ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-110-136

Задача Гельфонда для разложений по линейным рекуррентным последовательностям

А. А. Жукова, А. В. Шутов

Жукова Алла Адольфовна — кандидат физико-математических наук, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Владимирский филиал) (г. Владимир).
e-mail: georg967@mail.ru
Шутов Антон Владимирович — доктор физико-математических наук, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).
e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Гельфонд получил результат о равномерной распределенности сумм цифр b-ичных разложений натуральных чисел по классам вычетов по произвольному модулю d. Позднее Ламбергер и Тусвальднер, используя глубокие оценки тригонометрических сумм, получили налог теоремы Гельфонда, в котором вместо b-ичных разложений используются разложения по линейным рекуррентным последовательностям, удовлетворяющим условию Парри и некоторому дополнительному условию на коэффициенты. В статье мы даем новое, более простое и самозамкнутое доказательство теоремы Ламбергера – Тусвальднера. Наше доказательство носит чисто комбинаторный характер и требует только условия Парри. Кроме того, мы даем достаточно простую явную формулу для показателя степени в остаточном члене. В отличие от результата Ламбергера – Тусвальднера, полученный нами показатель зависит только от d и порядка линейной рекуррентной последовательности, но не от ее коэффициентов. Однако наш результат не включает равнораспределенность по модулю d сумм цифр натуральных чисел, пробегающих арифметические прогрессии, что также было доказано Ламбергером и Тусвальднером.

В конце работы кратко обсуждаются некоторые нерешенные задачи.

Ключевые слова: системы счисления, линейные рекуррентные последовательности, суммы цифр, задача Гельфонда.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Жукова А. А., Шутов А. В. Задача Гельфонда для разложений Островского по линейным рекуррентным последовательностям // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 110–136.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-110-136

Gelfond's problem for expansions in linear recurrent bases

A. A. Zhukova, A. V. Shutov

Zhukova Alla Adolfovna — candidate of physical and mathematical sciences, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Vladimir branch) (Vladimir).
e-mail: georg967@mail.ru
Shutov Anton Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolai Grigorievich Stoletov (Vladimir).
e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

Gelfond obtained a result on the uniform distribution of sums of digits of b-ary expansions of natural numbers over residue classes modulo d for an arbitrary d. Later, Lamberger and Thuswaldner, using deep estimates of trigonometric sums, obtained an analogue of Gelfond's theorem, in which instead of b-ary expansions, expansions over linear recurrent bases satisfying the Parry condition and some additional condition on the coefficients, are used. In this paper, we give a new, simpler and self-contained, proof of the Lamberger-Tkuswaldner theorem. Our proof is purely combinatorial and require only Parry condition. In addition, we give a quite simple explicit formula for the exponent in the remainder term. In contrast to the Lamberger-Thuswaldner result, obtained exponent depends only on d and the order of the linear recurrent sequence, but not on its coefficients. However, our result does not include the equidistribution of the sums of the digits modulo d of natural numbers running from an arbitrary arithmetic progression, which was also proved by Lamberger and Thuswaldner.

At the end of the paper, some unsolved problems are briefly discussed.

Keywords: numeration systems, linear recurrent sequences, sums of digits, Gelfond problem.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
Zhukova, A. A., Shutov, A. V. 2025, “Gelfond's problem for Ostrovsky expansions in linear recurrent sequences” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 110–136.

1. Введение

Пусть

$$n = \sum_{i=0}^{b(n)} b_i(n) b^k,$$

где $b_i(n) \in \{0, 1 \ldots, b-1\}$, $b(n) = \max\{k : b^k \leq n\}$ – разложение n в b-ичной системе счисления. Пусть

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \sharp \left\{ m < X : \sum_{i=0}^{b(m)} b_i(n) \equiv a \pmod{d} \right\}$$

– количество натуральных чисел, не превосходящих X, для которых сумма цифр b-ичного разложения принадлежит заданному классу вычетов по модулю d. Известно, что при условии взаимной простоты d и $b-1$ существует постоянная $\mu < 1$ (зависящая от b) такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \frac{X}{d} + O(n^{\mu}).$$

Данный результат был доказан Файном [1] в случае, когда d – простое число и А.О. Гельфондом [2] в общем случае.

Данный результат в дальнейшем изучался во многих направлениях. Среди них можно выделить перенос результатов на случай, когда рассматриваются суммы цифр разложений чисел, пробегающих некоторую последовательность (например, в упомянутых работах Файна и Гельфонда m могло также пробегать арифметическую прогрессию), изучение совместного распределения сумм цифр нескольких натуральных чисел (см., например [3]), изучение аналогов задачи Гельфонда для разложений по линейным рекуррентным последовательностям.

Рассмотрим класс линейных рекуррентных последовательностей $\{T_n\}$, удовлетворяющих условиям:

1. $\{T_n\}$ является линейной рекуррентной последовательностью порядка r, то есть существуют целые числа $a_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i < r)$ и $a_r > 0$ такие, что для каждого $n \geqslant 0$

$$T_{n+r} = a_1 T_{n+r-1} + a_2 T_{n+r-2} + \ldots + a_r T_n. \tag{1}$$

2. Начальные условия определяются следующим образом:

$$T_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad T_n \geqslant a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_n T_0 + 1$$
$$\text{при} \qquad 1 \leqslant n < r. \tag{2}$$

3. Коэффициенты a_1, a_2, ..., a_r удовлетворяют условию Парри [4], то есть

$$(a_s, a_{s+1}, \ldots, a_r) \preccurlyeq (a_1, a_2, \ldots, a_{r-s+1}) \tag{3}$$

для $1 < s \leqslant d$, где $\preccurlyeq$ обозначает лексикографический порядок.

Замечание 1. *Условие Парри для последовательности $\{T_n\}$ может быть переписано следующим образом: при всех $n \geqslant 0$ и $1 \leqslant k < r$ справедливо неравенство*

$$T_{n+r-k} > \sum_{i=k+1}^{r} a_i T_{n+r-i}.$$

Любое натуральное число N можно представить в виде

$$N = \sum_{i=0}^{t(N)} t_i(N) T_i, \tag{4}$$

где $t(N) = \max\{i : T_i \leqslant N\}$, $t_i(N) \in \mathbb{Z}$, $t_i(N) \geqslant 0$, причем коэффициенты $t_i(N)$ подбираются так, что для любого $i \geqslant 0$ было справедливо неравенство

$$0 \leqslant N - \sum_{h=i}^{t(N)} t_h(N) T_h < T_i. \tag{5}$$

Данное условие означает, что разложение (4) получается по жадному алгоритму.

Различные задачи о суммах цифр подобных разложений изучались, в частности, в [5]–[8]. Нас будет интересовать аналог задачи Гельфонда.

Пусть $N_{d,a}^{(T)}(X)$ — количество натуральных чисел, меньших X, для которых сумма коэффициентов разложения (4) с условием (5) сравнима с a по модулю d, то есть

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \sharp \left\{ m < X : \sum_{i=0}^{t(m)} t_i(m) \equiv a \pmod d \right\}.$$

Нас интересуют асимптотические результаты вида

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \frac{X}{d} + O(n^{\mu}).$$

Подобный результат впервые был получен при $d = 2$ в работе [9]. Некоторые более тонкие результаты об остаточном члене можно найти в [10]. В случае простейшей линейной рекуррентной последовательности – последовательности Фибоначчи, еще более тонкие результаты содержатся в [11].

Общий результат об аналоге задачи Гельфонда для произвольного d при дополнительном условии взаимной простоты d и $a_1 + \ldots + a_r - 1$ был получен в фундаментальной работе [12]. Более того, в ней был получен ряд других важных результатов, в частности, был рассмотрен аналог задачи Гельфонда в случае, когда числа пробегают арифметическую прогрессию.

В основе доказательства из [12] лежал глубокий и имеющие многочисленные приложения результат об оценке тригонометрической суммы $\sum_{m<X} e^{2\pi i(\frac{a}{b}\sum_{i=0}^{t(m)} t_i(m)+ym)}$, доказательство которого, среди прочего, использовало сложные результаты из [13].

Отметим, что константа μ в результатах из [9] и [12] зависела от d и линейной рекуррентной последовательности. В случае $d = 2$ методами из [9] и [10] можно получить достаточно простое описание константы μ в виде отношения логарифмов максимумов модулей некоторых явно выписываемых алгебраических уравнений. В случае произвольного d работа [12] по сути тоже содержит некоторый эффективный алгоритм вычисления константы μ, однако этот алгоритм чрезвычайно сложен (даже его описание заняло бы несколько страниц) и не был реализован ни для одной линейной рекуррентной последовательности.

В настоящей работе мы даем новое, более простое, доказательство аналога теоремы Гельфонда в случае разложений по линейным рекуррентным последовательностям. Наше доказательство носит чисто комбинаторный характер и не использует оценок тригонометрических сумм. Кроме того, оно позволяет получить достаточно простую формулу для показателя степени в остаточном члене. Более того, наш результат, в отличие от [12], не требует условия d и $a_1 + \ldots + a_r - 1$, а показатель степени остаточного члена зависит только от модуля d и порядка линейного рекуррентного соотношения, но не зависит от самого соотношения.

2. Основной текст статьи

Положим $\varepsilon_{d,a}(m)$ равным единице, если сумма цифр соответствующего разложения m сравнима с a по модулю d, и равным $-\frac{1}{d-1}$ в противном случае, то есть

$$\varepsilon_{d,a}(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i=0}^{t(m)} t_i(m) \equiv a \pmod d, \\ -\frac{1}{d-1}, & \text{если } \sum\limits_{i=0}^{t(m)} t_i(m) \not\equiv a \pmod d. \end{cases}$$

Лемма 1. *Имеет место явная формула*

$$N_{d,a}^{(T)}(X)=\sum_{m=0}^{X-1}\left(\varepsilon_{d,a}(m)+\frac{1}{d-1}\right)\cdot\frac{d-1}{d}.$$

Справедливость данного утверждения следует из определения $\varepsilon_{d,a}(m)$.

Определим величины

$$S_{d,a}(X)=\sum_{m=0}^{X-1}\varepsilon_{d,a}(m)\qquad\text{и}\qquad S_{d,a}^*(n)=S_{d,a}(T_n)=\sum_{m=0}^{T_n-1}\varepsilon_{d,a}(m).$$

Для $S_{d,a}^*(n)$ справедлива лемма.

Лемма 2. *Имеет место явная формула*

$$\sum_{a=0}^{d-1}S_{d,a}^*(n)=0.$$

Доказательство. Из определения $\varepsilon_{d,a}(m)$ следует очевидное равенство $\sum\limits_{a=0}^{d-1}\varepsilon_{d,a}(m)=0$, поэтому в силу определения $S_{d,a}^*(n)$ получаем

$$\sum_{a=0}^{d-1}S_{d,a}^*(n)=\sum_{a=0}^{d-1}\sum_{m=0}^{T_n-1}\varepsilon_{d,a}(m)=\sum_{m=0}^{T_n-1}\sum_{a=0}^{d-1}\varepsilon_{d,a}(m)=0.$$

Лемма 2 доказана.

Обозначим через $H(n+r)$ множество целых неотрицательных чисел, меньших T_{n+r}, то есть

$$H(n+r)=\left\{m:\, m\in\mathbb{Z},\, 0\leqslant m<T_{n+r}\right\}.$$

Из условий (1) и (3) следует, что $a_1\geqslant 1$, $a_r\geqslant 1$ и $a_s\geqslant 0$ при $1<s<r$, поэтому можно утверждать:

$$0<a_1T_{n+r-1}\leqslant\sum_{h=1}^{2}a_hT_{n+r-h}\leqslant\sum_{h=1}^{3}a_hT_{n+r-h}\leqslant\ldots\leqslant\sum_{h=1}^{r-1}a_hT_{n+r-h}<\sum_{h=1}^{r}a_hT_{n+r-h}.$$

Разобьем множество $H(n+r)$ на непересекающиеся подмножества $H^s(n+r)$ следующим образом:

$$\begin{gathered}H^1(n+r)=\left\{m:\, m\in\mathbb{Z},\ 0\leqslant m<a_1T_{n+r-1}\right\};\\ H^s(n+r)=\varnothing,\ \text{если}\ \ a_s=0\ \ \text{и}\ \ 1<s<r;\\ H^s(n+r)=\left\{m:\, m\in\mathbb{Z},\ \sum_{h=1}^{s-1}a_hT_{n+r-h}\leqslant m<\sum_{h=1}^{s}a_hT_{n+r-h}\right\},\text{если}\ \ a_s\neq 0\ \ \text{и}\ \ 2\leqslant s\leqslant r.\end{gathered}\tag{6}$$

Возможны два случая: $a_1>1$ и $a_1=1$. При $a_1>1$ промежуток $0\leqslant m<a_1T_{n+r-1}$ разделим на a_1 частей и введем множества

$$H_j^1(n+r)=\left\{m:\, m\in\mathbb{Z},\, (j-1)T_{n+r-1}\leqslant m<jT_{n+r-1}\right\},\tag{7}$$

где $1\leqslant j\leqslant a_1$. Если $a_1=1$, то будем полагать $H_1^1(n+r)=H^1(n+r)$.

Для каждого непустого множества $H^s(n+r)$ также рассмотрим два случая: $a_s > 1$ и $a_s = 1$. В том случае, когда $a_s > 1$ множество $H^s(n+r)$ разобьем на a_s подмножеств $H^s_j(n+r)$:

$$H^s_j(n+r) = \left\{ m : m \in \mathbb{Z}, \sum_{h=1}^{s-1} a_h T_{n+r-h} + (j-1)T_{n+r-s} \leqslant m < \sum_{h=1}^{s-1} a_h T_{n+r-h} + jT_{n+r-s} \right\},$$

где $1 \leqslant j \leqslant a_s$. При $a_s = 1$ будем считать, что $H^s_1(n+r) = H^s(n+r)$.

Очевидно, что у всех чисел $m \in H(n+r)$, а, следовательно, у $m \in H^s(n+r)$, где $1 \leqslant s \leqslant r$, а также и $m \in H^s_j(n+r)$, где $1 \leqslant s \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant a_s$, при $h \geqslant n+r$ все коэффициенты разложения (4) равны нулю, то есть $t_h(m) = 0$ при $h \geqslant n+r$, поэтому условие (5) можно записать как

$$0 \leqslant m - \sum_{h=i}^{n+r-1} t_h(m) T_h < T_i \tag{8}$$

при всех $0 \leqslant i \leqslant n+r-1$.

Лемма 3. *Если $m \in H^1_j(n+r)$, где $1 \leqslant j \leqslant a_1$, то в разложении (4) числа m коэффициент $t_{n+r-1}(m)$ равен $j-1$. Если $m \in H^s_j(n+r)$, где $2 \leqslant s \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant a_s$, и $H^s(n+r) \neq \varnothing$, то в представлении (4) числа m будут следующие коэффициенты: $t_{n+r-1}(m) = a_1, \ldots, t_{n+r-s+1}(m) = a_{s-1}$, $t_{n+r-s}(m) = j-1$.*

Утверждение леммы 3 получается из определения множества $H^s_j(n+r)$ и условия (8).

Лемма 4. *Пусть $t_i(m)$ — коэффициенты разложения числа m по последовательности $\{T_n\}$. Если $0 \leqslant k < a_i$ (при $1 \leqslant i \leqslant r$), $0 \leqslant m' < T_{n+r-i}$ и $n \geqslant 0$, то для*

$$m = \sum_{h=1}^{i-1} a_h T_{n+r-i} + kT_{n+r-i} + m'$$

выполняются равенства

$$\begin{aligned} &t_l(m) = t_l(m') \quad \text{при} \quad 0 \leqslant l < n+r-i,\\ &t_{n+r-i}(m) = k,\\ &t_l(m) = a_{n+r-l} \quad \text{при} \quad n+r-i < l < n+r. \end{aligned}$$

Кроме того, для произвольного m_0 и $j \leqslant L = t(m_0)$, $k < t_j(m_0)$ и $m' < T_j$, то для

$$m = t_L(m_0)T_L + t_{L-1}(m_0)T_{L-1} + \ldots + t_{j+1}(m_0)T_{j+1} + kT_j + m'$$

справедливы равенства

$$\begin{aligned} t_l(m) &= t_l(m') \quad \text{при} \quad 0 \leqslant l < j,\\ t_j(m) &= k,\\ t_l(m) &= t_l(m_0) \quad \text{при} \quad j < l \leqslant L. \end{aligned}$$

Замечание 2. *Данное утверждение с дополнительным условием о взаимной простоте ненулевых коэффициентов a_i сформулировано и доказано в статье [8] (лемма 3.2), причем при доказательстве этой леммы авторы условие взаимной простоты ненулевых a_i не использовали.*

Обозначим $I = \{s : 1 \leqslant s \leqslant r, a_s \neq 0\}$, $P_s = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i$, $P_0 = 0$, $a \ominus l = (a-l)\mathrm{mod} d$, то есть $a \ominus l$ — единственное целое g такое, что $0 \leqslant g < d$ и $g \equiv a - l \pmod d$.

Лемма 5. *При всех $n \geqslant 0$ имеет место рекуррентное соотношение*

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s\in I}\sum_{j=1}^{a_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s). \tag{9}$$

Доказательство. Согласно определению

$$S^*_{d,a}(n+r) = S_{d,a}(T_{n+r}) = \sum_{m=0}^{T_{n+r}-1} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{m\in H(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m).$$

Множество $H(n+r)$ можно представить как объединение непересекающихся подмножеств $H^s(n+r)$, где $1 \leqslant s \leqslant r$, некоторые из которых могут быть пустыми, поэтому, учитывая (6), имеем:

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s\in I}\sum_{m\in H^s(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{m\in H^1(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m) + \sum_{\substack{s\in I,\\ s>1}}\sum_{m\in H^s(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m). \tag{10}$$

Возможны два случая: $a_1 = 1$ и $a_1 > 1$. Если $a_1 = 1$, то по определению $H^1(n+r) = H^1_1(n+r)$.

Если $a_1 > 1$, то $H^1(n+r)$ представим как объединение непересекающихся множеств $H^1_j(n+r)$, где $1 \leqslant j \leqslant a_1$, определяемых как (7). Пусть $m \in H^1_j(n+r)$, где $2 \leqslant j \leqslant a_1$. Будем полагать, что сумма коэффициентов разложения (4) числа m сравнима с a по модулю d, то есть $\sum\limits_{i=0}^{t(m)} t_i(m) \equiv a \pmod d$. Согласно лемме 4, для каждого $m \in H^1_j(n+r)$, где $2 \leqslant j \leqslant a_1$, найдется $m' \in H^1_1(n+r)$ такое, что

$$\sum_{i=0}^{t(m)} t_i(m) - \sum_{i=0}^{t(m')} t_i(m') = t_{n+r-1}(m) = j-1,$$

в соответствии с утверждением леммы 3. В таком случае сумма коэффициентов разложения (4) числа m' будет сравнима с $a-(j-1)$ по модулю d, то есть $\sum\limits_{i=0}^{\infty} t_i(m') \equiv a-(j-1) \pmod d$. В силу определения $\varepsilon_{d,a}(m)$ и того, что $m \in H^1_j(n+r)$, где $2 \leqslant j \leqslant a_1$, а $m' \in H^1_1(n+r)$, можно утверждать, что $\varepsilon_{d,a}(m) = \varepsilon_{d,a\ominus(j-1)}(m')$ или $\varepsilon_{d,a}(m) = \varepsilon_{d,a\ominus(P_0+(j-1))}(m')$.

В таком случае, при $a_1 \geqslant 1$ первое слагаемое в формуле (10) примет вид

$$\sum_{m\in H^1(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{j=1}^{a_1}\sum_{m\in H^1_j(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{j=1}^{a_1}\sum_{m=0}^{T_{n+r-1}-1} \varepsilon_{d,a\ominus(P_0+(j-1))}(m') =$$

$$= \sum_{j=1}^{a_1} S^*_{d,a\ominus(P_0+(j-1))}(n+r-1). \tag{11}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое суммы из формулы (10). Пусть $H^s(n+r) \neq \varnothing$ и сумма коэффициентов представления (4) числа $m \in H^s_j(n+r)$, где $2 \leqslant s \leqslant r$ и $1 \leqslant j \leqslant a_s$, сравнима с a по модулю d. Тогда согласно лемме 4 в множестве $H^1_1(n+r-s+1)$ найдется число m' такое, что

$$\sum_{i=0}^{t(m)} t_i(m) - \sum_{i=0}^{t(m')} t_i(m') = \sum_{i=n+r-s}^{n+r-1} t_i(m).$$

Воспользуемся утверждением леммы 3 для $m \in H_j^s(n+r)$ и получим, что

$$\sum_{i=n+r-s}^{n+r-1} t_i(m) = \sum_{i=1}^{s-1} a_i + (j-1) = P_{s-1} + (j-1).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{t(m')} t_i(m') \equiv a - (P_{s-1} + (j-1)) \pmod{d}.$$

Вновь воспользуемся определением $\varepsilon_{d,a}(m)$ и получим, что если $m \in H_j^s(n+r)$, а $m' \in H_1^1(n+r-s+1)$, то $\varepsilon_{d,a}(m) = \varepsilon_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(m')$ при всех $2 \leqslant s \leqslant r$, $s \in I$ и $1 \leqslant j \leqslant a_s$.

В таком случае, второе слагаемое равенства (10) может быть представлено как

$$\sum_{\substack{s\in I,\\ s>1}} \sum_{m\in H^s(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{\substack{s\in I,\\ s>1}} \sum_{j=1}^{a_s} \sum_{m'\in H_1^1(n+r-s+1)} \varepsilon_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(m') =$$

$$= \sum_{\substack{s\in I,\\ s>1}} \sum_{j=1}^{a_s} S_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(T_{n+r-s}) = \sum_{\substack{s\in I,\\ s>1}} \sum_{j=1}^{a_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s). \quad (12)$$

Подставляя равенства (2) и (2) в формулу (10), приходим к выводу, что

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s\in I} \sum_{j=1}^{a_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s).$$

Таким образом, лемма 5 полностью доказана.

По условию коэффициенты a_s не ограничены сверху, поэтому число слагаемых во внутренней сумме (9) может быть любым. Воспользуемся леммой 2 и ограничим число слагаемых в сумме по j в равенстве (9). Будем полагать

$$a'_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad a_s = 0, \\ a_s \text{mod} d & \text{при} \quad a_s \not\equiv 0 \pmod{d}, \\ d & \text{при} \quad a_s \neq 0 \text{ и } a_s \equiv 0 \pmod{d}. \end{cases} \quad (13)$$

Из леммы 5 вытекает следующий результат.

Лемма 6. *При всех $n \geqslant 0$ имеет место рекуррентное соотношение*

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s\in I} \sum_{j=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $a_s \geqslant 1$ тогда представим a_s как $kd + a'_s$, где $k \geqslant 0$. В этом случае

$$\sum_{j=1}^{a_s} S^*_{d,a\ominus j}(m) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{l=id+1}^{(i+1)d} S^*_{d,a\ominus l}(m) + \sum_{l=kd+1}^{kd+a'_s} S^*_{d,a\ominus l}(m) = \sum_{l=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus l}(m),$$

так как из леммы 2 следует, что $\sum\limits_{l=id+1}^{(i+1)d} S^*_{d,a\ominus l}(m) = \sum\limits_{l=1}^{d} S^*_{d,a\ominus l}(m) = 0$.

Из последнего равенства и рекуррентной формулы (9) следует утверждение леммы 6.

В соотношении (14) a может принимать любое значение из множества $\{0, 1, \dots, d-1\}$. Очевидно, что $a \ominus (P_{s-1} + (j-1))$, где $j \in \{1, 2, \dots, a'_s\}$, пробегает некоторое подмножество множеста $\{0, 1, \dots, d-1\}$, поэтому при $n \geqslant 1$ к слагаемому $S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-1)$ можно применить равенство (14), и, следовательно, выразить $S^*_{d,a}(n+r)$ через $S^*_{d,a}(n+r-s)$, где $2 \leqslant s \leqslant r+1$. Если $n \geqslant 2$, то воспользовавшись соотношением (14) для слагаемого $S^*_{d,a}(n+r-2)$, сможем представить $S^*_{d,a}(n+r)$ через $S^*_{d,a}(n+r-s)$, где $3 \leqslant s \leqslant r+2$. Выполняя это преобразование конечное число раз (k раз) при $n \geqslant k$ можно получить выражение для $S^*_{d,a}(n+r)$ через $S^*_{d,a}(n+r-k-s)$, где $1 \leqslant s \leqslant r$. Выразить этот итерационный процесс с помощью рекуррентной формулы можно, если равенство (14) переписать как

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{l=0}^{d-1} \xi^s_{l,0}(n+r) S^*_{d,a\ominus l}(n+r-s), \tag{15}$$

где

$$\xi^s_{l,0}(n+r) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad s \in \overline{I}, \text{ или, если } s \in I \text{ и } a'_s \leqslant l \ominus P_{s-1} < d, \\ 1 & \text{если} \quad s \in I \text{ и } 0 \leqslant l \ominus P_{s-1} < a'_s. \end{cases} \tag{16}$$

Лемма 7. *Для любого целого $k \geqslant 0$ и $n \geqslant k$ справедливо равенство*

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{l=0}^{d-1} \xi^s_{l,k}(n+r) S^*_{d,a\ominus l}(n+r-k-s), \tag{17}$$

где

$$\xi^s_{l,k+1}(n+r) = \begin{cases} \chi_1(s) \sum\limits_{j=1}^{a'_s} \xi^1_{l\ominus(P_{s-1}+(j-1)),k}(n+r) + \xi^{s+1}_{l,k}(n+r) \ \text{при } 1 \leqslant s < r, \\ \sum\limits_{j=1}^{a'_r} \xi^1_{l\ominus(P_{r-1}+(j-1)),k}(n+r) \ \text{при } s = r, \end{cases} \tag{18}$$

$$\chi_1(s) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad s \in I, \\ 0 & \text{если} \quad s \in \overline{I}. \end{cases} \tag{19}$$

Кроме того, коэффициенты $\xi^s_{l,k}(n)$, где $1 \leqslant s \leqslant r$, неотрицательны при всех $k \geqslant 0$.

Доказательство. Доказательство проведем, используя индукцию по k. При $k = 0$ равенство (17) полностью совпадает с (15).

Предположим, что утверждение леммы верно при $k = m$, то есть

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{l=0}^{d-1} \xi^s_{l,m}(n+r) S^*_{d,a\ominus l}(n+r-m-s). \tag{20}$$

Распишем $S^*_{d,a\ominus l}(n+r-m-1)$, пользуясь равенством (14), как

$$S^*_{d,a\ominus l}(n+r-m-1) = \sum_{s\in I} \sum_{j=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus l\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-m-s-1)$$

и подставим в (20). Имеем:

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{l=0}^{d-1} \xi^1_{l,m}(n+r) \sum_{s\in I} \sum_{j=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus l\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-m-s-1) +$$

$$+\sum_{s=2}^{r}\sum_{l=0}^{d-1}\xi^s_{l,m}(n+r)S^*_{d,a\ominus l}(n+r-m-s).$$

Введем характеристическую функцию (19) для множества I, изменим порядок суммирования в первой части суммы и начнем суммирование с $s=1$ во второй части суммы. Получаем

$$S^*_{d,a}(n+r)=\sum_{s=1}^{r}\sum_{l=0}^{d-1}\chi_1(s)\sum_{j=1}^{a'_s}\xi^1_{l,m}(n+r)S^*_{d,a\ominus l\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-m-s-1)+$$

$$+\sum_{s=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{d-1}\xi^{s+1}_{l,m}(n+r)S^*_{d,a\ominus l}(n+r-m-s-1).$$

Обозначим $a\ominus l\ominus(P_{s-1}+(j-1))$ как $a\ominus l$ и перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$S^*_{d,a}(n+r)=\sum_{s=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{d-1}\left(\chi_1(s)\sum_{j=1}^{a'_s}\xi^1_{l\ominus(P_{s-1}+(j-1)),m}(n+r)+\xi^{s+1}_{l,m}(n+r)\right)\cdot S^*_{d,a\ominus l}(n+r-m-s-1)+$$

$$+\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{j=1}^{a'_r}\xi^1_{l\ominus(P_{r-1}+(j-1)),m}(n+r)S^*_{d,a\ominus l}(n-m-1). \qquad (21)$$

Введем обозначения:

$$\xi^s_{l,m+1}(n+r)=\chi_1(s)\sum_{j=1}^{a'_s}\xi^1_{l\ominus(P_{s-1}+(j-1)),m}(n+r)+\xi^{s+1}_{l,m}(n+r),$$

где $1\leqslant s<r$, и

$$\xi^r_{l,m+1}(n+r)=\sum_{j=1}^{a'_r}\xi^1_{l\ominus(P_{r-1}+(j-1)),m}(n+r).$$

В этом случае равенство (2) будет полностью совпадать с утверждением леммы 7 при $k=m+1$. Следовательно, равенство (17) справедливо при всех $k\geqslant 0$. Неотрицательность коэффициентов $\xi^s_{l,k}(n+r)$ следует из неотрицательности $\xi^s_{l,0}(n+r)$ и равенств (18).

Выясним, какими свойствми обладает соотношение (17). Для этого обозначим

$$A^s_k(n+r)=\sum_{l=0}^{d-1}\xi^s_{l,k}(n+r).$$

Из равенств (13) и (16) следует, что

$$A^s_0(n+r)=a'_s \qquad \text{для всех} \qquad 1\leqslant s\leqslant r. \qquad (22)$$

Лемма 8. *Справедливы следующие рекуррентные соотношения*

$$A^s_k(n+r)=a'_sA^1_{k-1}(n+r)+A^{s+1}_{k-1}(n+r) \qquad \text{при} \qquad 1\leqslant s<r$$

и $A^r_k(n+r)=a'_rA^1_{k-1}(n+r)$.

Доказательство. Воспользуемся определением $A_k^s(n+r)$ и равенствами (18) для получения доказываемого соотношения. При $1 \leqslant s < r$ имеем

$$A_k^s(n+r) = \sum_{l=0}^{d-1} \xi_{l,k}^s(n+r) = \chi_1(s) \sum_{j=1}^{a'_s} \sum_{l=0}^{d-1} \xi^1_{l \ominus (P_{s-1}+(j-1)),k-1}(n+r) + \sum_{l=0}^{d-1} \xi^{s+1}_{l,k-1}(n+r) =$$

$$= \chi_1(s) \sum_{j=1}^{a'_s} A^1_{k-1}(n+r) + A^{s+1}_{k-1}(n+r) = a'_s A^1_{k-1}(n+r) + A^{s+1}_{k-1}(n+r).$$

Если $s = r$, то

$$A_k^r(n+r) = \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{j=1}^{a'_r} \xi^1_{l \ominus (P_{r-1}+(j-1)),k-1}(n+r) = \sum_{j=1}^{a'_r} A^1_{k-1}(n+r) = a'_r A^1_{k-1}(n+r).$$

Таким образом, лемма 8 доказана.

Перейдем к получению оценки сверху для $A_k^s(n+r)$.

Лемма 9. *При всех $1 \leqslant s \leqslant r$ справедливо неравенство*

$$A_k^s(n+r) \leqslant (d+1)^{k+1}. \tag{23}$$

Доказательство. Проведем доказательство неравенства, используя метод математической индукции. При $k = 0$, согласно определению $A_0^s(n+r)$, для всех $1 \leqslant s \leqslant r$, имеем: $A_0^s(n+r) = a'_s \leqslant d \leqslant d+1$. Значит, при $k = 0$ неравенство (23) выполняется.

Предположим, что утверждение леммы 9 справедливо при $k = m$, то есть для любых $1 \leqslant s \leqslant r$: $A_m^s(n+r) \leqslant (d+1)^{m+1}$. Воспользуемся леммой 8, чтобы получить оценку для $A_{m+1}^s(n+r)$. Если $1 \leqslant s < r$, то

$$A_{m+1}^s(n+r) = a'_s A_m^1(n+r) + A_m^{s+1}(n+r) \leqslant d(d+1)^{m+1} + (d+1)^{m+1} = (d+1)^{m+2}.$$

В том случае, когда $s = r$, получаем

$$A_{m+1}^s(n+r) = a'_r A_m^1(n+r) \leqslant d(d+1)^{m+1} \leqslant (d+1)^{m+2}.$$

Значит, при $k = m+1$ неравенство (23) также выполняется, что доказывает справедливость леммы 9 при всех целых неотрицательных k.

Теперь выясним, как связаны между собой члены рекуррентной последовательности $\{T_n\}$ и $A_k^s(n+r)$.

Лемма 10. *При всех $0 \leqslant k \leqslant n$ справедливо неравенство*

$$T_{n+r} \geqslant \sum_{s=1}^{r} A_k^s(n+r) T_{n+r-k-s}.$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $k = 0$, в силу равенств (1), (13) и (22) можно записать, что

$$T_{n+r} = \sum_{s=1}^{r} a_s T_{n+r-s} \geqslant \sum_{s=1}^{r} a'_s T_{n+r-s} = \sum_{s=1}^{r} A_0^s(n+r) T_{n+r-s},$$

то есть при $k=0$ утверждение леммы справедливо. Предположим, что лемма 10 верна при $k=m$, где $m<n$, то есть

$$T_{n+r} \geqslant \sum_{s=1}^{r} A_m^s(n+r)T_{n+r-m-s} = A_m^1(n+r)T_{n+r-m-1} + \sum_{s=2}^{r} A_m^s(n+r)T_{n+r-m-s}.$$

Распишем $T_{n+r-m-1}$, используя равенство (1), как $T_{n+r-m-1} = \sum\limits_{s=1}^{r} a_s T_{n+r-m-s-1}$ и подставим в предыдущее неравенство. Имеем

$$T_{n+r} \geqslant A_m^1(n+r)\sum_{s=1}^{r} a_s T_{n+r-m-s-1} + \sum_{s=2}^{r} A_m^s(n+r)T_{n+r-m-s}.$$

В первой части суммы воспользуемся тем, что $a'_s \leqslant a_s$, а во второй — суммирование начнем с $s=1$. В результате получаем:

$$T_{n+r} \geqslant A_m^1(n+r)\sum_{s=1}^{r} a'_s T_{n+r-m-s-1} + \sum_{s=1}^{r-1} A_m^{s+1}(n+r)T_{n+r-m-s-1}.$$

Внесем $A_m^1(n+r)$ под знак суммы и перегруппируем слагаемые

$$T_{n+r} \geqslant \sum_{s=1}^{r-1} \left(a'_s A_m^1(n+r) + A_m^{s+1}(n+r)\right) T_{n+r-m-s-1} + a'_r A_m^1(n+r) T_{n-m-s-1}.$$

Применим утверждение леммы 8 к последнему неравенству и получим, что

$$T_{n+r} \geqslant \sum_{s=1}^{r} A_{m+1}^s(n+r)T_{n+r-m-s-1},$$

что соответствует утверждению леммы 10 при $k=m+1$. Таким образом, лемма 10 доказана.

В силу леммы 7 все $\xi_{l,k}^s(n+r)$ неотрицательны. Изучим вопрос о положительности $\xi_{l,k}^s(n+r)$. Пусть $D_k^s(n+r)$ — множество индексов l из $\{0,1,\ldots,d-1\}$ таких, что значения $\xi_{l,k}^s(n+r)$ отличны от нуля, то есть для $1 \leqslant s \leqslant r$

$$D_k^s(n+r) = \left\{l :\, \xi_{l,k}^s(n+r) > 0\right\},$$

причем из равенства (16) следует, что мощность множества $D_0^s(n+r)$ равна a'_s, то есть $\sharp D_0^s(n+r) = a'_s$.

Для двух множеств $A, B \in \{0,1,\ldots,d-1\}$ определим

$$A \ominus B = \{a \ominus b :\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Лемма 11. *При всех натуральных $k \leqslant n$ справедливы равенства*

$$D_{k+1}^s(n+r) = \bigcup_{j=1}^{a'_s} \left(D_k^1(n+r) \ominus \{P_{s-1} + (j-1)\}\right) \cup D_k^{s+1}(n+r) \quad \textit{при} \quad s \in I \quad \textit{и} \quad s<r; \quad (24)$$

$$D_{k+1}^s(n+r) = D_k^{s+1}(n+r) \quad \textit{при} \quad s \in \overline{I} \quad \textit{и} \quad s<r; \quad (25)$$

$$D_{k+1}^r(n+r) = \bigcup_{j=1}^{a'_r} \left(D_k^1(n+r) \ominus \{P_{r-1} + (j-1)\}\right). \quad (26)$$

Утверждение леммы следует из равенства (18).

Пусть $d \geqslant 3$, и обозначим $d_0 = \left[\frac{d}{2}\right]$. Перейдем к изучению первого слагаемого в равенстве (17), а именно,

$$\sum_{l=0}^{d-1} \xi^1_{l,k}(n+r) S^*_{d,a\ominus l}(n+r-k-1). \tag{27}$$

Выясним, какое число итераций необходимо сделать, чтобы к последней сумме можно было бы применить равенство из леммы 2 и уменьшить число слагаемых в (27) по крайней мере на 1.

Лемма 12. *Справедливо неравенство*

$$\sharp D^1_{k_0}(n+r) > d_0, \tag{28}$$

где

$$k_0 = r(d_0-1)+1.$$

Доказательство. Пусть

$$k'_0 = \begin{cases} \left[\frac{d_0-1}{a'_1-1}\right] & \text{при} \quad a'_1 > 1; \\ \left[\frac{2(d_0-1)}{a'_2}\right]+1 & \text{при} \quad a'_1 = 1 \quad \text{и} \quad a'_2 > 0; \\ \left[\frac{s_0(d_0-1)}{a'_{s_0}}\right]+1 & \text{при} \quad a'_1 = 1,\, a'_2 = a'_3 = \ldots = a'_{s_0-1} = 0 \quad \text{и} \quad a'_{s_0} > 0. \end{cases} \tag{29}$$

Покажем, что

$$\sharp D^1_{k'_0}(n+r) > d_0 \tag{30}$$

Вначале заметим, что из равенства (24) следует, что при всех $k \leqslant n$

$$D^1_k(n+r) \supseteq D^1_{k-1}(n+r). \tag{31}$$

Докажем три соотношения, характеризующих мощность множества $D^1_k(n+r)$ в зависимости от значений коэффициентов a'_s:

$$\sharp D^1_k(n+r) \geqslant \sharp D^1_{k-1}(n+r) + a'_1 - 1 \qquad \text{при} \qquad a'_1 > 1; \tag{32}$$

$$\sharp D^1_k(n+r) \geqslant \sharp D^1_{k-2}(n+r) + a'_2 \qquad \text{при} \qquad a'_1 = 1 \qquad \text{и} \qquad a'_2 > 0; \tag{33}$$

$$\sharp D^1_k(n+r) \geqslant \sharp D^1_{k-s_0}(n+r) + a'_{s_0} \quad \text{при} \quad a'_1 = 1,\, a'_2 = a'_3 = \ldots = a'_{s_0-1} = 0 \quad \text{и} \quad a'_{s_0} > 0. \tag{34}$$

Пусть $a'_1 > 1$, тогда согласно равенству (24), имеем:

$$D^1_k(n+r) = \bigcup_{j=1}^{a'_1} \left(D^1_{k-1}(n+r) \ominus \{P_0 + (j-1)\}\right) \cup D^2_{k-1}(n+r) \supseteq \bigcup_{j=1}^{a'_1} \left(D^1_{k-1}(n+r) \ominus \{j-1\}\right),$$

так как $P_0 = 0$. Множество $D^1_k(n+r)$ содержит a'_1 множеств: $D^1_{k-1}(n+r)$, $D^1_{k-1}(n+r) \ominus \{1\}$, $\ldots$, $D^1_{k-1}(n+r) \ominus \{a'_1 - 1\}$, причем каждое из них отличается хотя бы одним элементом от другого, поэтому неравенство (32) выполняется.

Пусть $a'_1 = 1$ и $a'_2 > 0$, тогда в соответствии с равенством (24) можно утверждать, что

$$D^1_k(n+r) = D^1_{k-1}(n+r) \cup D^2_{k-1}(n+r). \tag{35}$$

Зная, что $a_2' > 0$, можем воспользоваться равенством (24) для $D^2_{k-1}(n+r)$ и включением (31) для $D^1_{k-1}(n+r)$. Имеем

$$D^1_k(n+r) \supseteq D^1_{k-2}(n+r) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{a_2'} \left(D^1_{k-2}(n+r) \ominus \{P_1 + (j-1)\}\right) \right) \supseteq \bigcup_{j=0}^{a_2'} \left(D^1_{k-2}(n+r) \ominus \{j\}\right),$$

так как $P_1 \equiv 1 \pmod d$ при $a_1' = 1$. Последнее включение означает, что множество $D^1_k(n+r)$ содержит $a_2'+1$ множество: $D^1_{k-2}(n+r)$, $D^1_{k-2}(n+r) \ominus \{1\}$, …, $D^1_{k-2}(n+r) \ominus \{a_2'\}$, каждое из которых отличается хотя бы одним элементом. Следовательно, неравенство (33) справедливо.

Пусть $a_1' = 1$, $a_2' = a_3' = \ldots = a'_{s_0-1} = 0$ и $a'_{s_0} > 0$, тогда $s_0 - 2$ раза воспользуемся включением (31) для множества $D^1_{k-1}(n+r)$ и равенством (25) для множества $D^2_{k-1}(n+r)$ в формуле (35), и получим, что

$$D^1_k(n+r) \supseteq D^1_{k-2}(n+r) \cup D^3_{k-2}(n+r) \supseteq D^1_{k-3}(n+r) \cup D^4_{k-3}(n+r) \supseteq \ldots \supseteq$$
$$\supseteq D^1_{k-s_0+1}(n+r) \cup D^{s_0}_{k-s_0+1}(n+r). \qquad (36)$$

По условию $a'_{s_0} > 0$, поэтому применив либо равенство (24), если $s_0 < r$, либо тождество (26) если $s_0 = r$, и, учитывая включение (31), перепишем (2) как

$$D^1_k(n+r) \supseteq D^1_{k-s_0}(n+r) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{a'_{s_0}} \left(D^1_{k-s_0}(n+r) \ominus \{P_{s_0-1} + (j-1)\}\right) \right) = \bigcup_{j=0}^{a'_{s_0}} \left(D^1_{k-s_0}(n+r) \ominus \{j\}\right),$$

так как $P_{s_0-1} = \sum\limits_{i=1}^{s_0-1} a_i$, и, следовательно, $P_{s_0-1} \equiv 1 \pmod d$. Множества $D^1_{k-s_0}(n+r)$, $D^1_{k-s_0}(n+r) \ominus \{1\}, \ldots, D^1_{k-s_0}(n+r) \ominus \{a'_{s_0}\}$ отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, поэтому неравенство (34) будет иметь место.

Теперь перейдем к доказательству неравенства, приведенного в утверждении леммы 12. Если $a_1' > 1$, то применяя неравенство (32) k раз, и учитывая, что $\sharp D^1_0(n+r) = a_1'$, приходим к выводу, что

$$\sharp D^1_k(n+r) \geqslant \sharp D^1_{k-1}(n+r) + a_1' - 1 \geqslant \sharp D^1_{k-2}(n+r) + 2(a_1'-1) \geqslant \ldots \geqslant$$
$$\geqslant \sharp D^1_0(n+r) + k(a_1'-1) = (k+1)a_1' - k.$$

Очевидно, что последнее выражение будет больше, чем d_0, если $k = \left[\frac{d_0-1}{a_1'-1}\right]$.

Если $a_1' = 1$, а $a_2' > 0$, то используя неравенство (33) ровно $\left[\frac{k}{2}\right]$ раз, получаем

$$\sharp D^1_k(n+r) \geqslant \sharp D^1_{k-2}(n+r) + a_2' \geqslant \sharp D^1_{k-4}(n+r) + 2a_2' \geqslant \ldots \geqslant \sharp D^1_0(n+r) + \left[\frac{k}{2}\right] a_2' = \left[\frac{k}{2}\right] a_2' + 1.$$

Если $k = \left[\frac{2(d_0-1)}{a_2'}\right] + 1$, то мощность множества $D^1_k(n+r)$ будет превышать d_0.

В том случае, когда $a_1' = 1$, $a_2' = a_3' = \ldots = a'_{s_0-1} = 0$ и $a'_{s_0} > 0$, применяя неравенство (34) $\left[\frac{k}{s_0}\right]$ раз, имеем

$$\sharp D^1_k(n+r) \geqslant \sharp D^1_{k-s_0}(n+r) + a'_{s_0} \geqslant \sharp D^1_{k-2s_0}(n+r) + 2a'_{s_0} \geqslant \ldots \geqslant \sharp D^1_0(n+r) + \left[\frac{k}{s_0}\right] a'_{s_0} = \left[\frac{k}{s_0}\right] a'_{s_0} + 1.$$

При $k = \left[\frac{s_0(d_0-1)}{a'_{s_0}}\right] + 1$ мощность множества $D^1_k(n+r)$ будет больше d_0.

Таким образом (30) доказано. Для доказательства леммы 12 остается воспользоваться (31) и очевидным неравенством $k_0' \leq k_0$.

Замечание 3. *Из определения $A_k^1(n+r)$ и леммы 12 вытекает, что если k_0 определяется равенствами (29), то $A_{k_0}^1(n+r) > d_0$.*

Пусть
$$\eta_{d,r} = \left(1 + \frac{1}{r(d+1)^{k_0+1}}\right)^{\frac{1}{k_0+r}}. \tag{37}$$

Лемма 13. *При всех натуральных n справедлива оценка*
$$\left|S_{d,a}^*(n)\right| \ll \frac{T_n}{\eta_{d,r}^n}.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение последовательность $\{M_d(n)\}$, определяемую следующим образом:
$$M_d(n) = \max_{0\leqslant a<d} \left|S_{d,a}^*(n)\right| \tag{38}$$
при $0 \leqslant n \leqslant r + k_0$ и
$$M_d(n+r) = \left(A_{k_0}^1(n+r) - 1\right) M_d(n+r-k_0-1) + \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^s(n+r) M_d(n+r-k_0-s) \tag{39}$$
в остальных случаях. Пользуясь индукцией по n, докажем, что
$$\left|S_{d,a}^*(n)\right| \leqslant M_d(n). \tag{40}$$
При $n \leqslant r + k_0$ неравенство (40) следует из (38). Предположим, что неравенство (40) справедливо при $n + r - k_0 - s$, где $1 \leqslant s \leqslant r$. Распишем $S_{d,a}^*(n+r)$, воспользовавшись соотношением (17) при $k = k_0$, как $S_{d,a}^*(n+r) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, где
$$\Sigma_1 = \sum_{l=0}^{d-1} \xi_{l,k_0}^1(n+r) S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1)$$
и
$$\Sigma_2 = \sum_{s=2}^{r}\sum_{l=0}^{d-1} \xi_{l,k_0}^s(n+r) S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-s).$$
Используя определение множества $D_{k_0}^1(n+r)$, перепишем Σ_1 следующим образом:
$$\Sigma_1 = \sum_{l\in D_{k_0}^1(n+r)} \xi_{l,k_0}^1(n+r) S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1) =$$
$$= \sum_{l\in D_{k_0}^1(n+r)} S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1) + \sum_{l\in D_{k_0}^1(n+r)} \left(\xi_{l,k_0}^1(n+r) - 1\right) S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1),$$
где $\xi_{l,k_0}^1(n+r) - 1 \geqslant 0$ в силу определения $D_{k_0}^1(n+r)$. Применим лемму 2 к первому слагаемому последней суммы и получим, что
$$\Sigma_1 = -\sum_{l\notin D_{k_0}^1(n+r)} S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1) + \sum_{l\in D_{k_0}^1(n+r)} \left(\xi_{l,k_0}^1(n+r) - 1\right) S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1).$$
Найдем оценку сверху для $|\Sigma_1|$. Имеем
$$|\Sigma_1| \leqslant \sum_{l\notin D_{k_0}^1(n+r)} \left|S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1)\right| + \sum_{l\in D_{k_0}^1(n+r)} \left(\xi_{l,k_0}^1(n+r) - 1\right) \left|S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l \notin D^1_{k_0}(n+r)} 1 + \sum_{l \in D^1_{k_0}(n+r)} \left(\xi^1_{l,k_0}(n+r) - 1\right) \right) \cdot \max_{0 \leqslant a < d} \left| S^*_{d,a \ominus l}(n+r-k_0-1) \right| =$$

$$= B(n+r) \max_{0 \leqslant a < d} \left| S^*_{d,a \ominus l}(n+r-k_0-1) \right|,$$

где

$$B(n+r) = \sum_{l \notin D^1_{k_0}(n+r)} 1 + \sum_{l \in D^1_{k_0}(n+r)} \left(\xi^1_{l,k_0}(n+r) - 1\right) = \sum_{l \notin D^1_{k_0}(n+r)} 1 + \sum_{l \in D^1_{k_0}(n+r)} \xi^1_{l,k_0}(n+r) -$$

$$- \sum_{l \in D^1_{k_0}(n+r)} 1 \leqslant \left(d - \sharp D^1_{k_0}(n+r)\right) + A^1_{k_0}(n+r) - \sharp D^1_{k_0}(n+r) = d + A^1_{k_0}(n+r) - 2\sharp D^1_{k_0}(n+r).$$

Из (28) получаем, что $\sharp D^1_{k_0}(n+r) \geqslant d_0 + 1$, а, следовательно, при d — четном: $d_0 = \frac{d}{2}$, $2\sharp D^1_{k_0}(n+r) \geqslant d+2$ и $B(n+r) \leqslant A^1_{k_0}(n+r) - 2$, а при d — нечетном: $d_0 = \frac{d-1}{2}$, $2\sharp D^1_{k_0}(n+r) \geqslant d+1$ и $B(n+r) \leqslant A^1_{k_0}(n+r) - 1$, то есть, в любом случае, $B(n+r) \leqslant A^1_{k_0}(n+r) - 1$.

Учитывая последнее неравенство и предположение индукции, можно утверждать, что

$$|\Sigma_1| \leqslant \left(A^1_{k_0}(n+r) - 1\right) \max_{0 \leqslant a < d} \left| S^*_{d,a \ominus l}(n+r-k_0-1) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(A^1_{k_0}(n+r) - 1\right) M_d(n+r-k_0-1).$$

В свою очередь

$$|\Sigma_2| \leqslant \sum_{s=2}^{r} \sum_{l=0}^{d-1} \xi^s_{l,k_0}(n+r) \max_{0 \leqslant a < d} \left| S^*_{d,a \ominus l}(n+r-k_0-s) \right| =$$

$$= \sum_{s=2}^{r} A^s_{k_0}(n+r) \max_{0 \leqslant a < d} \left| S^*_{d,a \ominus l}(n+r-k_0-s) \right| = \sum_{s=2}^{r} A^s_{k_0}(n+r) M_d(n+r-k_0-s),$$

поэтому, используя (39) из неравенства $\left| S^*_{d,a}(n+r) \right| \leqslant |\Sigma_1| + |\Sigma_2|$ получаем, что

$$\left| S^*_{d,a}(n+r) \right| \leqslant \left(A^1_{k_0}(n+r) - 1\right) M_d(n+r-k_0-1) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{r} A^s_{k_0}(n+r) M_d(n+r-k_0-s) = M_d(n+r),$$

что совпадает с неравенством (40). Перейдем к доказательству соотношения

$$M_d(n) \ll \frac{T_n}{\eta^n_{d,r}}, \tag{41}$$

то есть покажем, что найдется постоянная $C(d,r) > 0$ такая, что

$$T_n \geqslant C(d,r) M_d(n) \eta^n_{d,r}. \tag{42}$$

Пусть $0 \leqslant n \leqslant r + k_0$, тогда, очевидно, при $C(d,r) = \max\limits_{0 \leqslant n \leqslant r+k_0} \frac{T_n}{\eta^n_{d,r}}$ неравенство (42) будет выполняться. Предположим, что существует положительная постоянная $C(d,r)$ такая, что

$$T_{n+r-m} \geqslant C(d,r) M_d(n+r-m) \eta^{n+r-m}_{d,r} \tag{43}$$

при всех $1 \leqslant m \leqslant n+r$, тогда воспользуемся утверждением леммы 10 при $k = k_0$. Имеем:

$$T_{n+r} \geqslant \sum_{s=1}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r)T_{n+r-k_0-s} = A_{k_0}^{1}(n+r)T_{n+r-k_0-1} + \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r)T_{n+r-k_0-s} =$$

$$= \left(A_{k_0}^{1}(n+r)-1\right)T_{n+r-k_0-1} + \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r)T_{n+r-k_0-s} + T_{n+r-k_0-1}. \tag{44}$$

Из равенства (1) и неравенства (1) следует, что при всех $1 \leqslant s \leqslant r$ справедливо соотношение $T_{n+r-k_0-s} \leqslant T_{n+r-k_0-1}$, поэтому

$$T_{n+r-k_0-1} \geqslant \frac{1}{r}\sum_{s=1}^{r} T_{n+r-k_0-s}.$$

Учитывая это неравенство, из соотношения (2) получаем, что

$$T_{n+r} \geqslant \left(A_{k_0}^{1}(n+r)-1\right)T_{n+r-k_0-1} + \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r)T_{n+r-k_0-s} + \frac{1}{r}\sum_{s=1}^{r} T_{n+r-k_0-s}.$$

Применим предположение индукции (43) к последнему неравенству. Находим

$$T_{n+r} \geqslant C(d,r)\eta_{d,r}^{n-k_0}\Bigg(\left(A_{k_0}^{1}(n+r)-1\right)M_d(n+r-k_0-1)\eta_{d,r}^{r-1} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r)M_d(n+r-k_0-s)\eta_{d,r}^{r-s} + \frac{1}{r}\sum_{s=1}^{r} M_d(n+r-k_0-s)\eta_{d,r}^{r-s}\Bigg).$$

В силу того, что $\eta_{d,r} > 1$, получаем, что

$$T_{n+r} \geqslant C(d,r)\eta_{d,r}^{n-k_0}\Bigg(\left(A_{k_0}^{1}(n+r)-1\right)M_d(n+r-k_0-1) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r)M_d(n+r-k_0-s) + \frac{1}{r}\sum_{s=1}^{r} M_d(n+r-k_0-s)\Bigg).$$

Согласно определению (39), имеем

$$T_{n+r} \geqslant C(d,r)\eta_{d,r}^{n-k_0}\left(M_d(n+r) + \frac{1}{r}\sum_{s=1}^{r} M_d(n+r-k_0-s)\right). \tag{45}$$

Очевидно, что

$$\sum_{s=1}^{r} M_d(n+r-k_0-s) \geqslant \frac{1}{\max\limits_{1\leqslant s\leqslant r} A_{k_0}^{s}(n+r)} \sum_{s=1}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r)M_d(n+r-k_0-s) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\max\limits_{1\leqslant s\leqslant r} A_{k_0}^{s}(n+r)}\Bigg(\left(A_{k_0}^{1}(n+r)-1\right)M_d(n+r-k_0-1) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r)M_d(n+r-k_0-s)\Bigg) = \frac{M_d(n+r)}{\max\limits_{1\leqslant s\leqslant r} A_{k_0}^{s}(n+r)}.$$

Из неравенства (23) следует, что

$$\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant s\leqslant r} A^s_{k_0}(n+r)} \geqslant \frac{1}{(d+1)^{k_0+1}},$$

поэтому

$$\sum_{s=1}^{r} M_d(n+r-k_0-s) \geqslant \frac{M_d(n+r)}{(d+1)^{k_0+1}}. \tag{46}$$

Подставим (46) в (45) и получим, что

$$T_{n+r} \geqslant C(d,r)\eta_{d,r}^{n-k_0} M_d(n+r)\left(1+\frac{1}{r(d+1)^{k_0+1}}\right).$$

Так как

$$\eta_{d,r}^{k_0+r} = 1+\frac{1}{r(d+1)^{k_0+1}},$$

то

$$T_{n+r} \geqslant C(d,r)\eta_{d,r}^{n+r} M_d(n+r).$$

Из соотношений (40) и (41) получается утверждение леммы 13.

Перейдем к изучению $S_{d,a}(X)$, где X — целое неотрицательное число, имеющее разложение (4), удовлетворяющее условию (5).

Лемма 14. *Справедливо неравенство*

$$|S_{d,a}(X)| \ll \sum_{i=0}^{t(X)} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(i)\right|.$$

Доказательство. Утверждение леммы 14, очевидно, следует из неравенства

$$|S_{d,a}(X)| \leqslant \sum_{i=0}^{t(X)} t'_i \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(i)\right|, \tag{47}$$

где $t'_i = t_i(X) \bmod d$, и тривиальной оценки $t'_i < d$. Прежде, чем доказать соотношение (47), покажем выполнимость при любых i неравенства

$$|S_{d,a}(t_iT_i)| \leqslant t'_i \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(i)\right|. \tag{48}$$

Имеем

$$S_{d,a}(t_iT_i) = \sum_{m=0}^{t_iT_i-1} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{l=0}^{t_i-1}\sum_{X'=0}^{T_i-1} \varepsilon_{d,a}(lT_i+X') = \sum_{l=0}^{t_i-1}\sum_{X'=0}^{T_i-1} \varepsilon_{d,a\ominus l}(X') =$$

$$= \sum_{l=0}^{t_i-1} S_{d,a\ominus l}(T_i) = \sum_{l=0}^{t_i-1} S^*_{d,a\ominus l}(i).$$

Пусть $t_i = qd + t'_i$, где $q \geqslant 0$, $0 \leqslant t'_i < d$, тогда

$$\sum_{l=0}^{t_i-1} S^*_{d,a\ominus l}(i) = \sum_{k=0}^{q-1}\sum_{s=0}^{d-1} S^*_{d,a\ominus(kd+s)}(i) + \sum_{s=0}^{t'_i-1} S^*_{d,a\ominus(qd+s)}(i) = \sum_{s=0}^{t'_i-1} S^*_{d,a\ominus(qd+s)}(i),$$

так как при любом k в силу леммы 2 получаем $\sum\limits_{s=0}^{d-1} S^*_{d,a\ominus(kd+s)}(i) = 0$. В таком случае

$$|S_{d,a}(t_iT_i)| \leqslant \sum_{s=0}^{t'_i-1} \left|S^*_{d,a\ominus(qd+s)}(i)\right| \leqslant t'_i \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(i)\right|,$$

то есть неравенство (48) выполняется.

Доказательство неравенства (47) проведем, используя индукцию по $t(X)$. Пусть $t(X) = 0$, тогда получаем, что $X = t_0T_0$, и в силу (48) $|S_{d,a}(X)| = |S_{d,a}(t_0T_0)| \leqslant t'_0 \max\limits_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(0)\right|$, что совпадает с (47) при $t(X) = 0$. Предположим, что неравенство (47) верно при $t(X) = p$, то есть при $X = \sum\limits_{i=0}^{p} t_iT_i$

$$|S_{d,a}(X)| \leqslant \sum_{i=0}^{p} t'_i \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(i)\right|. \tag{49}$$

Если $t(X) = p+1$, то $X = \sum\limits_{i=0}^{p+1} t_iT_i = X' + t_{p+1}T_{p+1}$, где $X' = \sum\limits_{i=0}^{p} t_iT_i$, и

$$S_{d,a}(X) = \sum_{m=0}^{t_{p+1}T_{p+1}-1} \varepsilon_{d,a}(m) + \sum_{m=t_{p+1}T_{p+1}}^{t_{p+1}T_{p+1}+X'-1} \varepsilon_{d,a}(m). \tag{50}$$

В соответствии с определением $\varepsilon_{d,a}(m)$ и $S_{d,a}(X)$ получаем, что

$$\sum_{m=t_{p+1}T_{p+1}}^{t_{p+1}T_{p+1}+X'-1} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{m=t_{p+1}T_{p+1}}^{t_{p+1}T_{p+1}+X'-1} \varepsilon_{d,a\ominus t_{p+1}}(m - t_{p+1}T_{p+1}) = \sum_{m=0}^{X'-1} \varepsilon_{d,a\ominus t_{p+1}}(m) = S_{d,a\ominus t_{p+1}}(X'),$$

а $\sum\limits_{m=0}^{t_{p+1}T_{p+1}-1} \varepsilon_{d,a}(m) = S_{d,a}(t_{p+1}T_{p+1})$, поэтому из неравенства (50) имеем

$$|S_{d,a}(X)| \leqslant |S_{d,a}(t_{p+1}T_{p+1})| + \left|S_{d,a\ominus t_{p+1}}(X')\right|.$$

Применим к первому слагаемому соотношение (48), а ко второму — предположение индукции (49), и получим, что

$$|S_{d,a}(X)| \leqslant t'_{p+1} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(p+1)\right| + \sum_{i=0}^{p} t'_i \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(i)\right| = \sum_{i=0}^{p+1} t'_i \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(i)\right|.$$

Таким образом, лемма 14 доказана.

Для нахождения асимптотической формулы для T_n сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 15. *Предположим, что G_0, G_1, …, G_{r-1} положительны, что $G_j = \sum\limits_{i=1}^{r} a_iG_{j-i}$ для $j \geqslant r$, где $a_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда характеристический многочлен $P(u) = u^r - \sum\limits_{i=1}^{r} a_iu^{r-i}$ имеет единственный корень α максимального модуля, который является действительным и большим 1. Кроме того,*

$$G_j = C\alpha^j + O(\alpha^{(1-\delta)j}) \tag{51}$$

для действительной константы $C > 0$ и некоторого $\delta > 0$.

Доказательство. Сначала покажем, что $P(u)$ имеет единственный положительный действительный корень $\alpha > 1$ максимального модуля. Положим $G(u) = 1 - u^r P(u^{-1}) = \sum\limits_{j=1}^{r} a_j u^j$. Тогда $G(u)$ строго возрастает для действительных $u \geqslant 0$. Поскольку $G(0) = 0$ и $\lim\limits_{u\to+\infty} G(u) = +\infty$, то существует единственное $u_0 > 0$, такое что $G(u_0) = 1$. Поскольку G_n строго возрастает, то $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j = G(1) > 1$ и, следовательно, $u_0 < 1$. Более того, $G'(u_0) = \sum\limits_{j=1}^{r} j a_j u_0^{j-1} > 0$. Таким образом, $\alpha = \frac{1}{u_0} > 1$ является простым корнем $P(u)$. Если $|u| < u_0$, то

$$|G(u)| \leqslant G(|u|) < G(u_0) = 1.$$

то $u \in \mathbb{C}$.

Для комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$, то справедливо неравенство

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|. \tag{52}$$

Равенство в (52) будет достигаться только в том случае, для некоторого z выполняются равенства $z_j = \alpha_j z$, где $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j > 0$.

Пусть $u \in \mathbb{C}$, тогда $a_j u^j \in \mathbb{C}$ и можно воспользоваться неравенством (52) для $|G(u)|$:

$$|G(u)| = \left|\sum_{j=1}^{r} a_j u^j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{r} \left|a_j u^j\right| = \sum_{j=1}^{r} a_j |u|^j = G(|u|).$$

Как было показано, равенство в последнем соотношении будет достигаться только в том случае, когда при всех j выполняется равенство $a_j u^j = \alpha_j z$, то есть $u^j = \frac{\alpha_j}{a_j} z$, где $\alpha_j > 0$, $a_j > 0$ и $z \in \mathbb{C}$. Последнее равенство возможно только если $u \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{R}$.

Итак, если $|u| = u_0$ и $u \neq u_0$, то

$$|G(u)| < G(|u|) = G(u_0) = 1,$$

то есть такое u не является корнем характеристического многочлена $P(u)$. Следовательно, нет корней $P(u)$, отличных от α с модулем большим или равным α. Далее ясно, что G_j имеет представление вида (51) для некоторого вещественного C. Нам нужно только показать, что $C > 0$. Для этого определим $F_j(x_0, \dots, x_{r-1})$ как $F_j(x_0, \dots, x_{r-1}) = x_j$, если $0 \leqslant j < r$ и как

$$F_j(x_0, \dots, x_{r-1}) = \sum_{i=1}^{r} a_i F_{j-i}(x_0, \dots, x_{r-1})$$

для $j \geqslant r$. Тогда $F_j(x_0, \dots, x_{r-1})$ является полилинейной и монотонной по всем переменным. Кроме того, $F_j(G_0, ..., G_{r-1}) = G_j$ и $F_j(1, \alpha, \dots, \alpha^{r-1}) = \alpha^j$. Следовательно, установив $c_1 = \min\limits_{0\leqslant j<r} G_j \alpha^{-j}$, получаем

$$c_1\alpha^j = F_j(c_1, c_1\alpha, \dots, c_1\alpha^{r-1}) \leqslant F_j(G_0, \dots, G_{r-1}) = C_j = C\alpha^j + O(\alpha^{(1-\delta)j}).$$

Таким образом, $C > 0$.

Замечание 4. *Приведенное выше утверждение аналогично лемме 3.1 работы [8], в которой, однако, имеется дополнительное условие о взаимной простоте ненулевых коэффициентов a_i. Доказательство, за исключением утверждения $|G(u)| < 1$ при $|u| = u_0$, $u \neq u_0$ аналогично доказательству из упомянутой работы.*

Члены рекуррентной последовательности $\{T_n\}$, определяемые условиями (1)–(3), удовлетворяют утверждению леммы 15. Пусть α – наибольший по модулю корень характеристического уравнения линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$. Из леммы 15 вытекает, что α определен однозначно, является действительным и $\alpha > 1$. Более того, в силу равенства (51) имеем

$$T_n \sim C\alpha^n \tag{53}$$

с некоторым $C > 0$.

Лемма 16. *При всех $n \geqslant 0$ имеет место оценка*

$$\left|S^*_{d,a}(n)\right| \ll \min\left(\frac{\alpha^n}{\eta^n_{d,r}}, \tau^n_{d_0}\right),$$

где α — наибольший по модулю корень характеристического уравнения линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$, $\alpha > 1$, τ_{d_0} — наибольший по модулю корень уравнения $u^r - d_0 \sum\limits_{s=1}^{r} u^{r-s} = 0$, $\eta_{d,r}$ определяется равенством (37).

Доказательство. Характеристический многочлен $f(u) = u^r - d_0 \sum\limits_{s=1}^{r} u^{r-s}$, где $d_0 \geqslant 1$, удовлетворяет тем же условиям, что и характеристический многочлен $P(u)$ из условия леммы 15, поэтому максимальный по модулю корень τ_{d_0} уравнения $f(u) = 0$ действительный и, более того, больший единицы. Покажем, что $\tau_{d_0} > d_0$. Действительно,

$$f(d_0) = d_0^r - d_0 \sum_{s=1}^{r} d_0^{r-s} = d_0^r - d_0\left(d_0^{r-1} + d_0^{r-2} + \ldots + d_0 + 1\right) = -d_0^{r-1} - d_0^{r-2} - \ldots - d_0 - 1 < 0,$$

а $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = +\infty$, значит найдется действительный корень уравнения $f(u) = 0$, больший d_0. Так как τ_{d_0} — наибольший корень уравнения $f(u) = 0$, то $\tau_{d_0} > d_0$.

Используя индукцию по n, докажем, что $\left|S^*_{d,a}(n)\right| \ll \tau^n_{d_0}$. Заметим, что всегда можно выбрать $C(d,r)$ так, чтобы $\left|S^*_{d,a}(n)\right| \leqslant C(d,r)\tau^n_{d_0}$ при $n = 0, 1, \ldots, r-1$. Действительно, можно взять $C(d,r) = \max\limits_{0\leqslant a<d} \max\left(\left|S^*_{d,a}(0)\right|,\right.$
$\left.\frac{\left|S^*_{d,a}(1)\right|}{\tau_{d_0}}, \ldots, \frac{\left|S^*_{d,a}(r-1)\right|}{\tau^{r-1}_{d_0}}\right)$.

Рассмотрим доказательство шага индукции. Перепишем равенство (14) как $S^*_{d,a}(n+r) = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \sum_{\substack{s\in I,\\ 1\leqslant a'_s\leqslant d_0}} \sum_{j=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s), \quad S_2 = \sum_{\substack{s\in I,\\ d_0<a'_s\leqslant d}} \sum_{j=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s).$$

Найдем оценку каждой из сумм S_1 и S_2:

$$|S_1| \leqslant \sum_{\substack{s\in I,\\ 1\leqslant a'_s\leqslant d_0}} \sum_{j=1}^{a'_s} \left|S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s)\right| \leqslant \sum_{\substack{s\in I,\\ 1\leqslant a'_s\leqslant d_0}} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(n+r-s)\right| \sum_{j=1}^{a'_s} 1 \leqslant$$

$$\leqslant d_0 \sum_{\substack{s\in I,\\ 1\leqslant a'_s\leqslant d_0}} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(n+r-s)\right|.$$

Для получения оценки S_2 воспользуемся утверждением леммы 2, в силу которого

$$|S_2| \leqslant \sum_{\substack{s\in I,\\ d_0<a'_s\leqslant d}} \left| - \sum_{j=a'_s+1}^{d} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{s\in I,\\ d_0<a'_s\leqslant d}} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(n+r-s)\right| \sum_{j=a'_s+1}^{d} 1 \leqslant d_0 \sum_{\substack{s\in I,\\ d_0<a'_s\leqslant d}} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(n+r-s)\right|.$$

Из полученных оценок для $|S_1|$ и $|S_2|$ следует, что

$$\left|S^*_{d,a}(n+r)\right| \leqslant d_0 \sum_{s\in I} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(n+r-s)\right|.$$

С учетом предположения индукции получаем, что

$$\left|S^*_{d,a}(n+r)\right| \leqslant d_0 \sum_{s\in I} C(d,r)\tau_{d_0}^{n+r-s} \leqslant d_0 C(d,r) \sum_{s\in I} \tau_{d_0}^{n+r-s} = d_0 C(d,r)\tau_{d_0}^{n} \frac{\tau_{d_0}^{r}-1}{\tau_{d_0}-1} =$$

$$= C(d,r)\frac{d_0}{\tau_{d_0}-1}\tau_{d_0}^{n}\left(\tau_{d_0}^{r}-1\right) < C(d,r)\frac{\tau_{d_0}}{\tau_{d_0}-1}\tau_{d_0}^{n}\left(\tau_{d_0}^{r}-1\right) < C(d,r)\tau_{d_0}^{n+r}.$$

Из последнего неравенства следует справедливость оценки $\left|S^*_{d,a}(n)\right| \ll \tau_{d_0}^{n}$. Кроме того, применяя асимптотику (53) к утверждению леммы 13, получаем, что $\left|S^*_{d,a}(n)\right| \ll \frac{\alpha^n}{\eta_{d,r}^{n}}$. Из последних двух оценок следует утверждение леммы 16.

Перейдем к оценке $t(X)$.

Лемма 17. *Пусть X имеет разложение (4) по линейным рекуррентным последовательностям $\{T_n\}$, определяемых условиями (1)–(3), и удовлетворяет условию (5), тогда*

$$\log_\alpha \frac{X}{C(a_1+1)} < t(X) < \log_\alpha \frac{X}{Ca_1},$$

где α — корень характеристического уравнения для равенства (1), $\alpha > 1$ и $C > 0$.

Доказательство. По условию $X = \sum\limits_{i=0}^{t(X)} t_i T_i$ удовлетворяет условию (5), значит $a_1 T_{t(X)} < X < (a_1+1)T_{t(X)}$ и в силу асимптотики (53) $a_1 C\alpha^{t(X)} < X < (a_1+1)C\alpha^{t(X)}$, где $a_1 > 1$, $\alpha > 1$ и $C > 0$, тогда

$$\log_\alpha(Ca_1) + t(X) < \log_\alpha X < \log_\alpha(C(a_1+1)) + t(X),$$

или

$$\log_\alpha X - \log_\alpha(C(a_1+1)) < t(X) < \log_\alpha X - \log_\alpha(Ca_1),$$

из которого следует утверждение леммы.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого $d \geqslant 3$ справедлива асимптотическая формула*

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \frac{X}{d} + O\left(X^{\lambda}\right),$$

где $\lambda = \log_{\tau_{d_0}\eta_{d,r}} \tau_{d_0}$, τ_{d_0} *— наибольший по модулю корень уравнения* $u^r - d_0 \sum\limits_{s=1}^{r} u^{r-s} = 0$,

$$\eta_{d,r} = \left(1 + \frac{1}{r(d+1)^{k_0+1}}\right)^{\frac{1}{k_0+r}},$$

$$k_0 = r(d_0 - 1) + 1,$$

$$d_0 = \left[\frac{d}{2}\right].$$

Замечание 5. *Легко видеть, что полученное значение* λ *зависит только от* d *и* r, *но не от коэффициентов* a_i *линейного рекуррентного соотношения. Константа, скрытая в* $O(X^{\lambda})$, *может зависеть от этих коэффициентов.*

Доказательство. Из утверждения леммы 1 следует, что

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \frac{X}{d} + \sum_{m=0}^{X-1} \varepsilon_{d,a}(m) = \frac{X}{d} + S_{d,a}(X).$$

Рассмотрим два случая.

1) $\alpha > \tau_{d_0}\eta_{d,r}$. В этом случае, используя утверждения лемм 14 и 16, находим $|S_{d,a}(X)| \ll \ll \sum\limits_{i=0}^{t(X)} \tau_{d_0}^{i}$. Суммируя геометрическую прогрессию, имеем $|S_{d,a}(X)| \ll \tau_{d_0}^{t(X)}$. Применив оценку $t(X)$ из леммы 17, получаем $|S_{d,a}(X)| \ll \tau_{d_0}^{\log_\alpha \frac{X}{Ca_1}}$. При этом

$$\tau_{d_0}^{\log_\alpha \frac{X}{Ca_1}} = \tau_{d_0}^{\frac{\log_{\tau_{d_0}} \frac{X}{Ca_1}}{\log_{\tau_{d_0}} \alpha}} = \left(\frac{X}{Ca_1}\right)^{\frac{1}{\log_{\tau_{d_0}} \alpha}} = \left(\frac{X}{Ca_1}\right)^{\log_\alpha \tau_{d_0}}.$$

Таким образом, существует постоянная $C_1(a_1, d, r)$ такая, что при $\alpha > \tau_{d_0}\eta_{d,r}$ выполняется неравенство

$$|S_{d,a}(X)| \leqslant C_1(a_1, d, r) X^{\log_\alpha \tau_{d_0}} < C_1(a_1, d, r) X^{\log_{\tau_{d_0}\eta_{d,r}} \tau_{d_0}} = C_1(a_1, d, r) X^{\lambda}.$$

2) $\alpha \leqslant \tau_{d_0}\eta_{d,r}$. В этом случае для получения оценки $S_{d,a}(X)$ воспользуемся леммами 14 и 13. Имеем

$$|S_{d,a}(X)| \ll \sum_{i=0}^{t(X)} \max_{0 \leqslant a < d} \left|S_{d,a}^{*}(i)\right| \ll \sum_{i=0}^{t(X)} \frac{T_i}{\eta_{d,r}^{i}}. \tag{54}$$

При всех $i \geqslant r$ из условий (1) и (3) следует, что $T_i \geqslant T_{i-1} + T_{i-r} \geqslant 2T_{i-r}$, поэтому $T_{i-r} \leqslant \frac{1}{2} T_i$, поэтому

$$\frac{T_{i-r}}{\eta_{d,r}^{i-r}} \leqslant \frac{\eta_{d,r}^{r}}{2} \cdot \frac{T_i}{\eta_{d,r}^{i}}. \tag{55}$$

По условию $r \geqslant 2$, $d \geqslant 3$ и $k_0 \geqslant 1$, следовательно, $\frac{1}{2} < \frac{\eta_{d,r}^{r}}{2} < 1$. Перепишем соотношение (54) как

$$|S_{d,a}(X)| \ll \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant t(X), \\ k \equiv s \pmod r}} \frac{T_{t(X)-k}}{\eta_{d,r}^{t(X)-k}}. \tag{56}$$

Воспользуемся неравенством (55) $\frac{k-s}{r}$ раз. Имеем:

$$\frac{T_{t(X)-k}}{\eta_{d,r}^{t(X)-k}} \leqslant \frac{\eta_{d,r}^r}{2}\cdot\frac{T_{t(X)-k+r}}{\eta_{d,r}^{t(X)-k+r}} \leqslant \left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^2\cdot\frac{T_{t(X)-k+2r}}{\eta_{d,r}^{t(X)-k+2r}} \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k-s}{r}}\cdot\frac{T_{t(X)-s}}{\eta_{d,r}^{t(X)-s}}.$$

Воспользуемся последним неравенством для преобразования соотношения (56). Получаем

$$|S_{d,a}(X)| \ll \sum_{s=0}^{r-1}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant t(X),\\ k\equiv s \pmod r}}\left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k-s}{r}}\cdot\frac{T_{t(X)-s}}{\eta_{d,r}^{t(X)-s}} = \sum_{s=0}^{r-1}\frac{T_{t(X)-s}}{\eta_{d,r}^{t(X)-s}}\sum_{0\leqslant k\leqslant t(X), k\equiv s \pmod r}\left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k-s}{r}}.$$

Из равенства (1) следует, что $T_{t(X)-r+1}\leqslant T_{t(X)-r+2}\leqslant\ldots\leqslant T_{t(X)}$, поэтому

$$|S_{d,a}(X)| \ll \frac{T_{t(X)}}{\eta_{d,r}^{t(X)}}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant t(X),\\ k\equiv s \pmod r}}\left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k}{r}} \ll \frac{T_{t(X)}}{\eta_{d,r}^{t(X)}}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k}{r}}.$$

Найдем сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k}{r}} = \frac{1}{1-\left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}} = \frac{2^{\frac{1}{r}}}{2^{\frac{1}{r}}-\eta_{d,r}}.$$

Данная величина является положительной постоянной, так как $\eta_{d,r} < 2^{\frac{1}{r}}$, поэтому, принимая во внимание тот факт, что $T_{t(X)}\leqslant X$, получаем $|S_{d,a}(X)| \ll \frac{X}{\eta_{d,r}^{t(X)}}$. В силу леммы 17 $t(X) > \log_\alpha\frac{X}{C(a_1+1)}$, поэтому

$$\eta_{d,r}^{t(X)} \geqslant \eta_{d,r}^{\log_\alpha\frac{X}{C(a_1+1)}} = \eta_{d,r}^{\frac{\log_{\eta_{d,r}}\frac{X}{C(a_1+1)}}{\log_{\eta_{d,r}}\alpha}} = \left(\frac{X}{C(a_1+1)}\right)^{\frac{1}{\log_{\eta_{d,r}}\alpha}} = \left(\frac{X}{C(a_1+1)}\right)^{\log_\alpha\eta_{d,r}}.$$

Таким образом, существует постоянная $C_2(a_1,d,r)$ такая, что при $\alpha\leqslant\tau_{d_0}\eta_{d,r}$ выполняется неравенство

$$|S_{d,a}(X)| \leqslant C_2(a_1,d,r)X^{1-\log_\alpha\eta_{d,r}} < C_2(a_1,d,r)X^{1-\log_{\tau_{d_0}\eta_{d,r}}\eta_{d,r}} = C_2(a_1,d,r)X^\lambda.$$

Выберем $C(a_1,d,r)=\min(C_1(a_1,d,r),C_2(a_1,d,r))$ и получим утверждение теоремы 1.

3. Заключение

В настоящей работе было получено новое, чисто комбинаторное, доказательство аналога теоремы Гельфонда о распределении сумм цифр разложений натуральных чисел для разложений по линейным рекуррентным последовательностям, удовлетворяющим условию Парри, и произвольного модуля d.

В отличие от ранее известного доказательства из [12], наш подход дает достаточно простое и явное выражение для показателя степени в остаточном члене задачи. Кроме того, данный показатель степени зависит только от модуля d и порядка линейного рекуррентного соотношения (в [12] была зависимость от коэффициентов линейного рекуррентного соотношения). Также наше доказательство не требует некоторых технических условий на коэффициенты линейного рекуррентного соотношения, имевшихся в [12].

С другой стороны, методы [12] позволяют также получить результат о равномерности распределения сумм цифр натуральных чисел, пробегающих некоторую арифметическую прогрессию. Получить данный результат нашими методами пока не удается. Было бы интересно попробовать обобщить методы настоящей работы для построения элементарного доказательства данного результата.

В простейшем случае линейной рекуррентной последовательности Фибоначчи в [14] был получен результат о точном порядке остаточного члена для произвольного d. Хотелось бы уметь получать такие результаты и для других линейных рекуррентных последовательностей.

Рассмотренный класс систем счисления, связанный с разложениями по линейным рекуррентным последовательностям, является частным случаем систем счисления, связанных с подстановками. Конструкцию таких систем счисления и ряд важных результатов об их суммах цифр можно найти в [15]–[17]. Было бы интересно получить аналог теоремы Гельфонда и в этом случае.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fine N. J. The distribution of the sum of digits $\pmod p$ // Bulletin of the American Mathematical Society. 1965. Vol. 71 (4). P. 651-652.

2. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Aithmetica. 1968. Vol. 13. № 3. P. 259-265.

3. Эминян К.М. Об одной бинарной задаче // Математические заметки. 1996. Т. 60. № 4. С. 478-481.

4. Parry W. On the β-expansion of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1961. Vol. 12. № 3-4. P. 401-416.

5. Pethö A., Tichy R. F. On digit expansions with respect to linear recurrences // Journal of Number Theory. 1989. Vol. 33. № 2. P. 243-256.

6. Grabner P. J., Tichy R. F. Contributions to digit expansions with respect to linear recurrences // Journal of Number Theory. 1990. Vol. 36. № 2. P. 160-169.

7. Grabner P. J., Tichy R. F. α-Expansions, linear recurrences, and the sum-of-digits function // Manuscripta Math. 1991. Vol. 70. P. 311-324.

8. Drmota M., Gajdoski J. The distribution of the sum-of-digits function // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 1998. Vol. 10. № 1. P. 17-32.

9. Drmota M., Gajdosik J. The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations // Fibonacci Quarterly. 1998. Vol. 36. № 1. P. 3-19.

10. Жукова А. А., Шутов А. В. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 2. С. 104-120.

11. Drmota M., Skałba M. The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function // Manuscripta Mathematica. 2000. Vol. 101. P. 361–383.

12. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematica Slovaca. 2003. Vol. 53. №1. P. 1-20.

13. Coquet J., Rhin G., Toffin Ph. Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2 // Annales de l'institut Fourier. 1981. Vol. 31. № 1. P. 1-15.

14. Шутов А. В. Об аналоге задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 5. С. 195-215.

15. Dumont J. M., Thomas A. Systèmes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions // Theoretical Computer Science. 1989. Vol. 65. № 2. P. 153-169.

16. Dumont J. M., Thomas A. Digital sum moments and substitutions // Acta Arithmetica. 1993. Vol. 64. № 3. P. 205-225.

17. Dumont J. M., Thomas A. Gaussian asymptotic properties of the sum-of-digits functions // Journal of Number Theory. 1987. Vol. 62. № 1. P. 19–38.

REFERENCES

1. Fine, N. J. 1965, "The distribution of the sum of digits (mod p)", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 71, no. 4, pp. 651-652.

2. Gelfond, A. O. 1968, "Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données (French)", *Acta Aithmetica*, vol. 13, no. 3, pp. 259-265. (https://doi.org/10.4064/aa-13-3-259-265).

3. Eminyan, K. M. 1996, "On a Binary Problem", *Mathematical Notes*, vol. 60, no. 4, pp. 478-481. (https://doi.org/
10.1007/FBF02305438).

4. Parry, W. 1961, "On the β-expansion of real numbers", *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, vol. 12, no. 3-4, pp. 401–416. (https://doi.org/10.1007/BF02020954).

5. Pethö, A., Tichy, R. F. 1989, "On digit expansions with respect to linear recurrences", *Journal of Number Theory*, vol. 3, no. 2, pp. 243-256. (https://doi.org/10.1016/0022-314X(89)90011-5).

6. Grabner, P. J., Tichy, R. F. 1990, "Contributions to digit expansions with respect to linear recurrences", *Journal of Number Theory*, vol. 36, no. 2, pp. 160-169. (https://doi.org/10.1016/0022-314X(90)90070-8).

7. Grabner, P. J., Tichy, R. F. 1991, "α-Expansions, linear recurrences, and the sum-of-digits function", *Manuscripta Math.*, vol. 70, pp. 311-324. (https://doi.org/10.1007/BF02568381).

8. Drmota, M. & Gajdosik, J. 1998, "The distribution of the sum-of-digits function", *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, vol. 10, no. 1, pp. 17-32.

9. Drmota, M., Gajdosik, J. 1998, "The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations", *Fibonacci Quarterly*, vol. 36, no. 1, pp. 3-19. (https://doi.org/doi:10.1007/s002290050221).

10. Zhukova, A. A., Shutov, A. V. 2021, "On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations (Russian)", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 104-120.

11. Drmota, M. & Skałba, M. 2000, "The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function", *Manuscripta Mathematica*, vol. 101, pp. 361–383. (https://doi.org/10.1007/s002290050221).

12. Lamberger, M., Thuswaldner, J. W. 2003, "Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences", *Mathematica Slovaca*, vol. 53, no. 1, pp. 1-20.

13. Coquet, J., Rhin, G., Toffin, Ph. 1981, “Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2 (French)”, *Annales de l'institut Fourier*, vol. 31, no. 1, pp. 1-15. (https://doi.org/10.5802/aif.814).

14. Shutov, A. V. 2024, “On some analogue of the Gelfond problem for Zeckendorf representations (Russian)”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 195-215. (https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-5-195-215).

15. Dumont, J. M., Thomas, A. 1989, “Systèmes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions”, *Theoretical Computer Science*, vol. 65, no. 2, pp. 153-169. (https://doi.org/10.1016/0304-3975(89)90041-8).

16. Dumont, J. M., Thomas, A. 1993, “Digital sum moments and substitutions”, *Acta Arithmetica*, vol. 64, no. 3, pp. 205-225. (https://doi.org/10.4064/aa-64-3-205-225).

17. Dumont, J. M., Thomas, A. 1987, “Gaussian asymptotic properties of the sum-of-digits functions”, *Journal of Number Theory*, vol. 62. no. 1, pp. 19–38. (https://doi.org/10.1006/jnth.1997.2044).

Получено: 28.03.2025
Принято в печать: 08.12.2025