ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 512.554.1 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-73-83

Особенности трехмерных линейных операторов Нийенхейса с функционально независимыми инвариантами [1]

Е. А. Асташов, С. Д. Дегтярева

Асташов Евгений Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Московский Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: ast-ea@yandex.ru

Дегтярева Софья Денисовна — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Московский Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: sofia.degtiareva@math.msu.ru

Аннотация

Настоящая работа посвящена исследованию особенностей операторов Нийенхейса — фундаментальных объектов нийенхейсовой геометрии. Хотя тензор Нийенхейса был введён Альбертом Нийенхейсом ещё в 1951 году, активное развитие эта область получила сравнительно недавно благодаря серии работ А.В. Болсинова, А.Ю. Коняева и В.С. Матвеева.

В размерности два известна классификация линейных операторов Нийенхейса — операторов, действующих на линейном пространстве, компоненты которых линейно зависят от координат. Существует важное взаимно однозначное соответствие между линейными операторами Нийенхейса и левосимметрическими алгебрами, что делает их классификацию эквивалентной задачей.

Несмотря на кажущуюся простоту, задача остаётся сложной даже для малых размерностей и может быть решена лишь при определённых дополнительных ограничениях. В данной работе исследуются трёхмерные линейные операторы Нийенхейса (или, что то же самое, трёхмерные левосимметрические алгебры) при условии функциональной независимости коэффициентов характеристического многочлена. Полная классификация операторов с таким дополнительным условием была получена недавно, и дает список из восьми операторов.

Основной целью данной статьи является изучение особенностей таких операторов. Особой точкой называется точка, в любой окрестности которой изменяется алгебраический тип оператора (жорданова нормальная форма). В работе определены особые точки для рассматриваемого класса операторов Нийенхейса и построены их множества в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: оператор Нийенхейса, левосимметрическая алгебра, особые точки.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:
Асташов Е. А., Дегтярева С. Д. Особенности трехмерных линейных операторов Нийенхейса с функционально независимыми инвариантами // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 73–83.

[1] Работа поддержана Программой развития МГУ, проект №23-Ш05-25.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 512.554.1 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-73-83

Singularities of three-dimensional linear Nijenhuis operators with functionally independent invariants

E. A. Astashov, S. D. Degtiareva

Astashov Evgenii Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: ast-ea@yandex.ru
Degtiareva Sofia Denisovna — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: sofia.degtiareva@math.msu.ru

Abstract

This work is devoted to the study of singularities of Nijenhuis operators – fundamental objects of Nijenhuis geometry. Although the Nijenhuis tensor was introduced by Albert Nijenhuis back in 1951, this field received active development relatively recently thanks to a series of works by A.V. Bolsinov, A.Yu. Konyaev, and V.S. Matveev.

In dimension two, the classification of linear Nijenhuis operators, operators acting on a linear space, whose components linearly depend on coordinates, is known. There exists an important one-to-one correspondence between linear Nijenhuis operators and left-symmetric algebras, which makes their classification an equivalent problem.

Despite its apparent simplicity, the problem remains challenging even for small dimensions and can be solved only under certain additional constraints. This paper investigates three-dimensional linear Nijenhuis operators (or, equivalently, three-dimensional left-symmetric algebras) under the condition of functional independence of the characteristic polynomial coefficients. A complete classification of operators with this additional condition was recently obtained, yielding a list of eight operators.

The main objective of this paper is to study the singularities of such operators. A singular point is defined as a point in any neighbourhood of which the algebraic type of the operator (Jordan normal form) changes. The paper determines singular points for the considered class of Nijenhuis operators and constructs their sets in three-dimensional space.

Keywords: Nijenhuis operator, left-symmetric algebra, singular points.

Bibliography: 5 titles.

For citation:
Astashov, E. A., Degtiareva, S. D. 2025, "Singularitites of three-dimensional linear Nijenhuis operators with functionally independent invariants" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 73–83.

1. Введение

В работе [2] была поставлена задача классификации особых точек операторов Нийенхейса. В теории операторов Нийенхейса выделяют несколько типов особенностей: точки, в любой окрестности которых алгебраический тип оператора меняется, называются *особыми*, а точки, где нарушается условие линейной независимости дифференциалов коэффициентов характеристического многочлена, называются *вырожденными*. И те, и другие особенности представляют интерес, и в данной статье подробно рассмотрены особенности первого типа и определены точки второго типа.

Операторы, особенности которых мы будем изучать, были классифицированы в статье [1, теорема 2] и представляют собой полный список всех возможных трёхмерных линейных операторов Нийенхейса, коэффициенты характеристических многочленов которых являются функционально независимыми.

В размерности два полный список линейных операторов Нийенхейса без дополнительных условий был получен А.Ю. Коняевым в статье [3]. В двумерном случае множество особых точек операторов устроено достаточно просто — это прямая. Для трёхмерного случая возникают более интересные множества.

2. Определения

Определение 1. *Пусть P — операторное поле на гладком многообразии M. Кручение Нийенхейса N_P определяется на паре векторных полей v, w следующим образом:*

$$N_P(v,w) = [Pv, Pw] + P^2[v,w] - P[Pv,w] - P[v,Pw],$$

где $[\,,]$ обозначает стандартный коммутатор векторных полей.

Определение 2. *Операторное поле P называется оператором Нийенхейса, если тензор Нийенхейса N_P тождественно равен нулю, т.е. $N_P \equiv 0$.*

Мы будем рассматривать линейные операторы Нийенхейса на вещественных аффинных пространствах размерности три, т.е. такие операторные поля P, для которых $N_P \equiv 0$ и которые линейно зависят от координат x^1, x^2, x^3: $P_i^k = a_{ij}^k x^j$, где $a_{ij}^k \in \mathbb{R}$.

Определение 3. *Точка $a \in M$ называется точкой общего положения, если алгебраический тип оператора P, т.е. структура жордановой нормальной формы, не меняется в некоторой окрестности $U(a)$ точки a.*

Точка $a \in M$ называется особой, если она не является точкой общего положения.

Определение 4. *Точка $a \in M$ называется дифференциально невырожденной, если дифференциалы df_1, df_2, df_3 коэффициентов характеристического многочлена $\chi(t) = \det(t \cdot Id - P) = t^3 - f_1t^2 + f_2t - f_3$ оператора Нийенхейса линейно независимы в точке a.*

Точка $a \in M$ называется вырожденной, если она не является дифференциально невырожденной.

3. Результаты

Сформулируем теорему классификации линейных операторов Нийенхейса из статьи [1].

Теорема 1. *Любой трехмерный линейный оператор Нийенхейса P с почти всюду функционально независимыми инвариантами в некотором базисе имеет один из видов, представленных в таблице 1, причем каждый из этих 8 операторов не может быть сведен к другим линейными заменами координат.*

Комментарий к таблице 1. В четвертом столбце указана алгебра Ли, ассоциированная с левосимметрической алгеброй, соответствующей данному оператору Нийенхейса P из третьего столбца (т.е. алгебра Ли со структурными константами $c_{ij}^k = a_{ij}^k - a_{ji}^k$). Обозначения для алгебр Ли взяты из статьи [5].

Таблица 1: Трехмерные линейные операторы Нийенхейса с функционально независимыми инвариантами

№	Инварианты	Оператор Нийенхейса P	Алгебра Ли
I	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = -\frac{1}{2}xz^2 - yz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & -z \\ \frac{1}{4}z & -\frac{1}{2}z & 0 \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
II	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3=\frac{1}{27}x^3+\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3-\frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z-\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,10}$
III	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3=\frac{1}{27}x^3+\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3+\frac{\sqrt{3}}{3}y^2z-\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z & \frac{1}{2\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & \frac{2}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
IV	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = (y-z)^2(2y-x)$	$\begin{pmatrix} x & -2y & 2z \\ y & x-3y & -x+2y+z \\ y & x-4y+z & -x+3y \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
V	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = (y+z)^3$	$\begin{pmatrix} x & -2y & 2z \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z & -\frac{3}{2}(y+z) & -\frac{3}{2}(y+z) \\ -\frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z & \frac{3}{2}(y+z) & \frac{3}{2}(y+z) \end{pmatrix}$	$A_{3,5}$
VI	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = \frac{1}{2}xy^2 + y^2z$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{4}y & 0 & -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}z & y & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
VII	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3=\frac{1}{27}x^3-\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3-\frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z+\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z & \frac{1}{\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,10}$
VIII	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3=\frac{1}{27}x^3-\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3+\frac{\sqrt{3}}{3}y^2z+\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z & -\frac{1}{2\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & \frac{2}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$

Рассмотрим характеристический многочлен оператора Нийенхейса $P_\chi(t) = det(t \cdot Id - P) = t^3 - f_1t^2 + f_2t - f_3$. Дискриминант этого кубического многочлена выражается через коэффициенты следующим образом: $D = f_1^2f_2^2 + 18f_1f_2f_3 - 27f_3^2 - 4f_2^3 - 4f_1^3f_3$. Тогда множество в $\mathbb{R}^3$, где дискриминант $D = 0$, будет состоять в точности из особых точек. Найдем его для каждого из операторов и графически изобразим в пространстве. Также укажем для каждого случая жордановы нормальные формы (объединяя их по алгебраическому типу, см. определение 3) и множество вырожденных точек (см. определение 4). Во всех случаях в области $D < 0$ оператор имеет одно вещественное и пару комплексно-сопряженных (невещественнных) собственных значений.

В случае **I** дискриминант имеет вид $D = \frac{1}{4}(-y(x+2y) + z^2)^2((x-2y)^2 + 16z^2)$. Тогда множество нулей дискриминанта имеет вид

$$\frac{1}{4}(-y(x+2y) + z^2)^2((x-2y)^2 + 16z^2) = 0.$$

Решением этого уравнения является объединение следующих множеств:

$$\left[\begin{array}{l} z^2 = y(x+2y) - \text{конус}, \\ x - 2y = z = 0 - \text{прямая}. \end{array}\right.$$

Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} -2y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x+2y) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x+2y) \end{pmatrix}$ на конусе;

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y \end{pmatrix}$ на прямой;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+2y) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(x-2y-\sqrt{(x-2y)^2+16z^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(x-2y+\sqrt{(x-2y)^2+16z^2}) \end{pmatrix}$ в области $D > 0$.

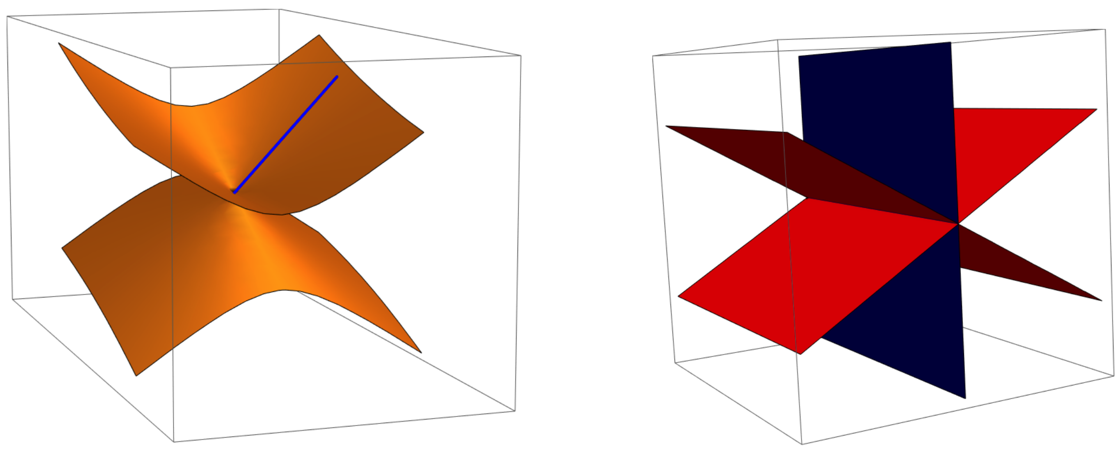

Рис. 1: Случаи **I** (слева) и **II** (справа)

Множество вырожденных точек имеет вид

$$\left[\begin{aligned} z^2 &= y(x+2y) - \text{конус}, \\ z &= 0 - \text{плоскость}. \end{aligned}\right.$$

В случае **II** дискриминант имеет вид $D = 4y^2(y^2 - 3z^2)^2$. Тогда множество нулей дискриминанта имеет вид

$$4y^2(y^2 - 3z^2)^2 = 0.$$

Решением этого уравнения является объединение следующих множеств:

$$\left[\begin{aligned} y &= 0 - \text{плоскость}, \\ y - \sqrt{3}z &= 0 - \text{плоскость}, \\ y + \sqrt{3}z &= 0 - \text{плоскость}. \end{aligned}\right.$$

Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $y = 0, z = 0$;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x-\sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x+2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на плоскости $y = 0$;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-4\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x+2\sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x+2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на паре плоскостей $y \pm \sqrt{3}z = 0$;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-3y-\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x+3y-\sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x+2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ в области $D > 0$.

Множество вырожденных точек имеет вид

$$\left[\begin{array}{c} y=0-\text{плоскость},\\ y-\sqrt{3}z=0-\text{плоскость},\\ y+\sqrt{3}z=0-\text{плоскость}. \end{array}\right.$$

В случае **III** дискриминат имеет вид $D=y^4(4y^2+3z^2)$. Тогда

$$4y^4(4y^2+3z^2)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} y=0-\text{плоскость},\\ y=z=0-\text{прямая}. \end{array}\right.$$

Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-\sqrt{3}z) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}(x-\sqrt{3}z) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x+2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на плоскости;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}x & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$ на прямой;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-\sqrt{3}z) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6}(2x+\sqrt{3}z-3\sqrt{4y^2+3z^2}) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(2x+\sqrt{3}z+3\sqrt{4y^2+3z^2}) \end{pmatrix}$ в области $D>0$.

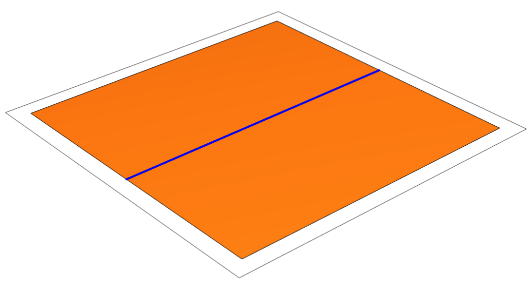

Рис. 2: случаи **III** и **VII**

Множество вырожденных точек имеет вид

$$y=0-\text{плоскость}.$$

В случае **IV** дискриминант имеет вид $D=4(y-z)^2(x-2y+z)^2((x+y-z)^2-8y(y-z))$. Тогда

$$4(y-z)^2(x-2y+z)^2((x+y-z)^2-8y(y-z))=0,$$

$$\left[\begin{array}{c} y-z=0-\text{плоскость},\\ x-2y+z=0-\text{плоскость},\\ (x+y-z)^2-8y(y-z)=0-\text{конус}. \end{array}\right.$$

Заметим, что конус касается плоскости $y-z=0$ по прямой $x=0, y-z=0$, а также касается плоскости $x-2y+z=0$ по прямой $x-2y+z=0, y-2z=0$. Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $x=0, y-z=0$;

- $\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $x - 2y + z = 0, y - 2z = 0$;
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ на плоскости $y - z = 0$ без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} x-y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & -x+2y \end{pmatrix}$ на плоскости $x - 2y + z = 0$ без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} y-z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x-y+z) & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x-y+z) \end{pmatrix}$ на конусе без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} y-z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x-y+z-\sqrt{a}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x-y+z+\sqrt{a}) \end{pmatrix}$ в области $D > 0$ (выделена желтым на рис. 3), где $a = (x+y-z)^2 - 8y(y-z)$.

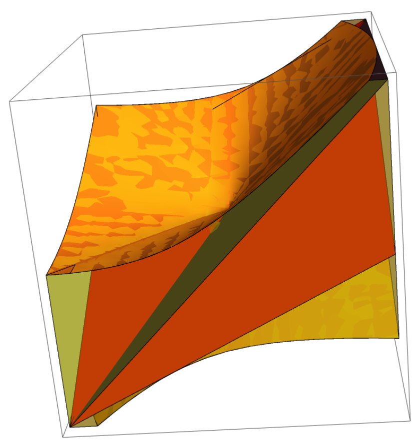

Рис. 3: случай **IV**

Множество вырожденных точек имеет вид

$$\left[\begin{array}{c} y - z = 0 - \text{плоскость}, \\ x - 2y + z = 0 - \text{плоскость}. \end{array}\right.$$

В случае **V** дискриминант имеет вид $D = -(y+z)^2(4x^3y - x^2y^2 - 18xy^3 + 31y^4 + 4x^3z + 2x^2yz - 18xy^2z + 100y^3z - x^2z^2 + 18xyz^2 + 162y^2z^2 + 18xz^3 + 116yz^3 + 23z^4)$. Тогда

$$-(y+z)^2(4x^3y - x^2y^2 - 18xy^3 + 31y^4 + 4x^3z + 2x^2yz - 18xy^2z + 100y^3z - x^2z^2 + \\ +18xyz^2 + 162y^2z^2 + 18xz^3 + 116yz^3 + 23z^4) = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} y + z = 0 - \text{плоскость}, \\ 4x^3y - x^2y^2 - 18xy^3 + 31y^4 + 4x^3z + 2x^2yz - 18xy^2z + 100y^3z - x^2z^2 + \\ +18xyz^2 + 162y^2z^2 + 18xz^3 + 116yz^3 + 23z^4 = 0. \end{array}\right.$$

Заметим, что плоскость касается поверхности по прямым $x = 0$, $y + z = 0$ и $y = 0$, $z = 0$. Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $x = 0, y + z = 0$;

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $y = 0, z = 0$;

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ на плоскости $y + z = 0$ без прямых пересечения;

- на поверхности без прямых пересечения жорданова нормальная форма имеет диагональный вид.

На рис. 4 (слева) область, где $D > 0$, выделена желтым. Множество вырожденных точек имеет вид

$$y + z = 0 - \text{плоскость.}$$

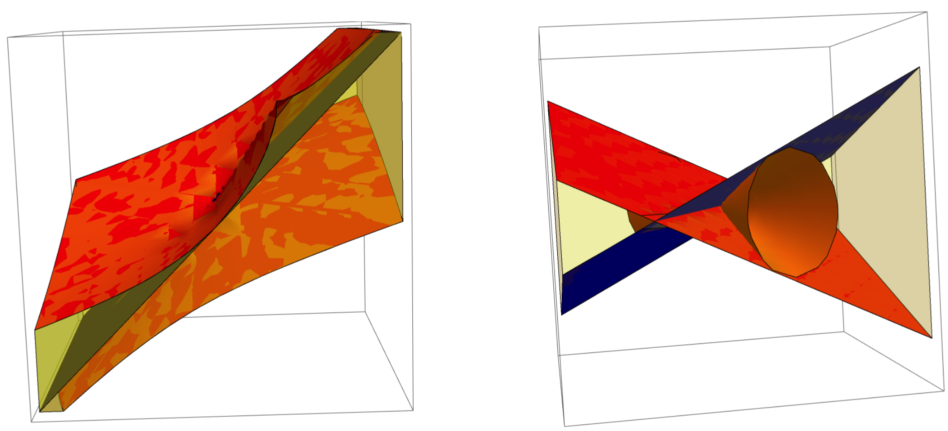

Рис. 4: случаи **V** (слева) и **VI** (справа)

В случае **VI** дискриминант имеет вид $D = \frac{1}{4}(x + 4y - 2z)(x - 4y - 2z)(y^2 + z(x + 2z))^2$. Тогда

$$(x + 4y - 2z)(x - 4y - 2z)(y^2 + z(x + 2z))^2 = 0,$$

$$\left[\begin{aligned} x + 4y - 2z = 0 - \text{плоскость,} \\ x - 4y - 2z = 0 - \text{плоскость,} \\ y^2 + z(x + 2z) = 0 - \text{конус.} \end{aligned}\right.$$

Заметим, что плоскости касаются конуса по прямым $x + 4y - 2z = 0, y - 2z = 0$ и $x - 4y - 2z = 0$, $y + 2z = 0$. Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} -y & 1 & 0 \\ 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & -y \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $x + 4y - 2z = 0$, $y - 2z = 0$;

- $\begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $x - 4y - 2z = 0$, $y + 2z = 0$;

- $\begin{pmatrix} -y & 1 & 0 \\ 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & -2(y-z) \end{pmatrix}$ на плоскости $x+4y-2z=0$ без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 2(y+z) \end{pmatrix}$ на плоскости $x-4y-2z=0$ без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} -2z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x+2z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x+2z) \end{pmatrix}$ на конусе без прямых пересечения;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x+z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(x-2z-\sqrt{(x-2z)^2-16y^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(x-2z+\sqrt{(x-2z)^2-16y^2}) \end{pmatrix}$ в области $D>0$ (выделена желтым на рис. 4 справа).

Множество вырожденных точек имеет вид

$$\left[\begin{aligned} &y=0 - \text{плоскость}, \\ &y^2+z(x+2z)=0 - \text{плоскость}. \end{aligned}\right.$$

В случае **VII** дискриминант имеет вид $D=-4(y^3+3yz^2)^2$. Тогда

$$-4(y^3+3yz^2)^2=0,$$
$$\left[\begin{aligned} &y=0 - \text{плоскость}, \\ &y=z=0 - \text{прямая}. \end{aligned}\right.$$

Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x+\sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x+\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на плоскости;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$ на прямой.

Множество вырожденных точек имеет вид

$$\left[\begin{aligned} &y=0 - \text{плоскость}, \\ &y=z=0 - \text{прямая}. \end{aligned}\right.$$

В случае **VIII** дискриминант имеет вид $D=y^4(3z^2-4y^2)$. Тогда

$$y^4(3z^2-4y^2)=0,$$
$$\left[\begin{aligned} &y=0 - \text{плоскость}, \\ &\sqrt{3}z-2y=0 - \text{плоскость}, \\ &\sqrt{3}z+2y=0 - \text{плоскость}. \end{aligned}\right.$$

Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$ прямой пересечения $y = 0, z = 0$;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - 2\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на плоскости $y = 0$ без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z) & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на паре плоскостей без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z - 3\sqrt{-4y^2 + 3z^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z + 3\sqrt{-4y^2 + 3z^2}) \end{pmatrix}$ в области $D > 0$ (выделена желтым на рис. 5).

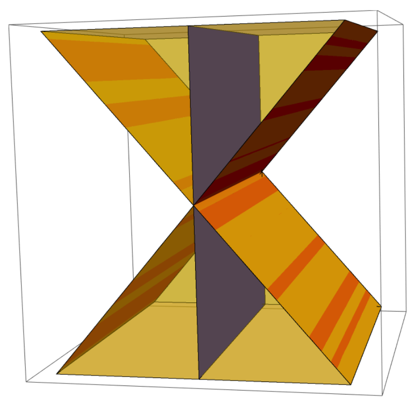

Рис. 5: случай **VIII**

Множество вырожденных точек имеет вид

$$y = 0.$$

Предложение 1. *Любые два оператора Нийенхейса из теоремы 1 имеют различные алгебраические типы (см. определение 3) в следующем смысле: не существует гомеоморфизма пространства $\mathbb{R}^3$ в себя, сохраняющего алгебраический тип оператора Нийенхейса.*

Доказательство. Выше найдено множество особых точек для каждого из восьми операторов (см. рис. 1—5) и найден знак дискриминанта в дополнении к этому множеству (на некоторых из рисунков область $D > 0$ показана желтым). Нетрудно видеть, что существует гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$ в себя, совмещающий множества особых точек ($D = 0$) только для следующих пар случаев: **II** и **VIII**, **III** и **VIII**, **IV** и **VI**. Но при таком геомеоморфизме не будет сохраняться знак D для каждой из этих пар случаев. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дегтярева С. Д. Классификация трехмерных линейных операторов Нийенхейса с функционально независимыми инвариантами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2024. №4. С. 63–67; Moscow University Mathematics Bulletin. 2024. Vol. 79, №4. P. 192–197.

2. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. Open problems, questions and challenges in finite-dimensional integrable systems // Phil. Trans. R. Soc. A. 2018. Vol. 376, №2131. 20170430 (40 pp.).

3. Konyaev A .Yu. Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators // Diff. Geom. Appl. 2021. Vol. 74. P. 101706 (32 pp.).

4. Bolsinov A. V., Konyaev A. Yu., Matveev V. S. Nijenhuis Geometry // Adv. Math. 2021. Vol. 394. P. 108001 (52 pp.).

5. Короткевич А. А. Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности // Математический сборник. 2009. Т. 200, №12. С. 3–40.

REFERENCES

1. Degtiareva, S. D. 2024, “Classification of three-dimensional linear Nijenhuis operators with functionally independent invariants”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 79, no. 4, pp. 192–197.

2. Bolsinov, A. V., Matveev, V. S., Miranda, E. & Tabachnikov, S. 2018, “Open problems, questions and challenges in finite-dimensional integrable systems”, *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 376, no. 2131, pp. 20170430 (40 pp.).

3. Konyaev, A. Yu. 2021, “Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators”, *Diff. Geom. Appl.*, vol. 74, pp. 101706 (32 pp.).

4. Bolsinov, A. V., Konyaev, A. Yu. & Matveev, V. S. 2021, “Nijenhuis Geometry”, *Adv. Math.*, vol. 394, pp. 108001 (52 pp.)

5. Korotkevich, A. A. 2009, “Integrable Hamiltonian systems on low-dimensional Lie algebras”, *Sb. Math.*, vol. 200, no. 12, pp. 1731–1766.

Получено: 14.04.2025
Принято в печать: 08.12.2025