ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511.348 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-53-72

О сумме квадратов четырёх простых чисел из арифметической прогрессии

И. Аллаков, О. Ш. Имамов

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан).
e-mail: iallakov@mail.ru
Имамов Ойбек Шаназарович — базовый докторант, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан)
e-mail: oybekimamov000@gmail.com

Аннотация

В работе изучается задача о представлении натурального числа n в виде суммы квадратов четырёх простых чисел из арифметической прогрессии. Оценено, количество натуральных чисел, которые нельзя представить в указанном виде, т.е. исключительное множество задачи. Также впервые получена оценка снизу для количества представлений данного не исключительного n в указанном виде.

Ключевые слова: диофантово уравнение; конгруэнтразрешимость; положительная разрешимость; исключительный нуль; L-функция Дирихле; символ Лежандра; малая дуга; большая дуга; особый ряд; особый интеграл.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Аллаков И., Имамов О. Ш. О сумме квадратов четырёх простых чисел из арифметической прогрессии // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 53–72.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 511.348 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-53-72

On the sum of the squares of four prime numbers from the arithmetic progression

I. Allakov, O. Sh. Imamov

Allakov Ismail —doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Termez, Uzbekistan).
e-mail: iallakov@mail.ru
Imamov Oybek Shanazarovich — basic doctoral student, Termez State University (Termez, Uzbekistan).
e-mail: oybekimamov000@gmail.com

Abstract

The work studies the problem of representing the natural number n as the sum of the squares of four prime numbers from an arithmetic progression. The number of natural numbers that cannot be represented in the specified form has been estimated, i.e. the exceptional set of the problem, is estimated.. Also, for the first time, a lower estimate was obtained for the number of representations of a given non-exceptional n in the indicated form.

Keywords: diophantine equation; congruent solution; positive solution; exceptional zero; Dirichlet L-function; Legendre symbol; minor arc; major arc; singular series; singular integral.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Allakov, I., Imamov, O. Sh. 2025, "On the sum of the squares of four prime numbers from the arithmetic progression", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 53–72.

1. Введение

Известно, что после доказательства теоремы Ж. Л. Лагранжа (см.§6.5., гл.VI [1]), о представлении заданного целого числа в виде суммы квадратов четырех целых чисел первым, кто обратил внимание на задачу представления данного целого числа в виде суммы квадратов четырех простых чисел $p_1, ..., p_4$ был Л. К.Хуа [2]. Пусть N-достаточно большое натуральное число и $U(N) = \{n \mid 1 < n \leqslant N, n \equiv 4(\mathrm{mod}24), n \neq p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\}$, $E(N) = cardU(N)$.

Л. К.Хуа доказал, что $E(N) \ll N\log^{-A}N$, где $A > 0-$ некоторая постоянная, $\ll -$ символ Виноградова. Jianya Liu и Ming-Chit Liu [3] улучшили этот результат и доказали новую оценку $E(N) \ll N^{\theta}$, при $\theta > 13/15$.

Yonghui Wang [4] доказал, что диофантово уравнение $n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2$ имеет решение, если выполняются условия $p_i \equiv b_i \,(\mathrm{mod}\, d)$, $(i = 1, 2, ..., 5)$, $d \leqslant N^{\delta}$, $n \equiv 5\,(\mathrm{mod}24)$. Здесь и далее $\delta > 0-$ достаточно малое число. Затем в работе [5] авторы настоящей работы получили оценки снизу для количества представлений данного $n, 1 < n \leqslant N, n \equiv 5(\mathrm{mod}24)$ в виде суммы квадратов пяти простых чисел из арифметической прогрессии. Кроме того О. Имамов [6] получил оценку снизу, для количества решений уравнения

$$n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2. \tag{1}$$

В данной статье мы исследуем существования решений уравнения (1) в простых числах из арифметической прогрессии. Для удобства введем следующие обозначения:

$$U\,(N, d) = \left\{\bar{b} \in \mathbb{N}^4 : \, 1 \leqslant b_i \leqslant d, \, (b_i, d) = 1, \quad b_1^2 + \cdots + b_4^2 \equiv n \,(\mathrm{mod}\sigma(d)d)\right\}. \tag{2}$$

В дальнейшем будем рассматривать $p_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\; d)$, $i = 1, ..., 4$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_4) \in U(N, d)$. Здесь $\sigma(d) = 1, 4, 2$ соответственно означает $2 \nmid d, \; 2 \,\|d$ и $4|d$.

Пусть $S_d\,(n)-$ количество решений уравнения (1) в простых числах $p_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\, d)$, $i = 1, ..., 4$; а $E_d\,(n)$— количество n $(2 < n \leqslant N)$, которые не представимо в виде суммы четырёх квадратов простых чисел из арифметической прогрессии $p_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\; d)$, $i = 1, ..., 4$. Положим $Q = N^{21\delta}$. Основным результатам настоящей работы является следующая.

Теорема. *Если $n \equiv 4\,(\mathrm{mod}24)$, $2 \leqslant d \leqslant N^{\delta}$, тогда справедлива оценка*

$$E_d(N) \ll N(Q^{15/14}\, d)^{-1}.$$

Метод, используемый в доказательстве теоремы, позволяет получить оценку для $S_d\,(n)$ при $N/50 < n \leqslant N$.

Следствие. *Для всех* n $(N/50 < n \leqslant N)$, *удовлетворяющие условию* $n \equiv 4\,(\mathrm{mod} 24)$, *за исключением не более чем* $E_d(N) \ll N\big(Q^{15/14}\,d\big)^{-1}$ *значений, справедлива оценка* $S_d\,(n) \gg$ $\gg n^{1-7\delta}(d^{1/2}\log^4 n)^{-1}$.

Результаты сформулированном теоремы не только является обобщением сооатветствующие резултать Jianya Liu и Ming-Chit Liu [3] простых чисел арифметической прогрессии, по внем улучщена оценка множества $E_d(N)$ в сравниние оценки $E_1(N)$ доказанные в [3] . Отметим также, что вперые получена оценки для $S_d(N)$. В доказательстве теоремы, будем использовать методы Харди-Литтлвуда [7] , метод И.М.Виноградова [8],[9] а также схема работы Аллакова [10].

Отметим оценка для $S_d(n)$, получена впервые и отличается от ожидаемого главного члена на $n^{-7\delta}$.

2. Обозначения и оценка интеграла по малым дугам

Введем обозначения:

$$T = N^{\sqrt{\delta}}, L = N/50, \tau = N^{-1}T^{\frac{1}{4}}, L_1 = \sqrt{L}, N_1 = \sqrt{N}. \tag{3}$$

Положим $e(y) = e^{2\pi i y}$ и $e_q(y) = e(y/q)$. Для любых a, q, $(a, q) = 1$ при $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q$, обозначим $\mathbf{m}\,(a, q) = \left[\frac{a-\tau}{q}, \frac{a+\tau}{q}\right]$. Легко видеть, что эти промежутки принадлежат интервалу $[\tau,\, 1+\tau]$ и не пересекаются (см. §2 , гл X [11] или п.3, §5 , гл II, [12]). Обозначим объединение $\mathbf{m}(a, q)$ через $\mathfrak{M}$, то есть $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{a,q} \mathbf{m}(a, q)$. Разность $[\tau,\, 1+\tau]\setminus\mathfrak{M}$ обозначим через $\mathfrak{m}$. Пусть

$$S_i(\alpha) = S_i(\alpha, d, b_i) = \sum_{\substack{L_1 < m_i \leqslant N_1 \\ m_i \equiv b_i (\bmod d)}} \Lambda(m_i) e(\alpha m_i^2), \tag{4}$$

и

$$\mathcal{R}(n) := \sum_{\substack{L_1 < n_i \leqslant N_1, \\ m_1^2 + \cdots + m_4^2 = n, \\ m_i \equiv b_i (\bmod d)}} \Lambda(m_1) \cdots \Lambda(m_4), \tag{5}$$

где $\Lambda(m)$-функция Мангольдта. Тогда, используя (4), $\mathcal{R}(n)$ можем представить в виде: $\mathcal{R}(n) = \int\limits_{\tau}^{1+\tau} \prod\limits_{i=1}^{4} S_i(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha$. Теперь $\mathcal{R}(n)$ можем записать в виде

$$\mathcal{R}(n) = \left\{ \int\limits_{\mathfrak{M}} + \int\limits_{\mathfrak{m}} \right\} \prod_{i=1}^{4} S_i(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \mathcal{R}_1(n) + \mathcal{R}_2(n). \tag{6}$$

В (6) интеграл по множестве $\mathfrak{M}$ обозначен как $\mathcal{R}_1(n)$, а интеграл по $\mathfrak{m}$ как $\mathcal{R}_2(n)$.

Оценим $\mathcal{R}_2(n)$. Для этого воспользуемся следующими леммами.

Лемма 2.1. *Если* $\left|\alpha - aq^{-1}\right| \leqslant q^{-2}$, $(a, q) = 1$, $d \leqslant N^{\delta}$ *и* $h = (q, d)$, *то для любого действительного числа* $\alpha \in \mathfrak{m}$ *при* $N > N_0(\delta)$ *справедлива оценка для* $S_i(\alpha) \ll N^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} Q^{-\frac{1}{2}}$.
Эта лемма следует из леммы 2.1 в [4].

Лемма 2.2. *Для всех* $n \leqslant N$, $\varepsilon < 0,6\delta$ *и* $n \equiv 4\,(\mathrm{mod} 24)$ *за исключением не более чем* $\ll NQ^{-15/14}\,d^{-1}$ *значений* n, *справедлива оценка*

$$|\mathcal{R}_2(n)| < NQ^{-3/7} d^{-1/2}. \tag{7}$$

Доказательство. Используя неравенство Бесселя (см. §4, гл.III, [13]) и лемму 2.1, получим

$$\sum_{N/2\leqslant n\leqslant N}\left|\mathcal{R}_2(n)\right|^2\ll\int_{\mathfrak{m}}|S(\alpha)|^8d\alpha\ll\left(N^{\frac12+\frac{\varepsilon}{2}}Q^{-\frac12}\right)^4\int_0^1|S(\alpha)|^4d\alpha$$

Так как

$$\int_0^1|S(\alpha)|^4d\alpha\leqslant\log^4N\int_0^1\left|\sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1\\ m_i\equiv b_i(\bmod d)}}e(\alpha m_i)\right|^4d\alpha$$

и согласно лемме Хуа (см. п.2.2, гл. II, [7]), существует такая постоянная c, что справедлива оценка

$$\int_0^1\left|\sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1\\ m_i\equiv b_i(\bmod d)}}e(\alpha m)\right|^4d\alpha\ll Nd^{-2}\log^cN,$$

то получим

$$\sum_{L<n\leqslant N}\left|\mathcal{R}_2(n)\right|^2\ll N^{3+2\varepsilon}Q^{-2}d^{-2}\log^{4+c}N.$$

Отсюда следует, что количество значений n, $n\leqslant N$ для которых $|\mathcal{R}_2(n)|\geqslant N(Q^{3/7}\,d^{1/2}\,)^{-1}$, не превосходит $< N(Q^{15/14}d)^{-1}$. То есть, для всех $L<n\leqslant N$ и $n\equiv 4\,(\mathrm{mod}24)$ за исключением не более чем $\ll N(Q^{15/14}d)^{-1}$ значений n, справедливо неравенство $|\mathcal{R}_2(n)|<N(Q^{3/7}d^{1/2})^{-1}$.

3. Упрощение интеграла $\mathcal{R}_1(n)$

Обозначим $h=(d,q)$ и для любого характера $\chi(mod\,dqh^{-1})$ и действительного числа y, $S_i(\chi,y)$ и интегралы сумму $I(y),\tilde{I}(y)$ и $I(\chi,y)$ определим следующими равенствами:

$$S_i(\chi,y):=S_i(\chi,y,d,q):=\sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1,\\ n_i\equiv b_i\left(\bmod dqh^{-1}\right)}}\chi(m_i)\Lambda(m_i)e({m_i}^2y),$$

$$I(y):=\int_{L_1}^{N_1}e(x^2y)dx,\ \ \tilde{I}(y):=\int_{L_1}^{N_1}x^{\tilde{\beta}-1}e(x^2y)dx,\ \ I(\chi,y):=\sum_{\gamma\leqslant T}{}'\int_{L_1}^{N_1}x^{\rho-1}e(x^2y)dx.$$

Здесь $\sum\limits_{\gamma\leqslant T}{}'$– обозначает сумму по всем нулям $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ в области $\frac12\leqslant\beta\leqslant1-c_1(\ln T)^{-1},\ |\gamma|\leqslant T$, за кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$.

Для дальнейших исследований нам понадобится следующие леммы.

Лемма 3.1. *Для любого действительного числа y и характера $\chi(mod\,dqh^{-1})$ при $dqh^{-1}\leqslant T$ справедливо следующее равенство*

$$S(\chi,y)=\delta_{\chi_0}I(y)-\delta_{\tilde{\chi}}\tilde{I}(y)-I(\chi,y)+O\left((1+|y|\,N)\,N_1T^{-1}\log^2N\right),$$

где $\delta_{\chi_0}=\begin{cases}1, & \text{если } \chi\equiv\chi_0(mod\,dqh^{-1}),\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}\qquad \delta_{\tilde{\chi}}=\begin{cases}1, & \text{если } \chi\equiv\tilde{\chi}\chi_0(mod\,dqh^{-1}),\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$

Доказательство этой леммы приведено в [11, 12, 14] (например, см. страницу 120 в [14]).

Чтобы упростить $\mathcal{R}_1(n)$ нам потребуются следующие обозначения. Для положительных целых чисел d, q обозначим $h\,(q) := (d,q)$, то есть наибольший общий делитель чисел d и q.Через положительные целые числа α_i, β_i, γ_i определим $h\,(q)$ следующим образом: $d = p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}d_0,\;\; q = p_1^{\beta_1}\cdots p_s^{\beta_s}q_0,\;\; (d_0,\, q_0) = 1,$

$$h\,(q) = p_1^{\gamma_1}\cdots p_s^{\gamma_s}, \tag{8}$$

где $\gamma_i = \min\left(\alpha_i,\, \beta_i\right),\; i = 1, ..., s$. Определим $h_1\,(q)$ и $h_2\,(q)$ следующим образом.

$$h_1\,(q) := p_1^{\delta_1}\cdots p_s^{\delta_s}, \delta_i = \begin{cases}\alpha_i, & \text{если } \beta_i > \alpha_i\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{9}$$

Согласно (8) и (9)

$$h_2\,(q) := h\,(q)/h_1\,(q). \tag{10}$$

Для удобства записи обозначим $h = h\,(q)$, $h_1 = h_1\,(q)$ и $h_2 = h_2\,(q)$. Легко видеть, что $(h_1,\, h_2) = 1$ и $(d/h_1, q/h_2\,) = 1$.

Лемма 3.2. *Если $\alpha = aq^{-1} + \lambda$, то справедливо равенство*

$$S_i(\alpha) = \varphi^{-1}\,(d/h_1\,)\,\varphi^{-1}\,(q/h_2\,) \sum_{\zeta(\bmod\ d/h_1)} \bar{\zeta}(b_i) \sum_{\eta(\bmod\ q/h_2)} G_i(a,\bar{\eta},q)S(\zeta\eta,\lambda) + O\left(\log^2 N\right),$$

где

$$G_i\,(a,\bar{\eta},q) = G\,(h,b_i,a,\bar{\eta},q) = \sum_{\substack{(c,q)=1\\ c\equiv b_i(\bmod\ h)}} e\left(ac^2/q\,\right)\bar{\eta}(c), \tag{11}$$

а η и ζ — характеры по модулям q/h_2 и d/h_1 соответственно.

Доказательство. В силу определения $S_i\,(\alpha)$ имеем:

$$S_i\,(\alpha) = \sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1,\\ m_i\equiv b_i(\bmod\ d)\\ (m_i,q)=1}} \Lambda(m_i)e\left(\alpha m_i^2\right) + O\left(\sum_{\substack{p^k\leqslant N_1\\ p|q}} \log p\, e(p^{2k}\alpha)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{(c,q)=1\\ c\equiv b_i(\bmod\ h)}} e\left(\frac{ac^2}{q}\right) \sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1\\ m_i\equiv b_i(\bmod\ d)\\ m_i\equiv c(\bmod\ q)}} \Lambda(m_i)e(m_i^2\lambda) + O\left(\log^2 N\right).$$

Если $c \equiv b_i(\mathrm{mod} h)$, то внутренняя сумма в главном члене превращается в нуль. Поэтому мы можем применить условие $c \equiv b_i(\mathrm{mod} h)$ к суммированию по c. С другой стороны, условие $c \equiv b_i(mod h)$ эквивалентно условиям $m_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\, d)$ и $m_i \equiv c(\mathrm{mod} q)$ которые, в свою очередь, эквивалентны условиям $m_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\, d/h_1)$, и $m_i \equiv c(\mathrm{mod}\, q/h_2\,)$. В этом случае, согласно свойству ортогональности характеров (см. §4,5, [14]), для $S_i\,(\alpha)$ справедливо следующее равенство

$$S_i\,(\alpha) = \varphi^{-1}\,(d/h_1\,)\,\varphi^{-1}\,(q/h_2\,) \sum_{\zeta(\bmod\ d/h_1)} \bar{\zeta}\,(b_i)\times$$

$$\times \sum_{\eta(\bmod\ q/h_2)} \sum_{\substack{(c,q)=1\\ c\equiv b_i(\bmod\ h)}} e\left(\frac{ac^2}{q}\right)\bar{\eta}\,(c) \sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1\\ m_i\equiv b_i(\bmod\ d)}} \zeta\eta(m_i)\Lambda(m_i)e(m_i^2\lambda) + O(\log^2 N).$$

Следовательно, используя (11) получим

$$S_i(\alpha)=\varphi^{-1}(d/h_1)\varphi^{-1}(q/h_2)\sum_{\zeta(\bmod d/h_1)}\bar{\zeta}(b_i)\sum_{\eta(\bmod q/h_2)}G_i(a,\bar{\eta},q)S(\zeta\eta,\lambda)+O\left(\log^2 N\right).$$

Отсюда следует утверждение леммы 3.2.

Теперь, используя приведённые леммы, упростим $R_1(n)$ следующим образом. Для любого $\alpha=a/q+\lambda\in\mathbf{m}(a,q)$ выполняются условия $|\lambda|<\tau/q$ и $q\leqslant Q$. Согласно леммам 3.1 и 3.2, $S_i(\alpha)$ можно записать следующим образом:

$$S_i(\alpha)=\varphi^{-1}(d/h_1)\varphi^{-1}(q/h_2)\{G_i(a,\bar{\eta}_0,q)I(\lambda)-\delta_q\tilde{\zeta}\zeta_0\,(b_i)\,G_i(a,\bar{\eta}\eta_0,q)\tilde{I}(\lambda)-$$

$$-\sum_{\zeta\,(\bmod d/h_1)\eta\,(\bmod q/h_2)}\tilde{\zeta}\,(b_i)\,G_i(a,\bar{\eta},q)\tilde{I}(\zeta\eta,\lambda)\}+$$

$$+O(\varphi^{-1}(q/h_2)\sum_{\eta\,(\bmod q/h_2)}|G_i(a,\bar{\eta},q)|(1+|\lambda|N)N^{1/2}T^{-1}\log^2 N)+O(\log^2 N),$$

где $\tilde{\zeta}\zeta_0\,(\bmod d/h_1)\,\tilde{\eta}\eta_0\,(\bmod q/h_2)=\tilde{\chi}\chi_0\,(\bmod dq/h\,)$, $\tilde{\zeta}$ и $\tilde{\eta}$ — примитивные характеры и

$$\delta_q:=\begin{cases}1, & \text{если существует } \tilde{\chi}\ (\bmod\tilde{r})\ \text{и}\ \tilde{r}\mid(dq/h),\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Так как $|\lambda|\ll\tau/q$ и $|\lambda|\,N<T^{1/4}q^{-1}$, то тривиально получаем следующую оценку: $\sum\limits_{\eta\,(\bmod q/h_2)}|G_i(a,\bar{\eta},q)|\ll\varphi(q/h_2)\varphi(q)$, $|G_i\,(a,\chi,q)|\leqslant\sum\limits_{\substack{(c,q)=1\\ c\equiv b_i(\bmod q)}}\left|e\left(\frac{ac^2}{q}\right)\right||\chi\,(c)|\leqslant\varphi\,(q)$.

Используя это и (3), можно оценить остаток следующим образом. $\ll\varphi(q)T^{1/4}q^{-1}N_1T^{-1}\log^2 N\ll N_1T^{-3/4}\log^2 N$. Таким образом, для $\alpha=a/q+\lambda\in\mathbf{m}\,(a,q)$ имеем следующего:

$$S_i\,(\alpha)=\varphi^{-1}\,(d/h_1\,)\,\varphi^{-1}\,(q/h_2\,)\,H_i\,(a,q,\lambda)+O\left(N_1T^{-3/4}\log^2 N\right). \tag{12}$$

где

$$H_i\,(a,q,\lambda):=G_i(a,\bar{\eta}_0,q)I(\lambda)-\delta_q\tilde{\zeta}\zeta_0\,(b_i)\,G_i(a,\bar{\eta}\eta_0,q)\tilde{I}(\lambda)-F_i\,(a,q,\lambda) \tag{13}$$

$$F_i\,(a,q,\lambda):=\sum_{\zeta\,(\bmod d/h_1)\eta\,(\bmod q/h_2)}\tilde{\zeta}\,(b_i)\,G_i(a,\bar{\eta},q)\tilde{I}(\zeta\eta,\lambda). \tag{14}$$

Согласно лемме 3.3. а) работы [4], имеем $\varphi^{-1}\,(d/h_1\,)\,\varphi^{-1}\,(q/h_2\,)\,H_i\,(a,q,\lambda)\ll\varphi\,(q)\,N_1$. Учитывая это и (12) из (6) получим

$$\mathcal{R}_1\,(n)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^4\left(\frac{d}{h_1}\right)\varphi^4\left(\frac{q}{h_2}\right)}\sum_{(a,q)=1}\int\limits_{-\tau/q}^{\tau/q}e\left(-n\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)\right)\prod_{i=1}^{4}H_i\,(a,q,\lambda)d\lambda+O\left(\frac{NQ^4\log^2 N}{T^{1/2}}\right).$$

В произведении $\prod\limits_{i=1}^{4}H_i\,(a,q,\lambda)$ содержится $(\varphi\,(dq/h)+2)^4$ слагаемых. Каждое из этих слагаемых представляет собой $\prod\limits_{i=1}^{4}E_i$, где E_i принимает одно из следующих значений: $G_i\,(q)\,I\,(\lambda)$, $-\delta_q\tilde{\zeta}\,(b_i)\,G_i(a,\bar{\eta}\eta_0,q)\tilde{I}(\lambda)$ или $-\tilde{\zeta}\,(b_i)\,G_i(a,\bar{\eta},q)I\,(\zeta\eta,\lambda)$ Используя оценки для $I\,(\lambda)$, $\tilde{I}\,(\lambda)$ и $I\,(\chi,\lambda)$ из пункта а) леммы 3.3 в [4], и учитывая, что $|\lambda|>\tau/q\ >L^{-1}$, видим, что среди этих оценок самой слабой является оценка $\ll N^{1/2}(L\,|\lambda|)^{-1/2}$. Тогда, на основании пункта b) леммы 3.3 из [4] и неравенства Коши, получаем

$$\int\limits_{R\setminus[-\tau/q,\,\tau/q\,]} \prod_{i=1}^{4} E_i d\lambda \ll \varphi^2\,(q)\,[\tau/q\,]^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |E_1 E_2| d\lambda \ll \varphi^4\,(q)\,[\tau/q\,]^{-1},$$

поскольку

$$|E_i| \ll |G_i\,(q)\,I\,(\lambda)| \ll \varphi\,(q)\,N^{1/2}(L\,|\lambda|)^{-1/2} \ll \varphi\,(q)\,(\tau/q)^{-1/2}.$$

Поэтому имеем оценку

$$\sum_{q\leqslant Q} \varphi^{-4}\,(d/h_1\,)\,\varphi^{-4}\,(q/h_2\,) \sum_{(a,q)=1} \int\limits_{R\setminus[-\tau/q,\,\tau/q\,]} e\,(-n\lambda) \prod_{i=1}^{4} H_i\,(a,q,\lambda) d\lambda \ll NQ^{-1}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_1\,(n) = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^4\left(\frac{d}{h_1}\right)\varphi^4\left(\frac{q}{h_2}\right)} \sum_{(a,q)=1} e_q\,(-na) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e\,(-n\lambda) \prod_{i=1}^{4} H_i\,(a,q,\lambda) d\lambda + O\left(NQ^{-1}\right). \quad (15)$$

4. Особый ряд и особый интеграл задачи

Для исследования особого ряда нам необходимо изучить следующие суммы :

$$Z\,(q) := Z\,(q,\eta_1,...,\eta_4) := \sum_{(a,q)=1} e_q\,(-na) \prod_{i=1}^{4} G_i\,(a,\eta_i,q), \quad (16)$$

$$Y\,(q) := Y\,(q,\eta_1,...,\eta_4) := \sum_{a=1}^{q} e_q\,(-na) \prod_{i=1}^{4} G_i\,(a,\eta_i,q), \quad (17)$$

где η_i характер по модулю $q/h_2\,(q)$. (17) можно записать в следующем виде:

$$Y\,(q,\eta_1,...,\eta_4) = q \sum_{(q)} \eta_1\,(c_1) \cdots \eta_4\,(c_4). \quad (18)$$

Здесь запись $\sum\limits_{(q)}$ – означает суммирование по всем $c_1,\ \dots\ ,c_4$, удовлетворяющим условиям

$$1 \leqslant c_1,\ \dots\ ,c_4 \leqslant q,\ c_i \equiv b_i\,(\operatorname{mod}\,(d,q))\,,(c_i,q) = 1, \sum_{i=1}^{4} c_i^2 \equiv n\,(\operatorname{mod} q). \quad (19)$$

Пусть $N\,(q)$- количество решений сравнения, удовлетворяющие условию (19). Из работы Jianya Liu и Ming-Chit Liu [3] следует, что если $n \equiv 4(\operatorname{mod} 24)$ и n удовлетворяет условию (2), то для всех q выполняется неравенство $N\,(q) \geqslant 1$. Если все η_i являются главными характерами, тогда из (18) получим

$$Y\,(q,\eta_0,...,\eta_0) = qN\,(q)\,. \quad (20)$$

Кроме того, мы обозначим

$$A\,(q) := \varphi^{-4}\left(q(d,q)^{\odot}/h\,\right) Z\,(q,\eta_0,...,\eta_0)\,, \quad (21)$$

где $(d,q)^{\odot}$— имеет те же простые делители, что (d,q) и $(d,q)^{\odot}\| \, d$ что означает: если $p^{\alpha}\| \, (d,q)^{\odot}$ то $p^{\alpha}\| \, d$.

Лемма 4.1. *Для любого положительного целого числа q справедлива оценка* $\varphi^{-4}\left(\frac{dq}{h(q)}\right)Z(q)\ll \frac{h^4(q)}{d^4}q^{-1}\mathcal{L}^{-4}$, *где* $\mathcal{L}=\log\log\frac{dq}{h(q)}$

Доказательство. Предположим, что $q=\prod\limits_{p|q}p^{\beta_p}$ является разложением числа q на простые множители. Тогда, из леммы 4.1 работы [4], учитывая, что функция $Z(q)$ является мультипликативной функцией получим:

$$|Z(q)|=\prod_{p|q}\left|\sum_{\left(a,p^{\beta_p}\right)=1}e\left(\frac{-na}{\beta_p}\right)\prod_{i=1}^{4}G_i\left(a,\eta_i,p^{\beta_p}\right)\right|\leqslant\prod_{p|q}\varphi\left(p^{\beta_p}\right)\prod_{i=1}^{4}2\,(2,p)\,p^{\frac{\beta_p}{2}}\ll q^3.$$

Теперь принимая во внимание, что $\varphi(q)\gg q/\log\log q$ получим утверждение леммы.

Если в лемме 4.4 работы [4] положить $\chi_1=\ldots=\chi_4=\chi_0$ и $\beta=0$, то получим следующее.

Следствие 4.2. *Пусть $N(q)$, $A(q)$ и $\alpha=\alpha(p)$ определены соответственно, как в (21), (20) и лемме 4.4 из работы [4]. Тогда справедливы следующие утверждения:*
a) Если $p\geqslant 3$, $t\geqslant 1+\alpha$, то $A\left(p^t\right)=0$ и если $t\geqslant 2+\max\{2,\alpha\}$, то $A\left(2^t\right)=0$;
b) Если $p\geqslant 3$, $t\geqslant\alpha$, то $p^t\varphi^{-4}\left(p^t\right)N\left(p^t\right)=p^{\alpha}\varphi^{-4}\left(p^{\alpha}\right)N\left(p^{\alpha}\right)$;
c) $t\geqslant\alpha'$, $a'=1+\max\{2,\alpha\}$, то $2^t\varphi^{-4}\left(2^t\right)N\left(2^t\right)=2^{\alpha'}\varphi^{-4}\left(p^{\alpha'}\right)N\left(p^{\alpha'}\right)$.

Далее, обозначим

$$s(p):=\sum_{0\leqslant t<\theta+\max\{\theta,\alpha(p)\}}A\left(p^t\right)=\varphi^{-4}\left(\sigma\left(p^{\alpha(p)}\right)p^{\alpha(p)}\right)N\left(\sigma\left(p^{\alpha(p)}\right)p^{\alpha(p)}\right)\sigma\left(p^{\alpha(p)}\right)p^{\alpha(p)}. \quad (22)$$

Здесь $\sigma(q)$ определено в (2). Теперь упростим $s(p)$.

Лемма 4.3. *Справедливы следующие утверждения:*
a) если $p\neq 2$ и $\alpha=\alpha(p)\geqslant 1$, то $s(p)=\varphi^{-4}\left(p^{\alpha}\right)p^{\alpha}$;
b)

$$s(2)=\begin{cases}2^3, & \text{если } \alpha(2)=1;\\ \varphi^{-5}\left(2^{\alpha(2)}\right)2^{\alpha(2)+1}, & \text{если } \alpha(2)\geqslant 2.\end{cases}$$

Поэтому $s(2)=\varphi^{-5}\left(2^{\alpha}\right)2^{\alpha}\sigma(d)$
c) если $p\neq 2$, $p\nmid d$, то $s(p)=1+A(p)$, если, $2\nmid d$ то $s(2)=1+A(2)+A\left(2^2\right)+A\left(2^3\right)$.

Доказательство. (a) В силу (22) имеем

$$s(p)=\sum_{0\leqslant t<\theta+\max\{\theta,\alpha(p)\}}A\left(p^t\right)=\sum_{0\leqslant t\leqslant\theta+\max\{\theta,\alpha(p)\}}\varphi^{-4}\left(p^t\left(d,p^t\right)^{\odot}/h\right)Z\left(p^t,\eta_0,\ldots,\eta_0\right)=$$

$$=\sum_{0\leqslant t\leqslant\theta+\max\{\theta,\alpha(p)\}}\varphi^{-4}\left(p^{\alpha}\right)Z\left(p^t\right)=\varphi^{-4}\left(p^{\alpha}\right)p^{\alpha}$$

b) Аналогичными рассуждениями при $t\leqslant\alpha$ получим, что $A\left(2^t\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)Z\left(2^t\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\varphi\left(2^t\right)$. Если $\alpha=1$ остаётся рассмотреть случаи $t=2,3$. Поскольку $\sum\limits_{(a,p^t)=1}=\sum\limits_{a=1}^{p^t}-\sum\limits_{\substack{a=1\\ p|a}}^{p^t}$, то

$$A\left(2^t\right)=\varphi^{-4}\left(2^t\right)\sum_{(a,2^t)=1}e\left(\frac{-na}{2^t}\right)\prod_{i=1}^{4}\left(\sum_{\substack{c_i=1\\ c_i\equiv b_i(\bmod 2)}}^{2^t}e\left(\frac{ac_i^2}{2^t}\right)\right)=$$

$$= \varphi^{-4}\left(2^t\right)\left(2^t N\left(2^t\right) - 2^{t-1}2^4 N\left(2^{t-1}\right)\right) = \varphi^{-4}\left(2^t\right)2^t N\left(2^t\right) - \varphi^{-4}\left(2^{t-1}\right)2^{t-1}N\left(2^{t-1}\right),$$

где $N\left(2^t\right)$ обозначает количество решений $\begin{cases} c_1^2 + ... + c_4^2 \equiv n \left(\mathrm{mod} 2^t\right) \\ c_i \equiv b_i \left(\mathrm{mod} 2\right) \end{cases}$ системы, которые удовлетворяют условию $1 \leqslant c_i \leqslant 2^t$, $(c_i, 2) = 1$.

Не посредственным вычислением видим, что $N\left(2^3\right) = 2^8$, $N(2) = 1$, то есть количество чисел c_i, удовлетворяющих условиям $1 \leqslant c_i \leqslant 2^3$ и $\left(c_i, 2^3\right) = 1$, равно $\varphi\left(2^3\right) = 2^2 = 4$. Поскольку в сравнение $c_1^2 + ... + c_4^2 \equiv n \left(\mathrm{mod} 2^t\right)$ число неизвестных равно четырём, перебором возможных значений c_i и их комбинируя находим, что число решений данного сравнения равно $4^4 = 2^8$. Сравнение $c_i \equiv b_i \left(\mathrm{mod} 2\right)$ при условии $(c_i, 2) = 1$ имеет единственное решение, следовательно, мы учли значения c_i только один раз, поэтому $N\left(2^3\right) = 2^8$. Аналогичными рассуждениями можно прийти к тому, что $N(2) = 1$. Тогда, учитывая, что при $t \leqslant \alpha$ выполняется $A\left(2^t\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)Z\left(2^t\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\varphi\left(2^t\right)$, мы имеем:

при $t = 0$, то $A\left(2^0\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)Z\left(2^0\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\varphi\left(2^0\right) = \varphi^{-4}\left(2^1\right)\varphi\left(2^0\right) = 1$,

при $t = 1$, то $A\left(2^1\right) = \varphi^{-4}\left(2^1\right)\varphi\left(2^1\right) = \varphi^{-4}\left(2^1\right)\varphi\left(2^1\right) = 1$.

если учитывать, что при $t > \alpha$ выполняется $A\left(2^t\right) = \varphi^{-4}\left(2^t\right)2^t N\left(2^t\right) - \varphi^{-4}\left(2^{t-1}\right)2^{t-1}N\left(2^{t-1}\right)$, то получаем

$t = 2$, $A\left(2^2\right) = \varphi^{-4}\left(2^2\right)2^2 N\left(2^2\right) - \varphi^{-4}\left(2^1\right)2^1 N\left(2^1\right)$,

$t = 3$, $A\left(2^3\right) = \varphi^{-4}\left(2^3\right)2^3 N\left(2^3\right) - \varphi^{-4}\left(2^2\right)2^2 N\left(2^2\right)$.

Обобщая это, получаем следующую оценку для $s(2)$.

$s(2) = 1 + A(2) + A\left(2^2\right) + A\left(2^3\right) = 1 + 1 - \varphi^{-4}(2)\,2N(2) + \varphi^{-4}\left(2^3\right)2^3 N\left(2^3\right) = 2 - 2 + \frac{2^3 2^8}{\left(2^2\right)^4} = 2^3$.

Если $\alpha > 1$, остается рассмотреть случай $t = \alpha + 1$. В этом случае имеем:

$$A\left(2^{\alpha+1}\right) = \varphi^{-4}\left(2^{\alpha+1}\right)\sum_{\left(a, 2^{\alpha+1}\right)=1} e\left(\frac{-na}{2^{\alpha+1}}\right)\prod_{i=1}^{4}\left(\sum_{\substack{c_i=1 \\ c_i \equiv b_i (\bmod 2^\alpha)}}^{2^{\alpha+1}} e\left(\frac{ac_i^2}{2^{\alpha+1}}\right)\right) =$$

$$\varphi^{-4}\left(2^{\alpha+1}\right)\left(2^{\alpha+1}N\left(2^{\alpha+1}\right) - 2^4 Y\left(2^\alpha\right)\right) = \varphi^{-4}\left(2^{\alpha+1}\right)2^{\alpha+1}N\left(2^{\alpha+1}\right) - \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)2^\alpha,$$

где $N\left(2^{\alpha+1}\right)$ обозначает количество решений $\begin{cases} c_1^2 + ... + c_4^2 \equiv n \left(\mathrm{mod} 2^{\alpha+1}\right) \\ c_i \equiv b_i \left(\mathrm{mod} 2^\alpha\right) \end{cases}$ системы, которые удовлетворяют условию $1 \leqslant c_i \leqslant 2^{\alpha+1}$, $(c_i, 2) = 1$. Следуя тем же рассуждениям, что при вычислении $N\left(2^3\right)$, мы получим $N\left(2^{\alpha+1}\right) = 2^4$. Если учитывать, что при $t \leqslant \alpha$ выполняется $A\left(2^t\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)Z\left(2^t\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\varphi\left(2^t\right)$, то

$t = 0$, $A\left(2^0\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)Z\left(2^0\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\varphi\left(2^0\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)$,

$t = 1$, $A\left(2^1\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)Z\left(2^1\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\varphi\left(2^1\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)$,

$t = 2$, $A\left(2^2\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)Z\left(2^2\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\varphi\left(2^2\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\left(2^2 - 2\right)$,

$t = 3$, $A\left(2^3\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)Z\left(2^3\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\varphi\left(2^3\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\left(2^3 - 2^2\right)$,

...

$t = \alpha - 1$, $A\left(2^{\alpha-1}\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)Z\left(2^{\alpha-1}\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\varphi\left(2^{\alpha-1}\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\left(2^{\alpha-1} - 2^\alpha\right)$,

$t = \alpha$, $A\left(2^\alpha\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)Z\left(2^\alpha\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\varphi\left(2^\alpha\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)\left(2^\alpha - 2^{\alpha-1}\right)$,

Если учитывать, что при $t > \alpha$ выполняется

$A\left(2^t\right) = \varphi^{-4}\left(2^t\right)2^t N\left(2^t\right) - \varphi^{-4}\left(2^{t-1}\right)2^{t-1}N\left(2^{t-1}\right)$, то получаем

$t = \alpha + 1$, $A\left(2^{\alpha+1}\right) = \varphi^{-4}\left(2^{\alpha+1}\right)2^{\alpha+1}N\left(2^{\alpha+1}\right) - \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)2^\alpha$

Обобщая это, получаем следующую оценку для $s(2)$.

$s(2) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right) + A(2) + ... + A\left(2^\alpha\right) + A\left(2^{\alpha+1}\right) = \varphi^{-4}\left(2^\alpha\right)2^{\alpha+1}$.

Утверждение (c) непосредственно следует из равенства (22) и следствия 4.2. В самое деле. Если $p \neq 2$, $p \nmid d$, то $s(p) = 1 + A(p)$, $0 \leqslant t < \theta + \max\{\theta, \alpha(p)\}$, $\theta = 1 + [2/p\,] = 1 + 0 = 1$, $0 \leqslant t < 1 + \max\{1, \alpha\}$. По следствию 4.2 (a), при $p \geqslant 3$, $t \geqslant 1 + \alpha$, так как $A\left(p^t\right) = 0$, имеем:

$s(p)=\sum\limits_{0\leqslant t<1+\alpha} A\left(p^t\right)=1+A(p)$. Если $2\nmid d$, то $s(p)=1+A(p)$, $0\leqslant t<\theta+\max\{\theta,\alpha(p)\}$, $\theta=1+[2/2\,]=1+1=2$, $0\leqslant t<2+\max\{2,\alpha\}$. По следствию 4.2 (a), при $t\geqslant 2+\max\{2,\alpha\}$ так как $A\left(2^t\right)=0$, имеем: $s(2)=\sum\limits_{0\leqslant t<2+\max\{2,\alpha\}} A\left(2^t\right)=1+A(2)+A\left(2^2\right)+A\left(2^3\right)$

Лемма 4.4. *Справедливы следующие утверждения:*
(a) если $p\nmid d$ то, $A(p)<9p^{-2}$;
(b) $\prod\limits_p s(p)$ абсолютно сходящийся и $\prod\limits_p s(p)\gg\varphi^{-4}(d)\,d\sigma(d)$
(c) $\sum\limits_{\substack{q=1\\(q,r)=1}}^{\infty}\varphi^{-4}(dq/h\,)Z(q;\eta_0,...,\eta_0)=\prod\limits_{p\nmid r}s(p)=\frac{\sigma(d/(d,r)\,)d/(d,r)}{\varphi^4(d/(d,r)\,)}\prod\limits_{\substack{p\nmid r\\p\nmid d}}s(p)$;
(d) $\sum\limits_{q\geqslant y}\varphi^{-4}(dq/h\,)Z(q;\eta_0,...,\eta_0)\ll y^{-1}d^{-2}\log^9(y+1)$.

Доказательство. (a) Если $p\nmid d$, то $h(p)=1$. Пусть g квадратные невычет по модулю p. Тогда

$$A(p)=\varphi^{-4}(p)\sum_{a=1}^{p-1}\left(e\left(\frac{-na}{p}\right)\prod_{i=1}^{4}\left(\sum_{c_i=1}^{p-1}e\left(\frac{ac_i^2}{p}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\varphi^{-4}(p)\sum_{a=1}^{p-1}\left(e\left(\frac{-na^2}{p}\right)\prod_{i=1}^{4}C_p\left(a^2\right)+e\left(\frac{-nga^2}{p}\right)\prod_{i=1}^{4}C_p\left(ga^2\right)\right).$$

Здесь $C_p(a)=\sum\limits_{c=1}^{p-1}e\left(\frac{ac^2}{p}\right)$. Далее, рассуждаю как доказательстве леммы 9 в работы [10] находим

$$A(p)=\frac{1}{2}\varphi^{-4}(p)\begin{cases}2(p-1)\left(\lambda^4+6\lambda^2+1\right), & \text{если } p\,|n,\\ -2\left(\lambda^4+10\lambda^2+1\right), & \text{если } p\nmid n \text{ и } \left(\dfrac{n}{p}\right)=1,\\ 2\left(3\lambda^4-2\lambda^2-1\right) & \text{если } p\nmid n \text{ и } \left(\dfrac{n}{p}\right)=-1,\end{cases}$$

где $\left(\frac{n}{p}\right)$ – символ Лежандра и

$$\lambda=\begin{cases}\sqrt{p}\,, & \text{если}\, p\equiv 1\,(\mathrm{mod}4)\,,\\ 0\,, & \text{если } p\equiv 2\,(\mathrm{mod}4)\,,\\ i\sqrt{p}, & \text{если } p\equiv -1\,(\mathrm{mod}4)\,.\end{cases}$$

Следовательно, при $p\neq 2$, $p\nmid d$ выполняется неравенство $|A(p)|<9p^{-2}$.
(b) На основании леммы 4.3 и леммы 4.4 (a), имеем;
$\prod\limits_p s(p)=\prod\limits_{p|d}s(p)\prod\limits_{p\nmid d}(1+A(p))\gg\sigma(d)\,\varphi^{-4}(d)\,d$.

Сходимость доказывается аналогичным образом.

(c) Пусть $q=q'q''$, $(q',\,q'')=1$ и $q'|\,d^{\odot}$, $(q'',d)=1$. В силу мультипликативности $Z(q)$ имеем

$$\sum_{\substack{q=1\\(q,r)=1}}^{\infty}\varphi^{-4}(dq/h\,)Z(q)=\left(\sum_{\substack{q'=1,\,(q',r)=1\\q'|d^{\odot}}}^{\infty}\varphi^{-4}\left(dq'/h\,\right)Z\left(q'\right)\right)\left(\sum_{\substack{q''=1,\,(q'',r)=1\\(q'',d)=1}}^{\infty}\varphi^{-4}\left(dq''/h\,\right)Z\left(q''\right)\right).$$

Отсюда используя следствия 4.2, равенства (22) и леммы 4.3 получим утверждение c).

(d) Пусть $\delta = (\log (y+1))^{-1}$. Поскольку $1 + nx \ll (1-x)^{-n}$ и $\zeta(1+\delta) \sim \delta^{-1}$ находим

$$\sum_{q \geqslant y} \varphi^{-4}(dq/h\,) Z(q) \leqslant \sum_{q \geqslant y} |A(q)| \ll y^{-1} \frac{d}{\varphi^4(d)} \prod_{p|d} p^{\alpha(p)} \prod_{p} \left(1 - p^{-1-\delta}\right)^{-9} \ll y^{-1} \frac{d^2}{\varphi^4(d)} \delta^{-9}.$$

Лемма 4.5. *Пусть* $r_i| \left(\frac{dq}{h}\right)$ *,* $i = 1, ..., 4$ *и* $\chi_i(\mathrm{mod} r_i) = \zeta_i \left(\mathrm{mod}\left(r_i, \frac{q}{h_1}\right)\right) \eta_i \left(\mathrm{mod}\left(r_i, \frac{q}{h_2}\right)\right)$ *все примитивные характеры, и пусть* $r = [r_1, ..., r_4]$*, тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) $\sum\limits_{\substack{q \leqslant Q \\ r|(dq/h\,)}} \left|\varphi^{-4}(dq/h\,) Z(q, \eta_1\eta_0, ..., \eta_4\eta_0) \prod\limits_{i=1}^{4} \zeta_i\zeta_0(b_i)\right| \ll r^{-1}\mathcal{L}^{-4}$ *;*

(b) Пусть $\alpha(p)$ *определено так же, как в лемме 4.4 из работе [4], и пусть* $r_i = r_i^{(1)} r_i^{(2)}$*,* $\left(r_i^{(1)}, r_i^{(2)}\right) = 1$*, причем выполняется* $p^\beta \| r_i^{(1)}$*, тогда* $\beta \leqslant \alpha(p)$*, а если* $p^\beta \| r_i^{(2)}$*, то* $\beta \leqslant \alpha(p)$*. Если* $d = d_1 d_2$*,* $(d_1, d_2) = 1$*,* $p^\beta \| r$ *и* $p| d_1$*, то* $\beta \leqslant \alpha(p)$*. Если* $p^\beta \| r$ *и* $p| d_2$*, то* $\beta > \alpha(p)$*. Если* $r^{(1)} = \left[r_1^{(1)}, ..., r_4^{(1)}\right]$ *и* $\chi_i(\mathrm{mod} r_i) = \chi_i^{(1)}\left(\mathrm{mod} r_i^{(1)}\right) \chi_i^{(2)}\left(\mathrm{mod} r_i^{(2)}\right)$*, то получаем:*

$$\mathcal{F} := \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ r|(dq/h\,)}} \varphi^{-4}\left(\frac{dq}{h}\right) Z(q, \eta_1\eta_0, ..., \eta_4\eta_0) \prod_{i=1}^{4} \zeta_i\zeta_0(b_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \chi_i^{(2)}(b_i)(\mathrm{mod} r_2) \frac{\sigma(d_1) d_1}{\varphi^4(d_1)} \cdot \frac{Y\left(\sigma\left(r^{(1)}\right) r^{(1)}\right)}{\varphi^4\left(\sigma\left(r^{(1)}\right) r^{(1)}\right)} \prod_{\substack{p \nmid d \\ p \nmid r}} s(p) + O\left(Q^{-1}\log^9 Q\right).$$

Доказательство. Утверждения (a) непосредственно следует из леммы 4.1. Докажем (b). Воспользуемся мультипликативности $Z(q)$ и $Y(q)$. Пусть $d = d'd''$, $q = q'q''$, $(d'', r) = 1$, $(q'', r) = 1$ и $d'|r^{\odot}$, $q'|r^{\odot}$. Здесь $q|\,r^{\odot}$ означает, что каждый простой множитель q является делителем r. Для удобства обозначим $h'' = h''(q)$, $h' = h'(q)$, $h''_i = h''_i(q)$, $h'_i = h'_i(q)$. В соответствии с (10) и тем, что $r_i|\,(dq/h\,)$, имеем:

$$\mathcal{F} := \sum_{\substack{q' \leqslant Q,\, r'|d'q'/h' \\ q'|r^{\infty},\, d'|r^{\infty}}} \varphi^{-4}\left(\frac{d'q'}{h'}\right) Z\left(q', \eta_1\eta_0, ..., \eta_4\eta_0\right) \prod_{i=1}^{4} \zeta_i\zeta_0(b_i) \times$$

$$\times \sum_{\substack{q'' \leqslant Q/q' \\ (q'', r)=1,\, (d'', r)=1}} \varphi^{-4}\left(\frac{d''q''}{h''}\right) Z\left(q'', \eta_0, ..., \eta_0\right) =: \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2. \tag{23}$$

В силу (c) и (d) леммы 4.4, имеем:

$$\mathcal{F}_2 = \left(\sum_{\substack{q''=1 \\ (q'', r)=1, \\ (d'', r)=1}}^{\infty} - \sum_{q'' \geqslant Q/q'}\right) \frac{1}{\varphi^4\left(\frac{d''q''}{h''}\right)} Z\left(q'', \eta_0, ..., \eta_0\right) = \frac{\sigma(d'') d''}{\varphi^4(d'')} \prod_{\substack{p \nmid r \\ p \nmid d''}} s(p) + O\left(\frac{q'\log^9 Q}{Q d''^2}\right). \tag{24}$$

Таким образом, согласно лемме 4.1 и пункту (a) леммы 4.5, из равенства (23) и (24) следует

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \varphi^{-4}\left(d''\right)\sigma\left(d''\right)d'' \prod_{\substack{p\nmid r\\ p\nmid d''}} s\left(p\right) + O\left(\sum_{\substack{q'\leqslant Q\\ r|d'q'/h'}} q' Q^{-1}\left(d''\right)^{-2}\log^9 Q\left(q'\right)^{-1}\mathcal{L}^{-4}\right) =$$

$$= \mathcal{F}_1 \varphi^{-4}\left(d''\right)\sigma\left(d''\right)d'' \prod_{\substack{p\nmid r\\ p\nmid d''}} s\left(p\right) + O\left(Q^{-1}\left(d''\right)^{-2}\tau\left(d\right)\log^9 Q\right). \tag{25}$$

Поскольку далее в доказательстве будет показано, что число q' будет меньше функции числа делителей $\tau\left(d\right)$. Предположим, что $q' = m'm''$, где $\left(m'', d\right) = 1$ и $m'|\left(d'\right)^{\odot}$, а также $r_i = {r'}_i {r''}_i$, при этом $\left(r'', d\right) = 1$ и $r'|\left(d'\right)^{\odot}$. Понятно, что $m'|\left(r, d\right)^{\odot}$ и выполняются следующие соотношения: $\zeta_i\left(\bmod\left(r_i, q'/{h'}_1\right)\right) = {\zeta'}_i\left(\bmod\left({r'}_i, q'/{h'}_1\right)\right)$, $\eta_i\left(\bmod\left(r_i, q'/{h'}_2\right)\right) =$
$= {\eta'}_i\left(\bmod\left({r'}_i, m'/h_2\left(m'\right)\right)\right){\eta''}_i\left(\bmod\left({r''}_i, m''/h_2\left(m''\right)\right)\right)$ Воспользовавшись тем, что $Z\left(q\right)$ является мультипликативной функцией, получаем:

$$\mathcal{F}_1 = \sum_{\substack{m''\leqslant Q\\ r''|m''}} \varphi^{-4}\left(m''\right) Z\left(m'', {\eta''}_1, ..., {\eta''}_4\right)\prod_{i=1}^{4}\zeta_i\zeta_0\left(b_i\right)\times$$

$$\times \sum_{\substack{q'\leqslant Q\\ r'|m'd'/h'}} \varphi^{-4}\left(\frac{d'q'}{h'}\right) Z\left(m', {\eta'}_1\eta_0, ..., {\eta'}_4\eta_0\right)\prod_{i=1}^{4}{\zeta'}_i\zeta_0\left(b_i\right) =: G_1 G_2. \tag{26}$$

В рассуждениях леммы 3.8 работы [15], используя (15), и на основании леммы 4.4 из работы [4], получаем, что если выполняется условие $\sigma\left(r''\right)r'' \leqslant Q$, то $G_1 = \varphi^{-4}\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)Y\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)$. В действительности, мы можем предположить, что $\sigma\left(r\right)r \leqslant Q$ если же $\sigma\left(r\right)r > Q$, то, на основании леммы 4.1 и части (a) леммы 4.5, получаем оценки:
$\mathcal{F}_1 \ll Q^{-1}\mathcal{L}$, $\varphi^{-4}\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)Y\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)G_2 \ll \left(r'r''\right)^{-1}\mathcal{L}^2 \ll Q^{-1}\mathcal{L}^2$. Из этого и из (26) следует

$$\mathcal{F}_1 = \varphi^{-4}\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)Y\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)G_2 + O\left(Q^{-1}\mathcal{L}^2\right) \tag{27}$$

Кроме того, мы можем предположить, что $\sigma\left(r'\right)r' \leqslant Q/m''$; в противном случае, если $\sigma\left(r'\right)r' > Q/m''$, то согласно части (a) леммы 4.5, имеем $G_2 \ll Q^{-1}(m'')^{-1}\mathcal{L}$. Тогда, в силу леммы 4.1, $\mathcal{F}_1 \ll \sum\limits_{\substack{m''\leqslant Q\\ r''|m''}} Q^{-1}\mathcal{L}^2 \ll Q^{-1}\mathcal{L}^2$, поскольку, как и в доказательстве леммы 3.8 из работы [15], $m'' = ur''$. Следовательно, сумма по $\sigma\left(r'\right)r' > Q/m''$ входит в остаточный член.

Теперь упростим G_2 при условии $\sigma\left(r'\right)r' \leqslant Q/m''$. Поскольку $m'|\left(d'\right)^{\odot}$ и $m'|\left(r'\right)^{\odot}$ являются выражениями для $m'|\left(r, d\right)^{\odot}|r^{\odot}, d^{\odot}$, мы можем записать $d' = p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_t}$ $r' = p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}$, $m' = p_1^{s_1}\cdots p_t^{s_t}$. Здесь $p_i^{\alpha_i}\| d$, $p_i^{\beta_i}\Big\| r$ va $\alpha_i, \beta_i > 0$. Из условия $p_i^{\beta_i}\left|\frac{p_i^{s_i}p_i^{\alpha_i}}{h\left(p_i^{s_i}\right)}\right.$, если $\beta_i > \alpha_i$, то $s_i > \beta_i$; если $\beta_i \leqslant \alpha_i$, то $s_i \geqslant 0$. Таким образом, мы получаем ${\zeta'}_i\left(\bmod\left({r'}_i, d'|\, h_1\left(m'\right)\right)\right) =$
$= \prod\limits_{\substack{\beta_j\leqslant\alpha_j\\ s_j\leqslant\alpha_j}} \zeta_{ij}\left(\bmod p_j^{\beta_j}\right)$, ${\eta'}_i\left(\bmod\left(r_i, m'|\, h_2\left(m'\right)\right)\right) = \prod\limits_{\substack{\beta_j\leqslant\alpha_j\\ s_j>\alpha_j}} \eta_{ij}\left(\bmod p_j^{\beta_j}\right)\prod\limits_{\beta_j>\alpha_j}\eta_{ij}\left(\bmod p_j^{\beta_j}\right)$ Пусть $\prod\limits_{j=1}^{u}\chi_{ij}\left(\bmod p_j^{\beta_j}\right) = {\zeta'}_i{\eta'}_i\left(\bmod {r'}_i\right)$, тогда можно записать

$$\chi_{ij} = \begin{cases}\zeta_{ij}, \text{ если } \beta_j \leqslant \alpha_j, \ \ s_j \leqslant \alpha_j,\\ \eta_{ij}, \text{ если } \beta_j \leqslant \alpha_j, \ \ s_j > \alpha_j,\\ \eta_{ij}, \text{ если } \beta_j > \alpha_j.\end{cases}$$

На основании лемм 4.2 и 4.4 работы [4], а также равенства (26), получаем

$$G_2 = W_2 \prod_{\substack{p_j \neq 2 \\ \beta_j > \alpha_j}} \varphi^{-4}\left(p_j^{\beta_j}\right) Y\left(p_j^{\beta_j};\, \chi_{1j}\eta_0, ..., \chi_{4j}\eta_0\right) \prod_{\substack{p_j \neq 2 \\ \beta_j \leqslant \alpha_j}} W_{p_j} \tag{28}$$

Здесь $W_{p_j} = \varphi^{-4}\left(p_j^{\alpha_j}\right)\left(\sum\limits_{t=0}^{\alpha_j} Z\left(p_j^t;\, \eta_0, ..., \eta_0\right) \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{ij}\zeta_0\left(b_i\right)\right)$ и в силу пунктов (b) и (c) леммы 4.4 работы [4] имеем

$$W_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } 2 \nmid (r,d)\,, \\ \varphi^{-4}\left(2^{\beta_2+1}\right) Y\left(2^{\beta_2+1}\right), & \text{если } \ 2|\,(r,d)\,,\ \beta_2 > \alpha_2 > 0, \\ \varphi^{-4}(2)\left(\sum\limits_{t=0}^{1} Z\left(2^t;\, \eta_0, ..., \eta_0\right) \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{i2}\zeta_0\left(b_i\right)\right) + & \\ \quad + \sum\limits_{t=2}^{3} \varphi^{-4}\left(2^t\right) Z\left(2^t;\, \chi_{12}\eta_0, ..., \chi_{42}\eta_0\right), & \text{если } \ 2|\,(r,d)\,,\ \beta_2 \leqslant \alpha_2 = 1, \\ \varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\left(\sum\limits_{t=0}^{\alpha} Z\left(2^t;\, \eta_0, ..., \eta_0\right) \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{i2}\zeta_0\left(b_i\right)\right) + & \\ \quad + \varphi^{-4}\left(2^{\alpha+1}\right) Z\left(2^{\alpha+1};\, \chi_{12}\eta_0, ..., \chi_{42}\eta_0\right), & \text{если } \ 2|\,(r,d)\,,\ \beta_2 \leqslant \alpha_2,\ \alpha_2 > 1. \end{cases}$$

Мы оцениваем W_2 при $2|\,(r,d)$, $\beta_2 \leqslant \alpha_2$ и W_{p_j} при $\beta_j \leqslant \alpha_j$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 4.4 из работы [4] и исходя из равенства (11), получаем, что при $t \leqslant \alpha(p)$ и $(b_i, d) = 1$ выполняется $\prod\limits_{i=1}^{4} \zeta_{ij}\zeta_0\left(b_i\right) Z\left(p_j^t\right) = \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{ij}\left(b_i\right)\varphi\left(p^t\right)$. Тогда при $W_{p_j} = \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{ij}\left(b_i\right)\varphi^{-4}\left(p^{\alpha(p)}\right)p^{\alpha(p)}$ и $2|\,(r,d)$ имеем следующее равенство:

$$Z\left(2^{\alpha_2+1}\right) = \sum_{\left(\alpha,\, 2^{\alpha_2+1}\right)=1} e\left(-\frac{na}{2^{\alpha_2+1}}\right) \prod_{i=1}^{4} e\left(\frac{ac_i^2}{2^{\alpha_2+1}}\right)\chi_{i2}\eta_0\left(c_i\right) =$$

$$= Y\left(2^{\alpha_2+1}\right) - 2^{\alpha_2}2^4 \prod_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right) = \left(2^{\alpha_2+1} N\left(2^{\alpha_2+1}\right) - 2^{\alpha_2+4}\right) \prod_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right).$$

Таким образом, при $\alpha_2 > 1$ из доказательства утверждения (b) леммы 4.3 видно, что $N\left(2^{\alpha_2+1}\right) = 2^4$ и следовательно, получаем $W_2 = \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right)\varphi^{-4}\left(2^{\alpha_2}\right)2^{\alpha_2+1}$. Если $\alpha_2 = 1$, то $\beta_2 = 1$, поскольку $0 < \beta_2 \leqslant \alpha_2$ и следовательно,

$$W_2 = \varphi^{-4}(2)\left(\sum_{t=0}^{1} Z\left(2^t;\, \eta_0, ..., \eta_0\right) \prod_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right)\right) + \sum_{t=2}^{3} \varphi^{-4}\left(2^t\right) Z\left(2^t;\, \chi_{12}\eta_0, ..., \chi_{42}\eta_0\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right)\left(1 + A(2) + A\left(2^2\right) + A\left(2^3\right)\right) = 2^3 \prod_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right)$$

Последнее равенство следует из доказательства утверждения (b) леммы 4.3. Поэтому при $2 \nmid (r,d)$ получаем

$$W_2 = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right) \dfrac{\sigma\left(2^{\alpha_2}\right)2^{\alpha_2}}{\varphi^4\left(2^{\alpha_2}\right)}, & \text{если } \alpha_2 \geqslant \beta_2, \\ \varphi^{-4}\left(2^{\beta_2+1}\right) Y\left(2^{\beta_2+1}\right), & \text{если } \alpha_2 < \beta_2. \end{cases} \tag{29}$$

Тогда, на основании равенств (25)-(29), получаем равенство
$\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{4} \chi_i^{(2)}(b_i)\,(\bmod r_2)\,\frac{\sigma(d_1)d_1}{\varphi^4(d_1)} \cdot \frac{Y\left(\sigma\left(r^{(1)}\right)r^{(1)}\right)}{\varphi^4\left(\sigma\left(r^{(1)}\right)r^{(1)}\right)} \prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid r}} s(p) + O\left(Q^{-1}\log^9 Q\right)$. Здесь остаточный член следует из леммы 4.4 работы [4] и пункта (а) леммы 4.5.

Лемма 4.6. *Для любых комплексных чисел* ρ_i, $0 < \operatorname{Re}\rho_i \leqslant 1$, $i = 1, ..., 4$, *выполняется следующее равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(-n\eta) \prod_{i=1}^{4} \left(\int_{L_1}^{N_1} x^{\rho_i - 1} e\left(\eta x^2\right) dx \right) d\eta = \frac{N}{2^4} \int_{D} \prod_{i=1}^{4} (Nx_i)^{(\rho_i - 1)/2} x_i^{-1/2} dx_1 ... dx_3. \tag{30}$$

где $x_4 := nN_1^{-2} - \sum_{i=1}^{3} x_i$ *и*

$$D := \{(x_1, ..., x_3) : L/N \leqslant x_1, x_2, x_3, x_4 \leqslant 1\}. \tag{31}$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\int_{D} \left(\prod_{i=1}^{4} x_i^{-1/2} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \gg 1. \tag{32}$$

Доказательство. Доказывается путем рассуждений, аналогичных доказательству леммы 4.9 из работы [4].

5. Оценка интеграла $\mathcal{R}_1(n)$ и завершение доказательства теоремы

Теперь постараемся получить необходимую нижнюю оценку для $\mathcal{R}_1(n)$. Как видно из (13), произведение $\prod_{i=1}^{4} H_i(a, q, \lambda)$ представляет собой сумму из 3^4 слагаемого. Эти слагаемые мы разобьём на следующие три категории.

(C1): $\prod_{i=1}^{4} G_i(a, \bar{\eta}_0, q) I(\lambda)$ слагаемое;

(C2): 65 слагаемых, в каждом из которых множитель $F_i(a, q, \lambda)$ входит по крайней мере один раз;

(C3): 15 оставшихся слагаемых.

Для удобства обозначим

$$\mathcal{T}_i = \sum_{q \leqslant Q} \varphi^{-4}(dq/h) \sum_{(a,q)=1} e_q(-n\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e(-n\lambda) \{\text{ сумма слагаемых в } (C_i)\}\, d\lambda, \tag{33}$$

при $i = 1, 2, 3$. На основании (15) имеем

$$\mathcal{R}_1(n) = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + \left(NQ^{-1}\right) \tag{34}$$

Мы будем выбирать $m_1, m_2, ...$ различных чисел из множества $\{1, \ldots, 4\}$. Введём следующие обозначения:

$$P(m_1, m_2, ...) := N2^{-4} \int_{D} \left(\prod_{i=1}^{4} x_i^{-1/2} \right) (Nx_{m_1})^{(\tilde{\beta}-1)/2} (Nx_{m_2})^{(\tilde{\beta}-1)/2} ...\, dx_1 dx_2 dx_3, \tag{35}$$

и

$$\Delta\left(m_1, m_2, ...\right) := \tilde{\chi}\left(n_{m_1}\right)\tilde{\chi}\left(n_{m_2}\right)... \tag{36}$$

Здесь область D определяется с помощью (31), а $\tilde{\chi}$ и $\tilde{\beta}$ обозначают, соответственно, исключительные характеры и исключительные нули. Пусть

$$P_0 := N2^{-4}\int\limits_D\left(\prod_{i=1}^{4}x_i^{-1/2}\right)dx_1dx_2dx_3. \tag{37}$$

Из (32), (35) и (37) следует справедливость равенства

$$\left|P\left(m_1, m_2, ...\right)\right| \leqslant P_0 \ll N. \tag{38}$$

Лемма 5.1. *Справедливо следующее равенство.*

$$\mathcal{T}_1 = \varphi^{-4}\left(d\right)\sigma\left(d\right)d\prod_{p\nmid d}s\left(p\right)P_0 + O\left(Nd^{-2}Q^{-1}\log^9 Q\right).$$

Доказательство. На основании (33)

$$\mathcal{T}_1 = \sum_{q\leqslant Q}\varphi^{-4}\left(dq/h\ \right)\sum_{(a,q)=1}e_q\left(-n\alpha\right)\prod_{i=1}^{4}G_i(a,\bar{\eta}_0,q)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e\left(-n\lambda\right)\prod_{i=1}^{4}I\left(\lambda\right)d\lambda.$$

Согласно равен(37) указанный выше интеграл равен P_0. В силу (16) две суммы в приведённом выше равенстве равны $\sum\limits_{q\leqslant Q}\varphi^{-4}\left(dq/h\ \right)Z\left(q\right)$. На основании пунктов (c) и (d) леммы 4.4 можем писать следующее.

$$\sum_{q\leqslant Q}\varphi^{-4}\left(dq/h\ \right)Z\left(q\right) = \varphi^{-4}\left(d\right)\sigma\left(d\right)d\prod_{p\nmid d}s\left(p\right) + O\left(\sum_{q>Q}\left|A\left(q\right)\right|\right) =$$

$$= \varphi^{-4}\left(d\right)\sigma\left(d\right)d\prod_{p\nmid d}s\left(p\right) + O\left(Q^{-1}d^{-2}\log^9 Q\right).$$

Из этого и равенства (38) следует доказательство леммы.

Лемма 5.2. *Если существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$, а параметры $\tilde{r}_1$ и d_1 определяются так, как в утверждении (b) леммы 4.5, и если положить $r^{(1)} = \tilde{r}_1$, то выполняются утверждения:*
(a)

$$\mathcal{T}_3 = \frac{\sigma\left(d_1\right)d_1}{\varphi^4\left(d_1\right)}\cdot\frac{\sigma\left(\tilde{r}_1\right)\tilde{r}_1}{\varphi^4\left(\sigma\left(\tilde{r}_1\right)\tilde{r}_1\right)}\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid\tilde{r}_1}}s\left(p\right)\times\sum_{(\sigma(\tilde{r}_1)\tilde{r}_1)}\left(-\sum_{i=1}^{4}\Delta\left(i\right)P\left(i\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\cdots+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\Delta\left(i,j\right)P\left(i,j\right)-\cdots+\Delta\left(1,2,3,4\right)P\left(1,2,3,4\right)\right)+O\left(\frac{N\log^9 Q}{Q}\right).$$

(b) $\mathcal{T}_3 \ll N\tilde{r}_1{}^{-1}\mathcal{L}$

Доказательство. На основании (13) 15 слагаемых из (C3) можно разделить на 5 типов в зависимости от количества множителей $\tilde{\zeta}(b_i)\, G_i(a,\tilde{\eta},q)\, \tilde{I}(\lambda)$. Слагаемое типа с k множителями имеет вид $(-1)^k \delta_q \left(\prod\limits_{i=1}^{k} \tilde{\zeta}(b_i)\, G_i(a,\tilde{\eta},q)\, \tilde{I}(\lambda)\right)\left(\prod\limits_{i=k+1}^{4} G_i(a,\eta_0,q)\, I(\lambda)\right)$. Если $\mathcal{T}_{3,k}$ обозначает вклад такого слагаемого в $\mathcal{T}_3$, то на основании (33) получаем следующее.

$$\mathcal{T}_{3,k} = (-1)^k \left(\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{r}|q}} \varphi^{-4}(dq/h) \sum_{(a,q)=1} e_q(-n\alpha) \prod_{i=1}^{k} \tilde{\zeta}(b_i)\, G_i(a,\tilde{\eta},q) \prod_{i=k+1}^{4} G_i(a,\eta_0,q)\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e(-n\lambda)\, \tilde{I}^k(\lambda)\, I^{4-k}(\lambda)\, d\lambda =: (-1)^k WB.$$

Интеграл по (30) равен $P(1,\ldots,k)$. Согласно (16), W представляет собой следующий сингулярный ряд: $W = \sum\limits_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{r}|q}} \varphi^{-4}(dq/h)\, Z(q,\tilde{\eta}\eta_0,\ldots,\tilde{\eta}\eta_0,\eta_0,\ldots,\eta_0)\, \tilde{\zeta}\zeta_0\cdot\ldots\cdot\tilde{\zeta}\zeta_0\cdot\zeta_0\cdot\ldots\cdot\zeta_0$. Учитывая, что в пункте (b) леммы 4.5 выполняется

$$\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ r|dq/h}} \varphi^{-4}\left(\frac{dq}{h}\right) Z(q,\eta_1\eta_0,\ldots,\eta_4\eta_0) \prod_{i=1}^{4} \zeta_i\zeta_0(b_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \chi_i^{(2)}(b_i)\,(\mathrm{mod}\, r_2)\, \frac{\sigma(d_1)\, d_1}{\varphi^4(d_1)} \cdot \frac{Y\left(\sigma\left(r^{(1)}\right) r^{(1)}\right)}{\varphi^4\left(\sigma\left(r^{(1)}\right) r^{(1)}\right)} \prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid r}} s(p) + O\left(Q^{-1}\log^9 Q\right).$$

(36) равенство и $Y(\sigma\tilde{r}_1) = \sigma\tilde{r}_1 \sum\limits_{(\sigma\tilde{r}_1)} \ldots$, получаем выражение для

$$\mathcal{T}_{3,k} = (-1)^k \frac{\sigma(d_1)\, d_1}{\varphi^4(d_1)} \cdot \frac{\sigma(\tilde{r}_1)\, \tilde{r}_1}{\varphi^4(\sigma(\tilde{r}_1)\, \tilde{r}_1)} \prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid \tilde{r}_1}} s(p) \sum_{(\sigma(\tilde{r}_1)\tilde{r}_1)} \Delta(1,\ldots,k)\, P(1,\ldots,k) + O\left(NQ^{-1}\log^9 Q\right).$$

Таким образом, суммируя вклады по всем k, получаем утверждение (a). Утверждение (b) следует из леммы 4.1.

Определим Ω следующим образом: $\Omega = \begin{cases} \left(1-\tilde{\beta}\right)\log T, & \text{если существует } \tilde{\beta},\\ 1, & \text{в противном случае.}\end{cases}$

Из следствия 4.2, леммы 4.3 и равенства (22) получаем следующие результаты.

$$\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid \tilde{r}_1}} s(p) = \sigma\left(r''\right) r'' \varphi^{-4}\left(\sigma\left(r''\right) {r''}_1\right) N\left(\sigma\left(r''\right) {r''}_1\right), \tag{39}$$

$$\frac{\sigma\left({r'}_1\right) {r'}_1}{\varphi^4\left(\sigma\left({r'}_1\right) {r'}_1\right)} N\left(\sigma\left({r'}_1\right) r'\right) = \frac{\sigma(d_2)\, d_2}{\varphi^4(\sigma(d_2)\, d_2)} N(\sigma(d_2)\, d_2) = \frac{\sigma(d_2)\, d_2}{\varphi^4(d_2)}. \tag{40}$$

Здесь $r''r' = r, (r'',r') = 1,\ (r'',d) = 1,\ r'|\,d^{\odot},\ {r'}_1,\ d\,|(r,d)$ имеют одинаковые простые множители, и степень каждого простого делителя числа d_2 меньше степени соответствующего делителя в ${r'}_1$. Таким образом, мы можем записать $\mathcal{T}_1$ в следующем виде.

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\sigma(d_1)\, d_1}{\varphi^4(d_1)} \cdot \frac{\sigma(\tilde{r}_1)\, \tilde{r}_1}{\varphi^4(\sigma(\tilde{r}_1)\, \tilde{r}_1)} \prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid \tilde{r}_1}} s(p) \sum_{(\sigma(\tilde{r}_1)\tilde{r}_1)} P_0 + O\left(Nd^{-2}Q^{-1}\log^9 Q\right).$$

Используя выражение для $\mathcal{T}_3$ из утверждения (a) леммы 5.2, получаем

$$\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_3=\frac{\sigma\left(d_1\right)d_1}{\varphi^4\left(d_1\right)}\cdot\frac{\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1}{\varphi^4\left(\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1\right)}\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid \tilde r_1}}s\left(p\right)N2^{-4}\sum_{\left(\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1\right)}\int\limits_D\left(\prod_{i=1}^4 x_i^{-1/2}\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^4\left(1-\tilde\chi(Nx_i)^{(\tilde\beta-1)/2}\right)dx_1dx_2dx_3+O\left(NQ^{-1}\log^9 Q\right). \qquad (41)$$

Остаётся оценить интеграл. Так как $\prod\limits_{i=1}^4\left(1-\tilde\chi(Nx_i)^{(\tilde\beta-1)/2}\right)=\prod\limits_{i=1}^4\left(1-L^{(\tilde\beta-1)/2}\right)$ является голоморфной в области D, при этом $x_i\geqslant L/N$. Таким образом, получаем следующее:

$$1-L^{\frac{\tilde\beta-1}{2}}\geqslant 1-\exp\left(-\frac12\left(1-\tilde\beta\right)\log N\right)\geqslant\min\left\{\frac12,\,\frac14\left(\left(1-\tilde\beta\right)\log N\right)\right\}\geqslant\Omega.$$

В этом случае главный член в (41) имеет следующий вид:

$$\gg\Omega^4\frac{\sigma\left(d_1\right)d_1}{\varphi^4\left(d_1\right)}\cdot\frac{\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1}{\varphi^4\left(\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1\right)}\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid \tilde r_1}}s\left(p\right)\sum_{\left(\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1\right)}P_0.$$

Поэтому, на основании (39) и (40), справедлива следующая.

Лемма 5.3.

$$\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_3\geqslant\Omega^4\varphi^{-4}\left(d\right)\sigma\left(d\right)d\prod_{p\nmid d}s\left(p\right)P_0+O\left(NQ^{-1}\log^9 Q\right).$$

Теперь оценим $\mathcal{T}_2$.

Лемма 5.4.

$$\mathcal{T}_2\ll\Omega^4\exp\left(-c/\sqrt{\delta}\right)\varphi^{-4}\left(d\right)\sigma\left(d\right)d\prod_{p\nmid d}s\left(p\right)P_0+O\left(NQ^{-1}\log^9 Q\right).$$

Доказательство. Поскольку выполняется равенство (13) и (14), в каждом слагаемом из (C2) присутствует множитель вида $\sum\limits_{\zeta\eta}\bar\zeta\left(b_i\right)G_i\left(a,\bar\eta,q\right)I\left(\zeta\eta,\lambda\right)$. Действительно, мы ограничимся указанием метода оценки для типичного слагаемого вида

$$\delta_q\left(\prod_{i=1}^2\sum_{\zeta\eta}\bar\zeta\left(b_i\right)G_i\left(a,\bar\eta,q\right)I\left(\zeta\eta,\lambda\right)\right)G_3\left(a,\eta_0,q\right)I\left(\lambda\right)\tilde\beta\left(b_4\right)G_4\left(a,\tilde\eta,q\right)\tilde I\left(\lambda\right).$$

Вклад этого слагаемого в $\mathcal{T}_2$ обозначим через κ. Согласно (33),

$$\kappa=\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde r|dq/h}}\delta_q\varphi^{-4}\left(dq/h\right)\sum_{(a,q)=1}e_q\left(-na\right)G_3\left(a,\eta_0,q\right)\tilde\zeta\left(b_4\right)G_4\left(a,\tilde\eta,q\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{i=1}^2\sum_{\zeta\eta}\bar\zeta\left(b_i\right)G_i\left(a,\bar\eta,q\right)\right)\sum_{|\gamma|\leqslant T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e\left(-n\lambda\right)\left(\prod_{i=1}^2\int\limits_{L_1}^{N_1}x^{\rho_i-1}e\left(\lambda x^2\right)dx\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{L_1}^{N_1}e\left(\lambda x^2\right)dx\right)\left(\int\limits_{L_1}^{N_1}x^{\tilde\beta-1}e\left(\lambda x^2\right)dx\right)d\lambda.$$

В соответствии с (30), $\int\limits_{-\infty}^{\infty}...d\lambda$ равно $\frac{N}{2^4}\int\limits_{D}\left(\prod\limits_{i=1}^{4}x_i^{-1/2}\right)\left(\prod\limits_{i=1}^{2}(Nx_i)^{(\rho_i-1)/2}\right)(Nx_i)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}}dx_1dx_2dx_3$. Как известно [13], каждый характер интегрируется (т.е. получается) с помощью единственного примитивного характера, и наоборот, для каждого характера $\chi^*(\mathrm{mod} r)$ и для каждого делителя r числа q существует единственный характер $\chi(\mathrm{mod} q)$, индуцированный характером χ^*. Кроме того, функция Дирихле $L(s,\chi^*)$ и $L(s,\chi)$ имеют нули с положительной действительной частью, кроме тривиальных. Соответственно, переставив порядок суммирования в κ, мы можем писать κ следующим образом:

$$\kappa = N2^{-4}\int\limits_{D}\left(\prod_{i=1}^{4}x_i^{-1/2}\right)(Nx_4)^{(\tilde{\beta}-1)/2}\left(\prod_{i=1}^{2}\sum_{r_i\leqslant dQ}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi_i\equiv\zeta_i\eta_i(\bmod r_i)}\ \sideset{}{'}\sum_{|\gamma|\leqslant T}(Nx_i)^{(\rho_i-1)/2}\right)\times$$

$$\times\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{r}|dq/h}}\varphi^{-4}(dq/h)\sum_{(a,q)=1}G_3(a,\eta_0,q)\,\tilde{\zeta}\zeta_0(b_4)\,G_4(a,\tilde{\eta}\eta_0,q)\left(\prod_{i=1}^{2}\bar{\zeta}(b_i)\,G_i(a,\bar{\eta},q)\right)dx_1dx_2dx_3. \tag{42}$$

Здесь $\sum^*$– означает сумму по всем примитивным характерам по модулю r_i, а $r=[r_1,r_2,\tilde{r}]$. В соответствии с леммой 4.5, внутренняя сумма $\sum\limits_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{r}|dq/h}}$ равна выражению

$\prod\limits_{i=1}^{2}\chi_i^{(2)}(b_i)\tilde{\chi}_i^{(2)}(b_i)\,\varphi^{-4}(d_1)\,\sigma(d_1)\,d_1\cdot\frac{Y\left(\sigma\left(r^{(1)}\right)r^{(1)}\right)}{\varphi^4\left(\sigma\left(r^{(1)}\right)r^{(1)}\right)}\prod\limits_{p\nmid d,r}s(p)+O\left(Nd^{-2}Q^{-1}\log^9 Q\right)$. Здесь d_1 и $r^{(1)}$ определяются так же, как в пункте (b) леммы 4.5. В силу того, что $Y(\sigma(\tilde{r}_1)\tilde{r}_1)\leqslant$ $\leqslant\sigma(\tilde{r}_1)\tilde{r}_1N(\sigma(\tilde{r}_1)\tilde{r}_1)$ комбинируя это с (39) и (40), получаем следующее:

$$\left|\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ r|dq/h}}...\right|\leqslant\varphi^{-4}(d)\,\sigma(d)\,d\prod_{p\nmid d}s(p)+O\left(Nd^{-2}Q^{-1}\log^9 Q\right).$$

На основе идеи [16] и доказательства леммы 6.2 из [15], с применением метода большого сито, для любого числа c и любого действительного числа $y\geqslant N_1$ справедливо неравенство:

$$\sum_{q\leqslant T}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod q})}\ \sideset{}{'}\sum_{|\gamma|\leqslant T}y^{\beta-1}\ll\Omega^4\exp\left(-c/\sqrt{\delta}\right).$$

Используя это в кратной сумме из (42) и комбинируя с (31), мы получаем доказательство леммы. Объединяя полученные выше результаты и используя равенство (34), мы можем получить оценку для $\mathcal{R}_1(n)$. Для этого рассмотрим два случая.

1-случай. Если не существует $\tilde{\beta}$-исключительный нуль L-функции Дирихле или же он существует и модуль соответствующего исключительного характера $\tilde{r}>Q^{1/8}$. Из леммы 5.1 и части (b) леммы 5.2, а также из лемм 5.4 при достаточно малом δ, получим:

$$\mathcal{R}_1(n)\geqslant\frac{1}{2}\varphi^{-4}(d)\,\sigma(d)\,d\prod_{p\nmid d}s(p)\,P_0+O\left(NQ^{-1/8}\log^9 Q\right). \tag{43}$$

Тогда, согласно леммы 4.4 (a), имеем: $\mathcal{R}_1(n)\gg N\left(Q^{5/42}\,d^{1/2}\right)^{-1}$. Здесь $d\leqslant Q^{1/21}$.

2-случай. Если существует $\tilde{\beta}$-исключительный нуль L-функции Дирихле и модуль соответствующего исключительного характера $\tilde{r}\leqslant Q^{1/8}$. Тогда, исполдьзуля на леммы 5.3 и 5.4 и при достаточно малом δ, получим:

$$\mathcal{R}_1(n)\geqslant\frac{1}{2}\Omega^4\varphi^{-4}(d)\,\sigma(d)\,d\prod_{p\nmid d}s(p)\,P_0+O\left(NQ^{-1}\log^9 Q\right). \tag{44}$$

Отсюда, учитывая, что $\Omega \gg \left(\tilde{r}^{\frac{1}{2}}\log^2\tilde{r}\right)^{-1}\log T \gg Q^{-1/16}\log^{-1}Q$, имеем: $\mathcal{R}_1\left(n\right) \gg N\left(Q^{1/3}d^{1/2}\right)^{-1}$.

Из оценки (43), (44) и (7) следуют, что $\mathcal{R}_1\left(n\right) > \left|\mathcal{R}_2\left(n\right)\right|$. Таким образом, наша теорема доказана.

6. Доказательство следствие

Используя равенство (5), для $\mathcal{R}\left(n\right)$ получим:

$$\mathcal{R}\left(n\right) \leqslant S_d\left(n\right)\log^4 N + O\left(N_1^{3/2}\log N\right). \tag{45}$$

Согласно равенству (6), имеем: $\mathcal{R}\left(n\right) > \mathcal{R}_1\left(n\right) - \left|\mathcal{R}_2\left(n\right)\right|$. Используя оценки $\mathcal{R}_1\left(n\right)$ и $\mathcal{R}_2\left(n\right)$, а также (45), получим: $\mathcal{R}_1\left(n\right) - \left|\mathcal{R}_2\left(n\right)\right| \leqslant S_d\left(n\right)\log^4 N + O\left(N_1^{3/2}\log N\right)$. Отсюда следует: $S_d\left(n\right) \geqslant \frac{\mathcal{R}_1(n)-|\mathcal{R}_2(n)|}{\log^4 N} - O\left(N_1^{3/2}\log^{-3}N\right)$ и следовательно, $S_d\left(n\right) \gg \frac{N}{Q^{1/3}d^{1/2}\log^4 N}$. Пользуясь тем, что $Q = N^{21\delta}$, а также условиями $n \equiv 4\,(\mathrm{mod}\,24)$, $L < n \leqslant N$, получим, что для всех n за исключением не более, чем $E_d(N) \ll N\left(Q^{15/14}\,d\right)^{-1}$ значений из них справедлива оценка: $S_d\left(n\right) \gg n^{1-7\delta}\left(d^{1/2}\log^4 n\right)^{-1}$. Следствие доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нестеренко, Ю.В. Теория чисел. М:Издательский центр Академия. 2008. 272 с.

2. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел.// Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1947, том 22, с. 3-179.

3. Jianya Liu va Ming-Chit Liu. The exceptional set in the four prime squares problem. // Illinois journal of mathematics. 2000, Vol. 44, № 2, pp.272-293.

4. Wang, Y. Numbers representable by five prime squares with primes in an arithmetic progression. // Acta Arithmetica. 1999, Vol.90, № 3, pp.217–244.

5. Allakov I., Imamov O. A lower estimate for the quantity of a natural number represented as a sum of five squared prime numbers from an arithmetic progression.// Bull. Inst. Math., 2024, Vol.7, № 4, pp. 86-93

6. Imamov O. On numbers representable as the sum of four squares of prime numbers. // Samarkand University Scientific Bulletin., 2025, № 1, pp.106-110

7. Vaughan R.C.The Hardy-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press. 1997. 232 p.

8. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1971.

9. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976.

10. Аллаков И., Музропова Н.С. О решении одного уравнения в простых числах.// Чебышевский сборник. 2024, том 25 № 4 с.5-26

11. Карацуба, А.А. Основы аналитической теории чисел. -М.: Наука, 1983. -240 с.

12. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. Термез. Изд. «Сурхан нашр» 2021. 160с.

13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976 г. 543 с
14. Davenport H.Multiplicative number theory.Third edition.Springer. New York. 2000. 177p
15. Liu M. C. and Tsang K. M. Small prime solutions of some additive equations.// Monatsh. Math. 1991 vol. 111 , pp. 147–169.
16. Gallagher P. X. A large sieve density estimates near. // Invent. Math.1970 vol. 11, pp.329–339.

REFERENCES

1. Nesterenko, Yu. V. 2008. Number Theory. Moscow: Publishing Center "Akademiya 272 p.
2. Hua Lo-Ken. 1947. Additive prime number theory.// Tr. Math. Institute named after V.A. Steklova, vol.22. pp. 3–179.
3. Jianya Liu va Ming-Chit Liu. 2000. The exceptional set in the four prime squares problem.// Illinois journal of mathematics. V. 44, № 2,
4. Wang, Y. 1999. Numbers representable by five prime squares with primes in an arithmetic progression.// Acta Arithmetica, Vol.90, № 3, pp.217–244.
5. Allakov I., Imamov O.Sh. 2024. A lower estimate for the quantity of a natural number represented as a sum of five squared prime numbers from an arithmetic progression.// Bull. Inst. Math., Vol.7, №4, pp. 86-93
6. Imamov O.Sh. 2025. On numbers representable as the sum of four squares of prime numbers.// Samarkand University Scientific Bulletin. № 1, pp.106-110
7. Vaughan R.C. 1997.The Hardy-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press.232 p.
8. Vinogradov, I. M. 1971. The Method of Trigonometric Sums in Number Theory. Moscow: Nauka,
9. Vinogradov, I. M. 1976. Special Variants of the Method of Trigonometric Sums. Moscow: Nauka, Main Editorial Office for Physical and Mathematical Literature, (In Russian)
10. Allakov I., Muzropova N.S. 2024. The solution of some equation in primes. Chebyshevskii Sbornik. vol. 25 № 4 pp.5-26. (In Russ.)
11. Karatsuba A.A. 1983. Fundamentals of analytic number theory , Moscow, Nauka. 240 p.(in Russian).
12. Allakov I. 2021. “Estimation of trigonometric sums and their applications to the solution of some additive problems in number theory”, Termez, Surxon nashr. 160 p.
13. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. 1976. “Elements of the theory of functions and functional analysis”, Moscow, Nauka. 543 p.
14. Davenport H. 2000. Multiplicative Number Theory. Third edition, Springer, 177 p.
15. Liu M. C. and Tsang K. M. 1991. Small prime solutions of some additive equations.// Monatsh. Math. vol. 111, pp. 147–169.
16. Gallagher P. X. 1970. A large sieve density estimates near. // Invent. Math. vol. 11, pp.329–339.

Получено: 29.04.2025
Принято в печать: 08.12.2025