2\alpha-2} M^{-2\alpha} \ln^7 T \left(I_1 + \sqrt{I_1 I_2} \right) \ll HT^{1-2\alpha} Y^{2\alpha-1} M^{1-2\alpha} \ln^{10} T \ll$$
$$\ll HT^{0,5(1-2\alpha)} \ln^{10} T \ll H^{2(1-\alpha)} \ln^{10} T.$$

Таким образом, случай, когда $S(\rho)$ имеет вид (11), рассмотрен полностью, и теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huxley M. N. On one difference between consecutive primes // Invent. Math. 1972. V. 15.P. 164 – 170.

2. Карацуба А. А. Распределение простых чисел // УМН. 1990. Т. 45. № 5(275). С. 81 – 140.

3. Гриценко С.А. О плотностной теореме // Математические заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 32 - 40.

4. Selberg A. On the zeros Riemann zeta function // Shr. Norske Vid. Akad. Oslo, 1942. V. 10. P. 1 – 59

5. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1984. Т. 48. № 3. С 569 – 584.

6. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ в окресности критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая 1985. Т. 49. № 2. С. 326 - 333.

7. Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40. В. 5(245). С. 19 –70.

8. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета–функция Римана // М.: Физматлит. 1994. 376 с.

9. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2. С. 303 – 315.

10. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, № 5. С. 3 – 14.

11. Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1994. Т. 207. С. 180 – 196.

12. Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. В. 1. С. 263 – 279.

13. Неъматова Г. Д, Хасанов З. Н. О нулях дзета–функции Римана в окрестности критической прямой // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. Т. 44, № 3 – 4. С. 4 – 7.

14. Рахмонов З. Х., Аминов А. С. О нулях нечетного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критичекой прямой // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2019. Т. 62, № 3-4. С. 133 – 138.

15. Рахмонов З. Х., Аминов А. С. О нулях нечетного порядка функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В.А.Садовничего. 2019. Издательство «МАКС Пресс». ISBN: 978-5-317-06116-6. С. 522 – 525.

16. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А., Аминов А. С. Нули функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, В. 4. С. 271 – 293.

17. Heath Brown D.R. The fourth power moment of the Riemann zeta function // Proceedings of the London Mathematical Society. 1979. V. s3-38. Is. 3. P. 385 – 422,

18. Zhan Tao. On the mean square of Dirichlet L-functions // Acta Mathematica Sinica June. 1992. V. 8. Is. 2.P. 204 – 224

19. Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана // УМН. 1994. Т. 49. Вып. 1. С. 161 – 162.

20. Bourgain J., Watt N. Decoupling for perturbed cones and mean square of // arXiv:1505.04161v1 [math.NT]. 15 May 2015.

21. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2006. Т. 49. № 5. С. 393 – 400.

22. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 1. С. 5 – 15.

23. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой // Вестник Таджикского национального университета. Спецвыпуск посвящён году образования и технических знаний. 2010. С. 35 – 41.

24. Марджанашвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // Доклды АН СССР. 1939. Т. 22, № 22. С. 391 - 393.

25. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Москва, Наука, 1971.

26. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм // М.: Наука. 1987 г. 368 с.

27. Graham S. W., Kolesnik G. Van der Corput's method of exponential sums // London Mathematical Society Lecture Note Series 126, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. vi+120 pp.

28. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.:, Наука, 1983.

REFERENCES

1. Huxley, M. N. 1972, "On the differences between consecutive primes", *Inventiones mathematicae*, vol. 15, pp. 164 – 170.

2. Karatsuba, A. A. 1990, "The distribution of prime numbers", *Russian Math. Surveys*, vol. 45, Is. 5, pp. 99 – 171.

3. Gritsenko, S. A. 1992, "On a density theorem", *Math. Notes,*, vol. 51, Is. 6, pp. 553 – 558.

4. Selberg, A. 1942, "On the zeros Riemann zeta function", *Shr. Norske Vid. Akad. Oslo*, vol. 10, pp. 1 – 59.

5. Karatsuba, A. A. 1984, "On the zeros of the function $\zeta(s)$ On short intervals of the critical line", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 24, Is. 3, pp. 523 – 537.

6. Karatsuba, A. A. 1986, "On the zeros of the function $\zeta(s)$ in the neighborhood of the critical line", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 26, Is. 2, pp. 307 – 313.

7. Karatsuba, A. A. 1985, A. A. Karatsuba, "The Riemann zeta function and its zeros", *Russian Math. Surveys*, vol. 40, Is. 5, pp. 23 – 82.

8. Voronin, S. M., & Karatsuba, A. A. 1994, *The Riemann zeta function*, Fiziko-Matematicheskaya Literatura, Moscow, 376 p. ISBN: 5-02-014120-8.

9. Karatsuba, A. A. 1990, "On the zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 36, Is. 2, pp. 311 – 324.

10. Karatsuba, A. A. 1994, "On the zeros of arithmetic Dirichlet series without Euler product", *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, vol. 43, Is. 2, pp. 193–203.

11. Karatsuba, A. A. 1995, "A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 163–177.

12. Rakhmonov, Z. Kh. 2006, "Zeros of the Riemann zeta function in short intervals of the critical line", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 7, Is. 1(17), pp. 263-269.

13. Nematova, G. D, & Khasanov, Z. N. 2001, "On the zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 44, no. 3-4, pp. 4 – 7.

14. Rakhmonov, Z. Kh., & Aminov, A. S. 2019, "On the zeros of an odd order of the Davenport-Heilbron function in short intervals of the critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 62, no. 3-4, pp. 133 – 138.

15. Rakhmonov, Z. Kh., & Aminov, A. S. 2019, "On the zeros of an odd order of the Davenport-Heilbron function in short intervals of the critical line", *Modern Problems of Mathematics and Mechanics. Proceedings of the International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Academician of the Russian Academy of Sciences V.A. Sadovnichy*, Publishing House "MAX Press". ISBN: 978-5-317-06116-6, pp. 522 – 525.

16. Rakhmonov, Z.Kh., & Khayrulloev, Sh. A., & Aminov, A. S. 2019, "Zeros of the Davenport–Heilbronn function in short intervals of the critical line", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 20, Is. 4, pp. 306 – 329.

17. Heath Brown D.R. 1979, "The fourth power moment of the Riemann zeta function", *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s3-38, Is. 3, pp. 385 – 422.

18. Zhan Tao, 1992, "On the mean square of Dirichlet L-functions", *Acta Mathematica Sinica*, vol. 8, Is. 2, pp. 204 – 224.

19. Rakhmonov, Z. Kh. 1994, "Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function", *Russian Math. Surveys*, vol. 49, is. 2, pp. 168 – 169.

20. Bourgain, J., & Watt, N. 2015, "Decoupling for perturbed cones and mean square of $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$", *arXiv:* 1505.04161v1 [math.NT]. 15 May 2015.

21. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2006, "Distance between the next zeros of Riemann's zeta-function in the critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 49, no. 5, pp. 393 – 400.

22. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2009, "The neibour zero of the Riemann's zeta-function laying on a critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 52, no. 5, pp. 331 – 337.

23. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2010, "On the zeros of the Riemann zeta function on the critical line", *The Bulletin of the Tajik National University*, Special issue dedicated to the year of education and technical knowledge, pp. 35 – 41.

24. Mardjhanashvili, K. K. 1939, "An estimate for an arithmetic sum", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, no 7, pp. 391 – 393.

25. Vinogradov, I. M. 1971, *The method of trigonometric sums in the theory of numbers*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1971. 159 pp.

26. Arkhipov, G. I. & Chubarikov, V. N. & Karatsuba, A. A. 2004. *Trigonometric sums in number theory and analysis*, Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 554 p.

27. Graham, S. W., & Kolesnik, G. 1991, *Van der Corput's method of exponential sums*, London Mathematical Society Lecture Note Series 126, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. vi+120 pp.

28. Karatsuba A. A. 1993, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, xiv+222 pp.

Получено: 09.10.2025
Принято в печать: 08.12.2025