

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 519.6

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-17-41

Нечеткие линейные системы<sup>1</sup>

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, А. А. Соловьев

**Агаян Сергей Мартикович** — доктор физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).

*e-mail: s.agayan@gcras.ru*

**Богоутдинов Шамиль Рафекович** — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН; Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (г. Москва).

*e-mail: shm@gcras.ru*

**Соловьев Анатолий Александрович** — доктор физико-математических наук, Геофизический центр РАН; Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (г. Москва).

*e-mail: a.soloviev@gcras.ru*

## Аннотация

Для системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)  $Ax = b$  в конечномерном евклидовом пространстве  $E$  с помощью ортогонализации Грама-Шмидта получено конструктивное описание многообразия ее решений  $\Phi(A, b)$ , состоящее в ее безусловной линейной параметризации.

Это обстоятельство открывает совершенно новые возможности в использовании СЛАУ, поскольку позволяет теоретически учесть априорную информацию о свойствах истинного решения  $x^*$  в его поиске на многообразии  $\Phi(A, b)$ . Технически это выглядит так: экспертная точка зрения на решение  $x^*$  формализуется неотрицательным функционалом  $F$  на  $\Phi(A, b)$ , а решение  $x^*$  его минимизирует. Благодаря линейной параметризации  $\Phi(A, b)$  минимизация  $F$  является безусловной.

Особое внимание в работе уделено случаю, когда экспертная информация о решении  $x^*$  формально предстает нечеткой структурой  $\mu$  весов координат пространства  $E$ , выражающих их роль в СЛАУ  $Ax = b$ . Пару  $(Ax = b, \mu)$  мы называем нечеткой СЛАУ. Формирование ее решений  $\Phi(A, b, \mu) \subseteq \Phi(A, b)$  связано с нелинейной оптимизацией, для которой в работе разработаны алгоритмы полиномиального спуска.

Результаты исследований иллюстрируются примерами.

**Ключевые слова:** проекционный метод, пространство решений, полиномиальный спуск, нечеткие линейные системы.

**Библиография:** 10 названий.

## Для цитирования:

Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Соловьев А. А. Нечеткие линейные системы // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 17–41.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-17-00346).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 519.6

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-17-41

**Fuzzy linear systems**

S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, A. A. Soloviev

**Agayan Sergey Martikovich** — doctor of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

*e-mail: s.agayan@gcras.ru*

**Bogoutdinov Shamil Rafekovich** — candidate of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences; Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

*e-mail: shm@gcras.ru*

**Soloviev Anatoly Alexandrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences; Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

*e-mail: a.soloviev@gcras.ru*

**Abstract**

For a system of linear algebraic equations (SLAE)  $Ax = b$  in a finite-dimensional Euclidean space  $E$ , a constructive description of the manifold of its solutions  $\Phi(A, b)$  is obtained using the Gram-Schmidt orthogonalization. This description consists of an unconditional linear parameterization.

This circumstance opens up entirely new possibilities for using SLAEs, as it allows one to theoretically take into account a priori information about the properties of the true solution  $x^*$  in its search on the manifold  $\Phi(A, b)$ . Technically, this looks like this: the expert opinion on the solution  $x^*$  is formalized by a non-negative functional  $F$  on  $\Phi(A, b)$ , and the solution  $x^*$  minimizes it. Thanks to the linear parameterization of  $\Phi(A, b)$ , the minimization of  $F$  is unconditional.

The paper pays special attention to the case where expert information about the solution  $x^*$  is formally represented by a fuzzy structure  $\mu$  of coordinate weights in the space  $E$ , expressing their role in the SLAE  $Ax = b$ . We call the pair  $(Ax = b, \mu)$  a fuzzy SLAE. The formation of its solutions  $\Phi(A, b, \mu) \subseteq \Phi(A, b)$  is associated with nonlinear optimization, for which polynomial descent algorithms are developed in the paper.

The research results are illustrated with examples.

**Keywords:** projection method, solution space, polynomial descent, fuzzy linear systems.

**Bibliography:** 10 titles.

**For citation:**

Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Soloviev, A. A. 2025, "Fuzzy linear systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 17–41.

**1. Введение**

Конструктивное описание многообразия решений  $\Phi(A, b)$  линейной системы (СЛАУ)  $Ax = b$  в конечномерном евклидовом пространстве  $E$  позволяет учесть априорную информацию о свойствах нужного (истинного) решения  $x^*$  путем его поиска на многообразии  $\Phi(A, b)$ .

Технически это выглядит так: экспертная точка зрения на решение  $x^n$  формализуется неотрицательным функционалом  $F$  на  $\Phi(A, b)$ , а решение  $x^n$  его минимизирует. Если точек зрения на  $x^n$  несколько и за них отвечает система функционалов  $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_k)$ , то поиск  $x^n$  сводится к многокритериальному выбору  $B(\Phi(A, b), \mathcal{F})$  относительно  $\mathcal{F}$  на  $\Phi(A, b)$ .

Сказанное выше графически передает схема

$$Ax = b \rightarrow \Phi(A, b) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow B(\mathcal{F}, \Phi(A, b)) \rightarrow x^n \quad (1)$$

*Первый переход* в (1) полностью относится к линейной алгебре и в настоящей работе будет выполнен с помощью ортогонализации Грама-Шмидта.

*Второй переход* в (1) формализует априорную информацию об истинном решении  $x^n$  в систему функционалов  $\mathcal{F}$  на многообразии  $\Phi(A, b)$  и потому требует широкого спектра методов. Мы будем иметь дело с высказываниями двух типов  $E_y$  и  $E_\mu$ :

$E_y$ : решение  $x^n$  похоже на известный вектор  $y \in E$

$E_\mu$ :  $\mu$  – неотрицательный вектор весов координат пространства  $E$ , выражающих их роль в СЛАУ  $Ax = b$ . Модули координат решения  $x^n$  похожи на веса  $\mu$ .

При условии нечеткости  $\mu$  ( $\|\mu\|_\infty = 1$ ) пару  $(Ax = b, \mu)$  считаем нечеткой СЛАУ, так что высказывание  $E_\mu$  связано с формированием ее решения  $\Phi(A, b, \mu) \subseteq \Phi(A, b)$ . Будут рассмотрены и проанализированы три варианта  $E_y$  и два варианта  $E_\mu$ .

*Третий переход* в (1) представляет собой оптимизацию функционалов из  $\mathcal{F}$  на многообразии  $\Phi(A, b)$  в широком смысле. В работе она выполнена как аналитическими методами (явное определение экстремальных точек через градиенты), так и новыми, полиномиальными версиями градиентного и покоординатного спусков. Их результатом будут те или иные версии истинного решения  $x^n$ . Изложение иллюстрируется примерами из магнитометрии, поскольку настоящая работы выполнена в рамках связанного с ней гранта РНФ.

## 2. Проекционный метод

Исходное пространство  $E$  предполагается  $n$ -мерным Евклидовым относительно скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$ . В линейной системе

$$Ax = b = (a_i, x) = b_i; \quad i = 1, \dots, m; \quad x \in E \quad (2)$$

под  $A$  одновременно понимается как совокупность векторов  $a_i$  из  $E$ , так и матрица  $m \times n$  с векторами  $a_i$  в качестве строк,  $b = (b_i)_1^m$ .

Проекционный метод (ПМ) применительно к системе (2) состоит в эффективном построении многообразия ее решений  $\Phi(A, b)$ . Эта задача была решена авторами в работах [1, 2, 3] на основе систематического использования ортопроектора  $H(a)$  перпендикулярно к  $a \in E$ :  $H(a) = 1 - \frac{aa^\top}{a^\top a}$ , если  $a \neq 0$  и  $H(0) = 1$ .

В настоящей работе в изложении ПМ главную роль будет играть ортогонализация Грама-Шмидта (ГШ) [4] в  $E$ .

**Однородные системы.** Для однородной системы  $Ax = 0$  пространство решений  $\Phi(A, 0)$  в точности совпадает с ортогональным дополнением в  $E$  к подпространству  $L(A)$ , порожденному  $A$ :  $\Phi(A, 0) = L(A)^\top$ . Поэтому для решения системы  $Ax = 0$  нужно построить ортопроектор

$$H = H(A) : E \longrightarrow L(A)^\top.$$

Сделаем это с помощью ортогонализации ГШ: если  $\mathcal{G} = \{g_i\}_1^N$ ,  $N = \text{rang } A$  результат ее применения к совокупности  $A$ :  $\mathcal{G} = \text{ГШ}(A)$ , то

$$Hx = x - \sum_{i=1}^N \frac{(x, g_i)}{(g_i, g_i)} g_i \quad \forall x \in E. \quad (3)$$

**Неоднородные системы.** Произвольное решение неоднородной системы  $Ax = b$  есть сумма частного  $x^*$  и однородного, так что  $\Phi(A, b) = x^* + \Phi(A, 0)$ . Воспользуемся в поиске  $x^*$  приводимой ниже эквивалентностью и реализацией ее правой части с помощью ортогонализации ГШ:

$$x \in \Phi(A, b) \equiv \begin{array}{l} x \text{ вектор в } E, \text{ чей образ } Ax \text{ является} \\ \text{проекцией } b \text{ на образ } \text{Im } A \text{ в } \mathbb{R}^m \end{array}.$$

Если  $\{e_j\}_1^n$  базис  $E$ , то система  $P = \{Ae_j\}_1^n$  порождает образ  $\text{Im } A$  в  $\mathbb{R}^m$ . Применим к  $P$  ортогонализацию ГШ и получим ортогональную систему  $G = \text{ГШ}(P)$  в  $\mathbb{R}^m$ :  $G = \{g_i\}_1^N$ ,  $N = \text{rang } P$ .

Нам нужны прообразы  $y_i$  векторов  $g_i$  при отображении  $A$ :  $Ay_i = g_i$ . Если они известны, то

$$b = \sum_{i=1}^N \frac{(b, g_i)}{(g_i, g_i)} g_i = \sum_{i=1}^N \frac{(b, g_i)}{(g_i, g_i)} Ay_i = A \left( \sum_{i=1}^N \frac{(b, g_i)}{(g_i, g_i)} y_i \right)$$

Таким образом, вектор

$$x^* = \sum_{i=1}^N \frac{(b, g_i)}{(g_i, g_i)} y_i \quad (4)$$

является частным решением системы  $Ax = b$ .

Вектора  $g_i$  и  $y_i$  строим итеративно. Сначала рассуждения относительно  $g_i$ : если известны вектора  $g_1, \dots, g_{i-1}$ ,  $i \geq 2$ , то согласно ГШ

$$g_i = Ae_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(Ae_i, g_k)}{(g_k, g_k)} g_k. \quad (5)$$

Начало:  $g_1 = Ae_1$ . Теперь рассуждения для  $y_i$ : если известны вектора  $y_1, \dots, y_{i-1}$ ,  $i \geq 2$ , то с учетом (5)

$$g_i = Ae_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(Ae_i, g_k)}{(g_k, g_k)} Ay_k = A \left( e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(Ae_i, g_k)}{(g_k, g_k)} y_k \right).$$

Таким образом,

$$y_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(Ae_i, g_k)}{(g_k, g_k)} y_k.$$

Начало:  $y_1 = e_1$ .

Подведем итог: эффективная параметризация многообразия решений  $\Phi(A, b)$  СЛАУ  $Ax = b$  с помощью ортогонализации ГШ представляет собой зависимость

$$x = x^* + Hs, \quad s \in E \quad (6)$$

где  $H$  и  $x^*$  определяются формулами (3) и (4).

### 3. Суждение $E_y$

Многообразие  $\Phi(A, b)$  служит областью определения произвольного суждения об истинном решении  $x^n$ . Обратимся к одному из самых естественных из них, а именно: к суждению  $E_y$  о схожести  $x^n$  с известным вектором  $y \in E$ . В работах [1, 2, 3] разобраны две его трактовки. Приведем их.

**Трактовка первая  $E_y^1$ .** Схожесть  $x^n$  и  $y$  понимается метрически, как близость в  $E$ : « $x^n = x_1^n$  ближайшая к  $y$  точка на многообразии  $\Phi(A, b)$ ». Поиск варианта  $x_1^n = x^* + Hs_1^n$  истинного решения согласно  $E_y^1$  сводится к безусловной минимизации по  $s$  на  $E$  первой версии функционала  $F_y^1$ :

$$F_y^1(s) = \|x^* + Hs - y\|^2, \quad \text{grad } F_y^1(s) = H^\top Hs - H^\top(y - x^*), \quad (7)$$

что приводит к СЛАУ на параметр  $s_1^n$

$$H^\top Hs_1^n = H^\top(y - x^*), \quad (7')$$

которую можно решить ПМ.

**Трактовка вторая  $E_y^2$ .** Сходство  $x^n$  и  $y$  более инвариантно относительно  $y$  и, в известном смысле, полукорреляционно: « $x_2^n$  ближайшая точка на  $\Phi(A, b)$  к прямой  $L(y) = yt$ , порожденной вектором  $y$ ». В этом случае поиск  $x_2^n = x^* + Hs_2^n$  связан с безусловной минимизацией по  $s$  и  $t$  на произведении  $E(s) \times \mathbb{R}(t)$  второй версии функционала  $F_y^2$ :

$$F_y^2(s) = \|x^* + Hs - yt\|^2. \quad (8)$$

Нужная пара параметров  $(s_2^*, t^*)$  получается, как решение СЛАУ

$$\begin{pmatrix} H^\top H & -H^\top y \\ -y^\top H & \|y\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2^* \\ t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H^\top x^* \\ (x^*, y) \end{pmatrix}. \quad (8')$$

**Полиномиальный спуск.** В (7') и (8') функционалы  $F_y^1$  и  $F_y^2$  зависят от  $s$  квадратично, поэтому оптимизация для них на пространстве  $E(s)$  сводится к решению СЛАУ (7') и (8'), порожденных их градиентами. В оставшихся случаях  $E_y^3$  и  $E_\mu^i$  ( $i = 1, 2$ ) функционалы  $F(s)$  алгебраические, но не квадратичные, поэтому для их оптимизации нужны нелинейные методы.

В работе предлагается глобальный вариант оптимизации по направлениям, который называется Полиномиальным Спуском (ПС). Опишем общую ситуацию для его работы: пусть  $F(x)$  – функционал на многообразии решений  $\Phi(A, b)$  СЛАУ  $Ax = b$ . Благодаря параметризации (6), он становится функционалом  $F(s)$  на всем пространстве параметров  $E(s)$ .

Скажем, что к  $F$  применим ПС, если критические точки ограничения  $F_{s^*, d^*}(t) = F(s^* + td^*)$  на любую прямую  $s(t) = s^* + td^*$  в  $E(s)$  можно найти с помощью решения полиномиальных уравнений в радикалах.

Применительно к  $F$  алгоритм ПС действует итеративно: находясь в точке  $s^*$ , он анализирует поведение  $F_{s^*, d^*}(t)$  вдоль «правильных» направлений  $d$ , выходящих из  $s^*$ , и выбирает в этом множестве  $D(s^*)$  направление  $d^*$ , вдоль которого минимизация  $F_{s^*, d}(t)$  наилучшая. Если  $t^*$  ее результат, то следующей за  $s^*$  будет точка  $s^* + t^*d^*$ . Начинается алгоритм ПС в нуле  $s = 0$ , поскольку в начале на многообразии  $\Phi(A, b)$  нам известна только одна точка  $x^*$ .

Варианты  $D(s^*)$  определяют варианты ПС. Их будет два – Полиномиальный Градиентный Спуск (ПГС) и Полиномиальный Покоординатный Спуск (ППС):

$$\begin{aligned} \text{ПГС} &\leftrightarrow D(s^*) = \text{grad } F(s^*) \\ \text{ППС} &\leftrightarrow D(s^*) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Координатные оси} \\ e_k \text{ в } E(s); \quad k = 1, \dots, n \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом сказанного изложение оставшихся суждений  $E$  будет носить технический характер и состоять в вычислении  $\text{grad } F(s^*)$  и  $F'_{s^*,d}$  для соответствующего  $E$  функционала  $F$ .

**Трактовка третья  $E_y^3$ .** Сходство  $x^\Pi$  и  $y$  состоит в их полной  $\cos$ -корреляции: « $x_3^\Pi$  точка на  $\Phi(A, b)$  с максимальной корреляцией  $\cos(x_3^\Pi, y)$ ». С учетом параметризации (6) поиск  $x_3^\Pi$  сводится к безусловной максимизации по  $s$  функционала  $F_y^3$

$$J(s) = F_y^3(s) = \frac{(x^* + Hs, y)}{\|x^* + Hs\| \|y\|}. \quad (10)$$

Покажем, что ее можно выполнить с помощью ПС. Для этого найдем градиент  $\text{grad } J(s)$  с помощью представления  $J(s)$  как суперпозиции  $\cos(x, y)$  и параметризации  $x = x^* + Hs$ :

$$J'(s) = \cos(x, y)_x (x^* + Hs)_s.$$

Прямые вычисления дадут равенства

$$\cos(x, y)_x = \left( \frac{\|x\|^2 y - (x, y)x}{\|x\|^3 \|y\|} \right)^\top, \\ (x^* + Hs)_s = H,$$

так что

$$J'(s) = \left( \frac{\|x^* + Hs\|^2 y - (x^* + Hs, y)(x^* + Hs)}{\|x^* + Hs\|^3 \|y\|} \right)^\top H$$

и

$$\text{grad } J(s) = H^\top \left( \frac{\|x^* + Hs\|^2 y - (x^* + Hs, y)(x^* + Hs)}{\|x^* + Hs\|^3 \|y\|} \right). \quad (11)$$

Для ПС нужно изучить ограничение функции  $J(s)$  на любую прямую  $s(t) = ct + d$  в пространстве параметров  $E(s)$ . Положим  $J(t) = J_{c,d}(t) = J(ct + d)$  и найдем  $J'(t)$ :

$$\begin{aligned} J'(t) &= J'_{c,d}(t) = (\text{grad } J(ct + d), c) = \\ &= \left( H^\top \frac{\|x^* + H(ct + d)\|^2 y - (x^* + H(ct + d), y)(x^* + H(ct + d))}{\|x^* + H(ct + d)\|^3 \|y\|}, c \right) = \\ &= \left( \frac{\|x^* + H(ct + d)\|^2 y - (x^* + H(ct + d), y)(x^* + H(ct + d))}{\|x^* + H(ct + d)\|^3 \|y\|}, Hc \right). \end{aligned}$$

Положим  $C = Hc$ ,  $D = x^* + Hd$  и запишем в этих обозначениях  $J(t)$  и  $J'(t)$ :

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{(Ct + D, y)}{\|Ct + D\| \|y\|}, \\ J'(s) &= \frac{\|Ct + D\|^2 (y, C) - (Ct + D, y)(Ct + D, C)}{\|Ct + D\|^3 \|y\|}. \end{aligned} \quad (12)$$

Проанализируем  $J(t)$ . Во-первых, она ограничена:  $J(t) \leq 1$ , во-вторых, имеет пределы на бесконечности

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} J(t) &= \frac{t(C, y) + (D, y)}{\|Ct + D\| \|y\|} = \frac{t}{|t|} \frac{(C, y) + t^{-1}(D, y)}{\|C + t^{-1}D\| \|y\|} = \\ &= \begin{cases} \pm \cos(C, y), & \text{если } C \neq 0, \\ \cos(D, y), & \text{если } C = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Если  $C \neq 0$ , то  $J(-\infty) = -J(\infty)$ . Если  $C = 0$ , то  $J(t) \equiv \cos(D, \mu)$ .

Далее: преобразуем производную  $J'(t)$  с помощью замены  $\|D + tC\|^2 = (D + tC, D + tC)$

$$\begin{aligned}
 J'(t) &= \frac{(D + tC, D + tC)(y, C) - (D + tC, y)(D + tC, C)}{\|D + tC\|^3 \|y\|} = \\
 &= \frac{t^2(C, C)(y, C) + 2t(D, C)(y, C) + (D, D)(y, C)}{\|D + tC\|^3 \|y\|} - \\
 &\quad - \frac{(t(y, C) + (\mu, D))(t(C, C) + (D, C))}{\|D + tC\|^3 \|y\|} = \\
 &= \frac{2t(D, C)(y, C) + (D, D)(y, C) - t(D, C)(y, C) - t(C, C)(y, D) - (y, D)(D, C)}{\|D + tC\|^3 \|y\|} = \\
 &= \frac{-t((D, C)(y, C) - (C, C)(y, D)) + (D, D)(y, C) - (D, C)(y, D)}{\|D + tC\|^3 \|y\|}
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(F_y^3)'(t) = \frac{Pt + Q}{\|D + tC\|^3 \|y\|}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
 P &= (D, C)(y, C) - (C, C)(y, D) \\
 Q &= (D, D)(y, C) - (D, C)(y, D).
 \end{aligned}$$

Приведенные вычисления вместе с классическим одномерным математическим анализом дают возможность полностью понять устройство ограничения функционала  $F_y^3$  на прямые в  $E(s)$  и, как следствие, обосновать ПС для оптимизации  $F_y^3$ : попадая в точку с направлением, можно сделать нужный шаг вдоль всей прямой, через неё проходящую.

**Устройство  $F_y^3(t)$  через  $C, D, P, Q, y$ :**

- Если  $P = 0$  и  $C \neq 0$ , то ограничение  $F_y^3(t)$  монотонно, причем  $F_y^3(t)$  строго возрастает (убывает), если  $\cos(C, y) > 0$  ( $\cos(C, y) < 0$ ).

Доказательство. Монотонность следует из (14), а ее характер определяется поведением на бесконечности (13).

- Если  $P = 0$  и  $C = 0$ , то  $F_y^3(t) \equiv \cos(D, \mu)$ .
- Если  $P \neq 0$ , то у  $F_y^3(t)$  есть одна критическая точка  $t^* = -Q/P$  (14), причем

$$t^* = -\frac{Q}{P} \begin{cases} \text{максимум,} & \text{если } P < 0 \\ \text{минимум,} & \text{если } P > 0 \end{cases}. \quad (15)$$

Доказательство. Знак производной  $(F_y^3)'(t)$  совпадает со знаком ее числителя  $Pt + Q$  (14): при  $P < 0$  переход через ноль в  $t^*$  будет сверху вниз (максимум), при  $P > 0$  – наоборот, снизу вверх (минимум).

**Помощь в оптимизации  $F_y^3$ .** Аналитическое выражение (11) для  $\text{grad } F_y^3$  нелинейно в отличие от выражений (7') и (8') для  $\text{grad } F_y^1$  и  $\text{grad } F_y^2$ . Поэтому прямое определение экстремумов  $F_y^3$ , подобно  $F_y^1$  и  $F_y^2$ , невозможно: необходима итеративная численная оптимизация. Если в ее процессе в какой-то момент мы находимся в точке  $d$  пространства параметров  $E(s)$ , и алгоритм оптимизации принимает решение о направлении движения по вектору  $c$ , то такое движение, благодаря проделанному выше анализу, возможно глобальное, а следующая точка

в такой оптимизации будет глобальным максимумом  $F_y^3$  на  $s(t) = ct + d$  или порогом движения к бесконечности в «правильном направлении».

Графическая иллюстрация сказанного поможет сформулировать окончательную версию поиска. Двумерного случая для этого будет достаточно: положим  $C = (a, 1)$ ,  $D = (1, 0)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  и за счет выбора  $a$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  добьемся нужного результата

- Если  $P = 0$ ,  $C \neq 0$  и  $F_y^3(\infty) = \cos(C, y) \geq 0$ , то движение к  $F_y^3(\infty)$  ( $F_y^3(-\infty)$ ), то есть к модулю  $|\cos(C, y)|$ . В параметрах примера  $P = 0 \longleftrightarrow ay_2 = y_1$ ,  $\cos(C, y) = ay_1 + y_2 = (a^2 + 1)y_2$ . Нужные примеры получаются при  $a = 1$ ;  $y_2 = \pm 1$ . Ими будут функции на рисунках 1 и 2

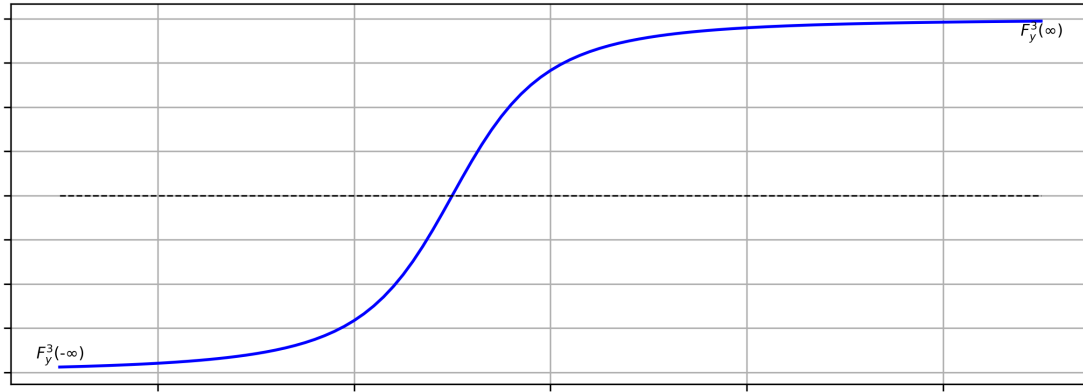


Рис. 1:  $F_y^3(t) = \frac{(2t+1)}{\sqrt{(t+1)^2 + t^2} \sqrt{2}}$

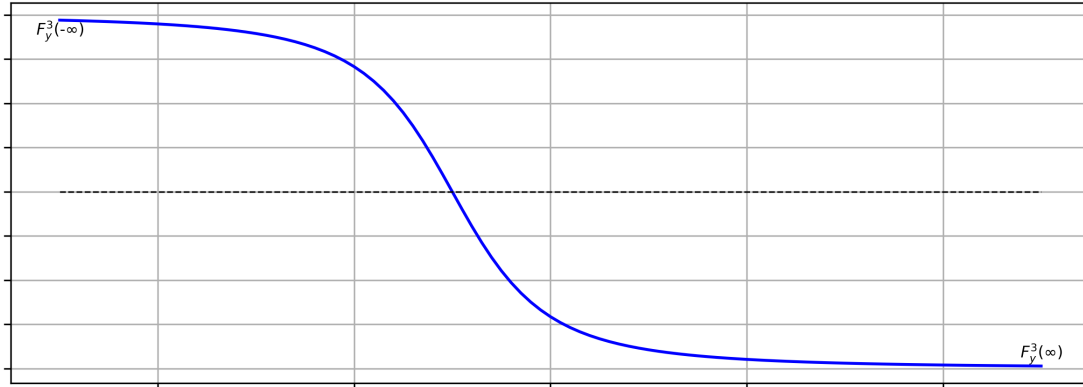


Рис. 2:  $F_y^3(t) = \frac{-(2t+1)}{\sqrt{(t+1)^2 + t^2} \sqrt{2}}$

- Если  $P = 0$ ,  $C = 0$  и  $F_y^3 \equiv \cos(D, y)$  и никакого движения нет
- Если  $P > 0$ , то существенно все также, как при  $P = 0$ : движение к модулю  $|\cos(C, y)|$ . Сказанное иллюстрируют функции на рисунках 3 и 4



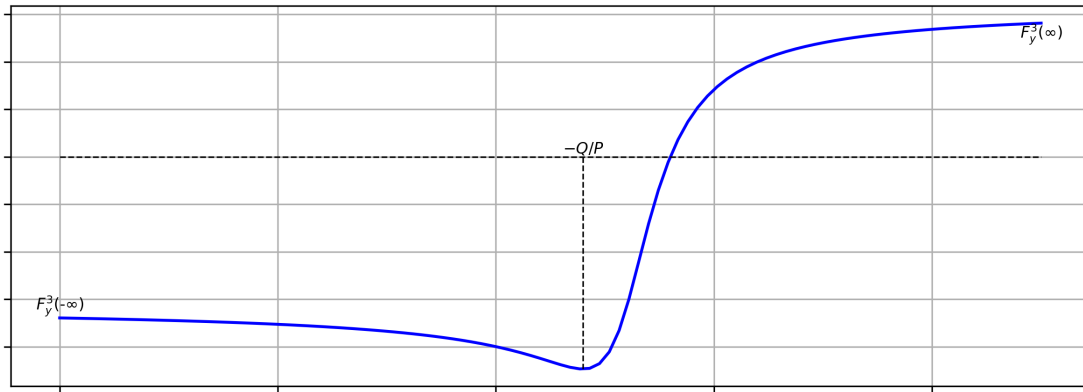


Рис. 3:  $F_y^3(t) = \frac{5t+1}{\sqrt{(2t+1)^2+t^2}\sqrt{2}}$

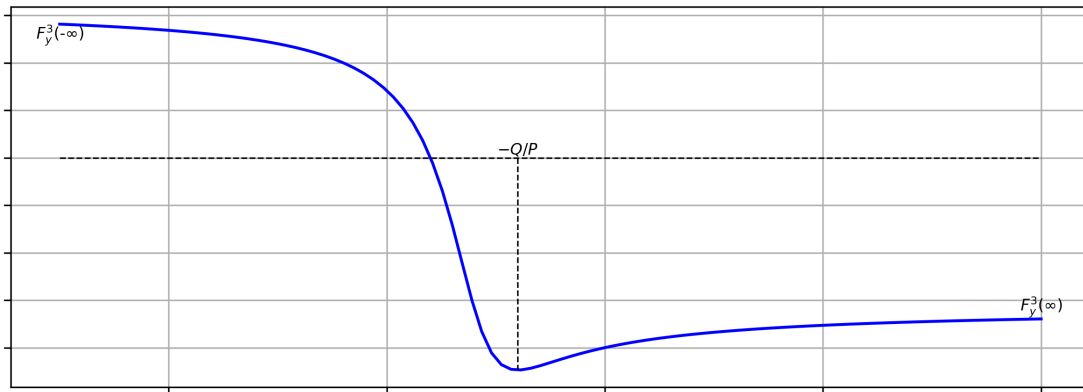


Рис. 4:  $F_y^3(t) = \frac{-5t+1}{\sqrt{(-2t+1)^2+t^2}\sqrt{2}}$

- Если  $P < 0$ , то движение к модулю  $F_y(-Q/P)$ . Сказанное иллюстрируют функции на рисунках 5 и 6

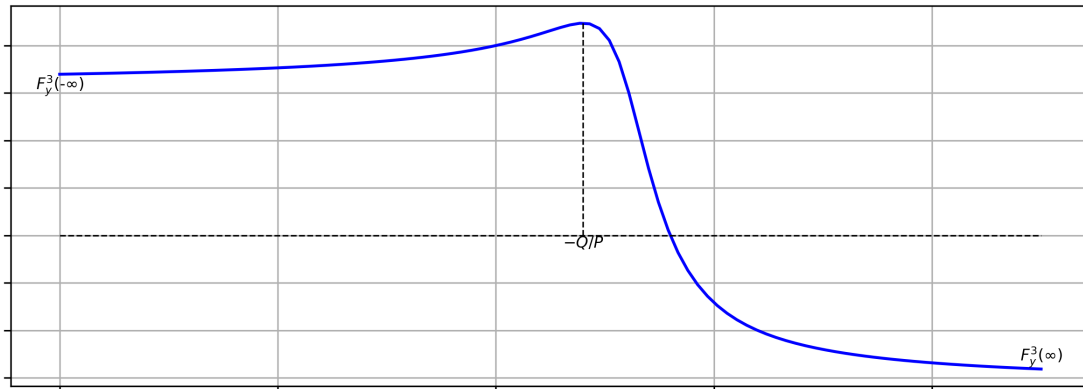


Рис. 5:  $F_y^3(t) = -\frac{5t+1}{\sqrt{(2t+1)^2+t^2}\sqrt{2}}$

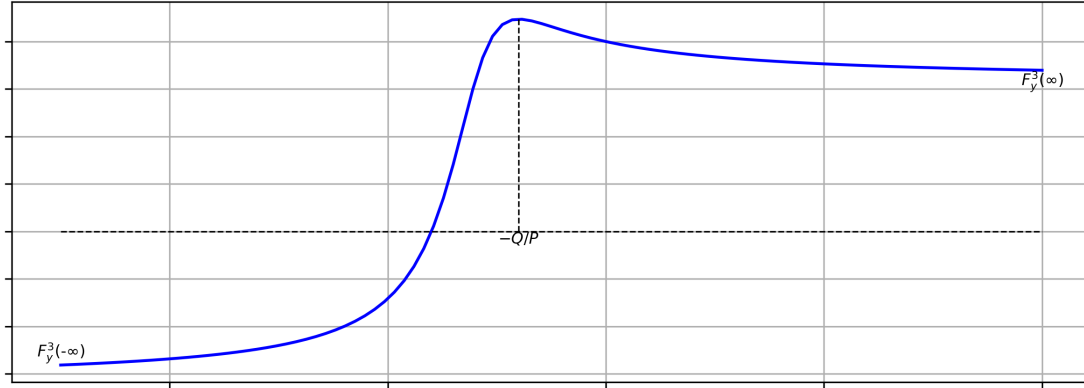


Рис. 6:  $F_y^3(t) = -\frac{-5t+1}{\sqrt{(-2t+1)^2+t^2\sqrt{2}}}$

**Следующая точка в оптимизации  $F_y^3$ .** Мы находимся в точке  $d$  пространства параметров  $E(s)$  и двигаемся в нем вдоль прямой  $s(t) = d + ct$ , оптимизируя ограничение  $F_y^3(s(t))$ . Оно полностью описывается параметрами  $C, D, P, Q$  и  $y$ . Следующая за  $d$  точка  $d^+$  ясна только в случае  $P < 0$ :  $d^+ = -Q/P$ . В остальных случаях при формировании  $d^+$  участвует «правильная бесконечность», в которой функционал  $F_y^3$  равен  $|\cos(C, y)|$ . Поступаем следующим образом: обозначим через  $\gamma$  полусумму  $F_y^3(d)$  и  $|\cos(C, y)|$ . Точкой  $d^+$  будем считать прообраз  $\gamma$  на прямой  $s(t)$ :  $d^+ = d + t^+c$ , где  $t^+$  – правильное решение квадратного уравнения

$$(Ct^+ + D, y)^2 = \gamma^2 \|y\|^2 \|Ct^+ + D\|^2.$$

Проделанный выше анализ точно определит  $t^+$  из двух корней этого уравнения.

Подведем итог: относительная простота нелинейности в конструкции  $E_y^3$  (первая степень по  $t$  в числителе производной (14)) позволила подробно разобрать оптимизацию алгоритма ПС соответствующего функционала  $F_y^3$ . В изложенных ниже конструкциях  $E_\mu$  такая степень по  $t$  будет уже четвертой.

## 4. Нечеткие СЛАУ

Мотивация дальнейших исследований связана со следующей трактовкой СЛАУ: система  $Ax = b$  выражает одно из свойств объекта изучения  $O$ . Нужное решение  $x^n = \{x_j^n, j \in J\}$  представляет собой распределение проявлений свойства  $A$  на  $O$  через «внутренние» узлы  $j$ , образующие «внутренний» для  $O$  остов  $J$ . Вектор  $x^n$  неизвестен, его нужно определить по измерениям  $b = \{b_i, i \in I\}$  проявления  $A$  на  $O$  во «внешних» узлах  $i$ , образующих «внешний» для  $O$  остов  $I$ .

Проекционный метод (ПМ) конструктивно описывает многообразие  $\Phi(A, b)$  всех возможных проявлений  $x$  свойства  $A$  на объекте  $O$  (кандидатов на роль  $x^n$ ). Вобщем случае для определения  $x^n$  среди  $\Phi(A, b)$  нужна дополнительная информация об  $x^n$ , в частности, в виде экспертных суждений. В рамках ДМА разработаны методы ее формализации. Они активно используют нечеткую логику, так что окончательным результатом будет нечеткая структура  $\mu = \{\mu_j, j \in J\}$  на «внутреннем» остове  $J$  для  $O$ .

Возникает нечеткая СЛАУ ( $Ax = b, \mu$ ) и задача ее решить, т.е. сформировать внутри  $\Phi(A, b)$  подмножество решений  $\Phi(A, b, \mu)$ , согласованных с  $\mu$ . В настоящей работе такая согласованность  $E_\mu$  понимается как корреляция модуля  $|x^n|$  решения  $x^n$ :  $|x^n| = \{|x_j|, j \in J\}$  с  $\mu$  и приводит к двум вариантам  $E_\mu$ , из соображения гладкости выражающих согласованность квадратов  $|x^n|^2 = \{|x_j|^2, j \in J\}$  с  $\mu^2 = \{\mu_j^2, j \in J\}$ .

Необходимые технические вещи для вычислений:

$$\begin{aligned} &\text{проекционный оператор } H = (h_{jk}) \\ &\text{зависимость } x_j(s) = x_j^* + \sum h_{jk}s_k = x_j^* + H_j(s) \\ &\frac{\partial x_j}{\partial s_k} = h_{jk}; \quad \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} = 2x_j(s)h_{jk} \end{aligned} \quad (16)$$

**Трактовка первая**  $E_\mu^1$  аналогична  $E_y^3$ . Согласованность  $x^\mu$  и  $\mu$  состоит в полной корреляции: « $x^\mu$  – точка на  $\Phi(A, b)$  с максимальной корреляцией  $\cos(|x^\mu|^2, \mu^2)$ ». С учетом параметризации (6) и соотношений (16) поиск  $x^\mu$  сводится к безусловной максимизации по  $s$  функционала  $F_\mu^1$

$$J(s) = F_\mu^1(s) = \frac{\sum x_j^2(s)\mu_j^2}{\sqrt{\sum x_j^4(s)}\sqrt{\sum \mu_j^4}}. \quad (17)$$

**Частная производная**  $\frac{\partial J}{\partial s_k}$ . Выразим ее через  $x_j^2(s)$  и  $\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}$ . Учитывая (16), этого будет достаточно. Ввиду сложности производной сделаем ее вычисление поэтапным с «умным» опусканием двоек:

*первое слагаемое числителя*  $\frac{\partial J}{\partial s_k}$

$$\left(\sum x_j^2\mu_j^2\right)'_{s_k} \sqrt{\sum x_j^4} = \left(\sum \mu_j^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}\right) \sqrt{\sum x_j^4}$$

*второе слагаемое числителя*  $\frac{\partial J}{\partial s_k}$

$$\begin{aligned} &\left(\sum x_j^2\mu_j^2\right) \left(\sqrt{\sum x_j^4}\right)'_{s_k} = \left(\sum x_j^2\mu_j^2\right) \left(\sqrt{\sum (x_j^2)^2}\right)'_{s_k} = \\ &= \left(\sum x_j^2\mu_j^2\right) \frac{2\sum x_j^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}}{2\sqrt{\sum x_j^4}} = \frac{\left(\sum x_j^2\mu_j^2\right) \sum x_j^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}}{\sqrt{\sum x_j^4}} \end{aligned}$$

*числитель из разности*

$$\left(\sum \mu_j^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}\right) \left(\sum x_j^4\right) - \left(\sum x_j^2\mu_j^2\right) \left(\sum x_j^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}\right)$$

*отдельно члены  $(j, \bar{j}) + (\bar{j}, j)$*

$$\begin{aligned} &\mu_j^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} x_{\bar{j}}^4 - x_j^2 \mu_{\bar{j}}^2 x_{\bar{j}}^2 \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k} + \mu_{\bar{j}}^2 \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k} x_j^4 - x_{\bar{j}}^2 \mu_j^2 x_j^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} = \\ &\mu_j^2 x_{\bar{j}}^2 \left(x_{\bar{j}}^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2 \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k}\right) - \mu_{\bar{j}}^2 x_j^2 \left(x_j^2 \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k} - x_{\bar{j}}^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}\right) = \\ &= \left(\mu_j^2 x_{\bar{j}}^2 - \mu_{\bar{j}}^2 x_j^2\right) \left(x_{\bar{j}}^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2 \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k}\right) \end{aligned}$$

Окончательная формула для производной

$$\frac{\partial J}{\partial s_k} = \sum_{(j, \bar{j}): j \neq \bar{j}} \frac{\left(\mu_j^2 x_{\bar{j}}^2 - \mu_{\bar{j}}^2 x_j^2\right) \left(x_{\bar{j}}^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2 \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k}\right)}{\sqrt{\sum \mu_j^4} \left(\sum x_j^4\right)^{3/2}}. \quad (18)$$

**Ограничение  $J(s)$  на прямую.** Понимание устройства  $J(t) = J_{c,d}(t) = J(s(t))$  на прямой  $s(t) = ct + d$  в пространстве параметров  $E(s)$  позволит использовать полиномиальный спуск (ПС) во всем объеме. Положим с учетом (16)

$$x_j(t) = x_j(s(t)) = x_j^* + H_j(s(t)) = x_j^* + H_j(d) + tH_j(c).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_j^2(t) &= (x_j^* + H_j(d))^2 + 2(x_j^* + H_j(d))H_j(c)t + (H_j(c))^2 t^2 = \\ &= A_j t^2 + 2B_j t + C_j, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$A_j = (H_j(c))^2; \quad B_j = (x_j^* + H_j(d))H_j(c); \quad C_j = (x_j^* + H_j(d))^2.$$

Без двойки  $\frac{\partial x_j^2}{\partial t} = A_j t + B_j$ . Формула для  $\frac{\partial J}{\partial t}$  аналогична (18):

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{(j,\bar{j}): j \neq \bar{j}} \frac{\left( \mu_j^2 x_j^2 - \mu_{\bar{j}}^2 x_{\bar{j}}^2 \right) \left( \frac{\partial x_j^2}{\partial t} x_{\bar{j}}^2 - \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial t} x_j^2 \right)}{\sqrt{\sum \mu_j^4} \left( \sum x_j^4 \right)^{3/2}}. \quad (20)$$

Первый член числителя в множителе  $(j, \bar{j})$ :

$$\begin{aligned} \mu_j^2 x_j^2 &= \mu_j^2 (A_j t^2 + 2B_j t + C_j) = \mu_j^2 A_j t^2 + 2\mu_j^2 B_j t + \mu_j^2 C_j \\ \mu_{\bar{j}}^2 x_{\bar{j}}^2 &= \mu_{\bar{j}}^2 (A_{\bar{j}} t^2 + 2B_{\bar{j}} t + C_{\bar{j}}) = \mu_{\bar{j}}^2 A_{\bar{j}} t^2 + 2\mu_{\bar{j}}^2 B_{\bar{j}} t + \mu_{\bar{j}}^2 C_{\bar{j}} \end{aligned}$$

разность

$$\underbrace{(\mu_j^2 A_j - \mu_{\bar{j}}^2 A_{\bar{j}}) t^2}_{D_{j\bar{j}}} + 2 \underbrace{(\mu_j^2 B_j - \mu_{\bar{j}}^2 B_{\bar{j}}) t}_{E_{j\bar{j}}} + \underbrace{(\mu_j^2 C_j - \mu_{\bar{j}}^2 C_{\bar{j}}) t^2}_{F_{j\bar{j}}}.$$

Таким образом, первый член в числителе (20) есть квадратный трехчлен

$$\mu_j^2 x_j^2 - \mu_{\bar{j}}^2 x_{\bar{j}}^2 = D_{j\bar{j}} t^2 + E_{j\bar{j}} t + F_{j\bar{j}}.$$

Второй член числителя в множителе  $(j, \bar{j})$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j^2}{\partial t} x_{\bar{j}}^2 &= (A_j t + B_j)(A_{\bar{j}} t^2 + 2B_{\bar{j}} t + C_{\bar{j}}) = \\ &= A_j A_{\bar{j}} t^3 + (2A_j B_{\bar{j}} + B_j A_{\bar{j}}) t^2 + (A_j C_{\bar{j}} + 2C_j A_{\bar{j}}) t + B_j C_{\bar{j}} \\ \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial t} x_j^2 &= (A_{\bar{j}} t + B_{\bar{j}})(A_j t^2 + 2B_j t + C_j) = \\ &= A_{\bar{j}} A_j t^3 + (2A_{\bar{j}} B_j + B_{\bar{j}} A_j) t^2 + (A_{\bar{j}} C_j + 2C_{\bar{j}} A_j) t + B_{\bar{j}} C_j, \end{aligned}$$

разность

$$\frac{\partial x_j^2}{\partial t} x_{\bar{j}}^2 - \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial t} x_j^2 = \underbrace{(A_j B_{\bar{j}} - B_j A_{\bar{j}}) t^2}_{K_{j\bar{j}}} + \underbrace{(A_j C_{\bar{j}} - C_j A_{\bar{j}}) t}_{L_{j\bar{j}}} + \underbrace{(B_j C_{\bar{j}} - C_j B_{\bar{j}})}_{M_{j\bar{j}}}.$$

Таким образом, и второй член в числителе (20) квадратичен:

$$\frac{\partial x_j^2}{\partial t} x_{\bar{j}}^2 - \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial t} x_j^2 = K_{j\bar{j}} t^2 + L_{j\bar{j}} t + M_{j\bar{j}}.$$

Окончательная формула для числителя производной  $\frac{\partial J}{\partial t}$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{(j,\bar{j}):j \neq \bar{j}} \left( \mu_j^2 x_j^2 - \mu_{\bar{j}}^2 x_{\bar{j}}^2 \right) \left( \frac{\partial x_j^2}{\partial t} x_j^2 - \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial t} x_{\bar{j}}^2 \right) = \\
& = \sum_{(j,\bar{j}):j \neq \bar{j}} (D_{j\bar{j}} t^2 + 2E_{j\bar{j}} t + F_{j\bar{j}}) (K_{j\bar{j}} t^2 + L_{j\bar{j}} t + M_{j\bar{j}}) = \\
& = t^4 \left( \sum D_{j\bar{j}} K_{j\bar{j}} \right) + t^3 \left( 2 \sum E_{j\bar{j}} K_{j\bar{j}} + \sum D_{j\bar{j}} L_{j\bar{j}} \right) + \\
& + t^2 \left( \sum D_{j\bar{j}} M_{j\bar{j}} + 2 \sum E_{j\bar{j}} L_{j\bar{j}} + \sum F_{j\bar{j}} K_{j\bar{j}} \right) + \\
& + t \left( 2 \sum E_{j\bar{j}} M_{j\bar{j}} + \sum F_{j\bar{j}} L_{j\bar{j}} \right) + \left( \sum F_{j\bar{j}} M_{j\bar{j}} \right).
\end{aligned}$$

**Трактовка вторая**  $E_\mu^2$  состоит в квадратичной близости  $l^1$ -нормирований векторов  $|x^n|^2$  и  $|\mu|^2$  и сводится к минимизации по  $s$  функционала  $F_\mu^2(s)$ :

$$J(s) = F_\mu^2(s) = \sum \left( \frac{x_j^2(s)}{\sum x_{\bar{j}}^2(s)} - \frac{\mu_j^2(s)}{\sum \mu_{\bar{j}}^2(s)} \right)^2 \rightarrow \min. \quad (21)$$

Положим

$$\begin{aligned}
\nu_j &= \mu_j \left( \sum \mu_{\bar{j}}^2 \right)^{-1} \\
\varphi(s) &= \sum x_{\bar{j}}^2(s) \\
\varphi_j(s) &= x_j^2(s) - \nu_j \varphi(s) \\
\text{так что } J(s) &= \sum \left( \frac{\varphi_j(s)}{\varphi(s)} \right)^2.
\end{aligned} \quad (22)$$

Воспользуемся этим представлением  $J(s)$  для нахождения его частных производных, опуская двойки:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial s_k} &= \sum \frac{\partial}{\partial s_k} \left( \frac{\varphi_j}{\varphi} \right)^2 \\
\frac{\partial}{\partial s_k} \left( \frac{\varphi_j}{\varphi} \right)^2 &= \frac{\varphi_j}{\varphi} \frac{\partial}{\partial s_k} \left( \frac{\varphi_j}{\varphi} \right) \\
\frac{\partial}{\partial s_k} \left( \frac{\varphi_j}{\varphi} \right) &= \frac{\varphi \frac{\partial \varphi_j}{\partial s_k} - \varphi_j \frac{\partial \varphi}{\partial s_k}}{\varphi^2}.
\end{aligned}$$

Преобразуем числитель:

$$\begin{aligned}
\varphi \left( \frac{\partial}{\partial s_k} \varphi_j \right) - \varphi_j \left( \frac{\partial}{\partial s_k} \varphi \right) &= \varphi \left( \frac{\partial}{\partial s_k} (x_j^2 - \nu_j \varphi) \right) - (x_j^2 - \nu_j \varphi) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} \right) = \\
&= \varphi \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - \nu_j \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} \varphi - x_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} + \nu_j \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} = \varphi \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_k}.
\end{aligned}$$

Окончательная формула для  $\frac{\partial J}{\partial s_k}$  через  $\varphi_j$  и  $\varphi$ :

$$\frac{\partial J}{\partial s_k} = \frac{\sum \varphi_j \left( \varphi \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} \right)}{\varphi^3}. \quad (23)$$

От этой формулы с учетом (22) недалеко и до аналога (А) для  $\frac{\partial J}{\partial s_k}$  в конструкции  $E_\mu^2$ .

**Ограничение  $J(s)$  на прямую.** В обозначениях разговора об этом в рамках конструкции  $E_\mu^1$  (19) и с дополнительными обозначениями

$$A = \sum A_{\bar{j}}; \quad B = \sum B_{\bar{j}}; \quad C = \sum C_{\bar{j}}$$

имеем (без двойки):

$$\begin{aligned} \varphi_j(t) &= (A_j - \nu_j A)t^2 + (B_j - \nu_j B)t + (C_j - \nu_j C) \\ \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} x_j^2 - x_j^2(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= (At^2 + 2Bt + C)(A_j t + B_j) - (A_j t^2 + 2B_j t + C_j)(At + B) = \\ &= (A_j B - AB_j)t^2 + (A_j C - AC_j)t + (B_j C - BC_j) \end{aligned}$$

Окончательно производная  $\frac{\partial J}{\partial t}$  аналогична (23)

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\sum \varphi_j \left( \varphi \frac{\partial x_j^2}{\partial t} - x_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{\varphi^3}, \quad (24)$$

а потому ее числитель, подобно конструкции  $E_\mu^1$ , имеет четвертую степень по  $t$ .

## 5. Примеры работы

Теоретические исследования, представленные в работе, выполнены в рамках проекта РНФ, связанного с магнитометрией, поэтому их прикладную часть мы предваряем магнитным дайджестом.

Магнитный дайджест. Встанем на дипольную точку зрения, считая, что истинное распределение магнитных диполей  $D_J^n = \{D_j^n, j \in J\}$  сосредоточено в узлах  $j$  некоторой трехмерной сетки  $J$ , состоящей из  $n$  узлов, где  $D_j^n$  – магнитный диполь с центром в  $j$ , а выход  $U(I) = \{U(i), i \in I\}$  распределения  $D_J^n$  на поверхность измерен в узлах  $i$  двумерной сетки  $I$ , состоящей из  $m$  узлов.

Потенциал диполя  $D_j^n$  в узле  $i$  определяется его магнитным вектором  $(x_j^n, y_j^n, z_j^n)$  и обозначается через  $D_j^n(i)$ . Потенциал распределения  $D_J^n(i)$  складывается из потенциалов  $D_j^n(i)$

$$D_J^n(i) = \frac{(D_j^n, i - j)}{\|i - j\|^3} \text{ и } D_J^n(i) = \sum_j D_j^n(i).$$

Поиск распределения  $D_J^n$  приводит к СЛАУ  $D_J^n(I) = U(I)$  из  $m$  уравнений с  $3n$  неизвестными

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{x_j(i-j)_x + y_j(i-j)_y + z_j(i-j)_z}{\|i-j\|^3} &= U(i), \\ j &= 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (25)$$

Все примеры связаны с такой системой и иллюстрируют последовательно проекционный метод, конструкции  $E_y^1$ ,  $E_y^3$  и  $E_\mu^1$ , а также алгоритмов полиномиальный градиентный спуск (ПГС) и полиномиальный покоординатный спуск (ППС) на них.

Для этого мы задали аномалеобразующее тело, состоящее из  $7 \times 9$  диполей, расположенных равномерно в прямоугольнике размером  $450 \times 900$  м. При этом только в центральном прямоугольнике заданы магнитные диполи (рис. 7). Вне этого прямоугольника значения магнитных диполей равны 0. В дальнейшем это распределение диполей (рис. 7) будем считать истинным и обозначать через  $x^n$ , а произвольное распределение через  $x$ .

На рисунке 8 показан отклик от этого тела на профиле, представляющего собой 25 точек, расположенных в интервале от -450 до 450 м на высоте 100 м.

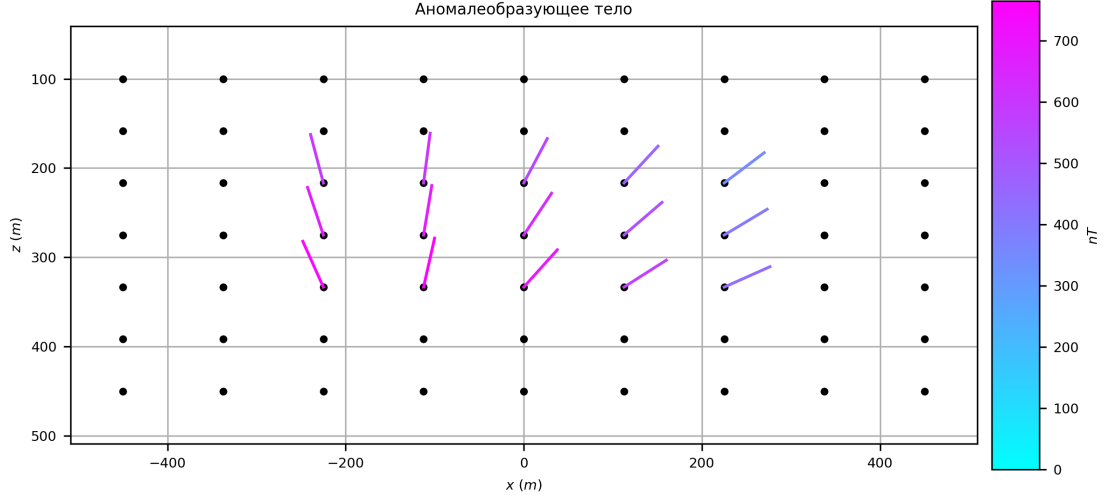


Рис. 7: Истинное распределение  $x^u$

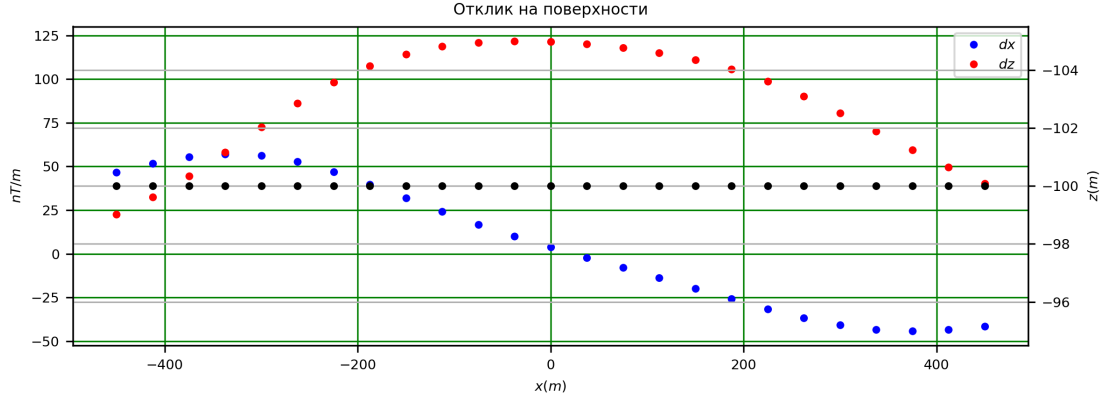


Рис. 8: Отклик на поверхности. Черными точками отмечены координаты профиля, на котором задан отклик аномалеобразующего тела. Красными точками обозначена горизонтальная составляющая, синими – вертикальная

Пример 2 посвящен ПМ и показывает, как выглядит параметризация  $x = x^* + Hs$  при разных  $s$ .

Примеры 3 и 4 посвящены конструкции  $E_y^1$ : в первом случае  $y = 0$ , а результат – решение, минимальное по норме; во втором случае  $y = x^u$  и интерес представляет переход от частного решения  $x^*$  к истинному  $x^u$  с помощью последовательной оптимизации  $F_y^3$ .

У каждого диполя  $D_j = (x_j, y_j, z_j)$  есть две характеристики: масса  $m(D_j) = \|D_j\| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}$  и ориентация  $e(D_j) = \frac{D_j}{\|D_j\|}$ . С ними связаны примеры 5 и 6, в которых с помощью конструкций  $E_y^3$  и  $E_\mu^1$  мы пытаемся восстановить решение  $x^u$  по его ориентации  $e(x^u) = (e(D_j^u), j \in J)$  и массе  $m(x^u) = (m(D_j^u), j \in J)$ .

**ПРИМЕР 2 (Проекционный метод).** В этом примере показано, что множество  $x = x^* + Hs$  описывает многообразие решений системы (25). На рисунке 9 – частное решение, полученное методом наименьших квадратов. На рисунках 10-12 – решения при различных  $s$ .

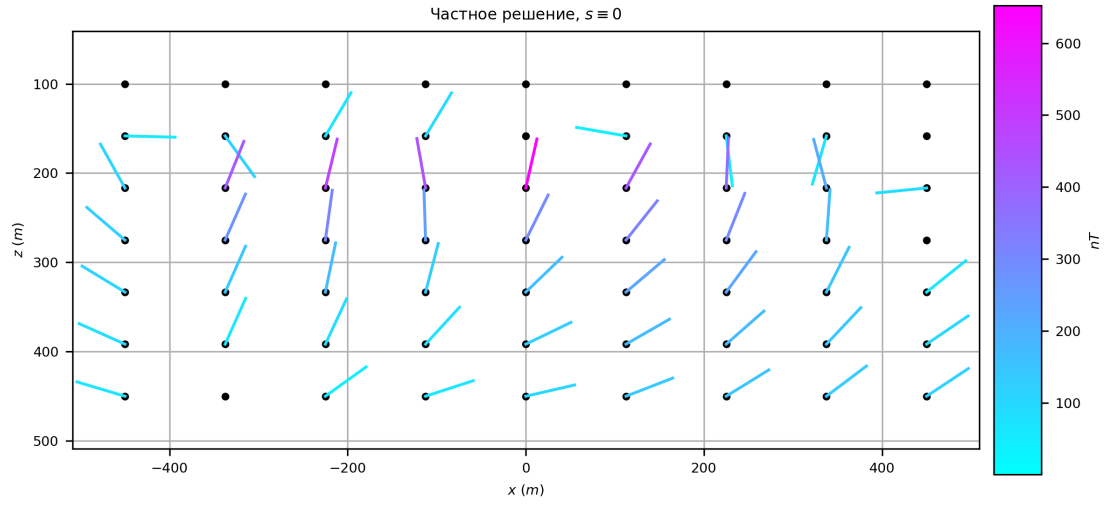


Рис. 9: Частное решение  $x^*$ , полученное, методом наименьших квадратов. Вектор  $s$  равен 0.  
 $\|Ax^* - b\| = 5.734342e^{-13}$

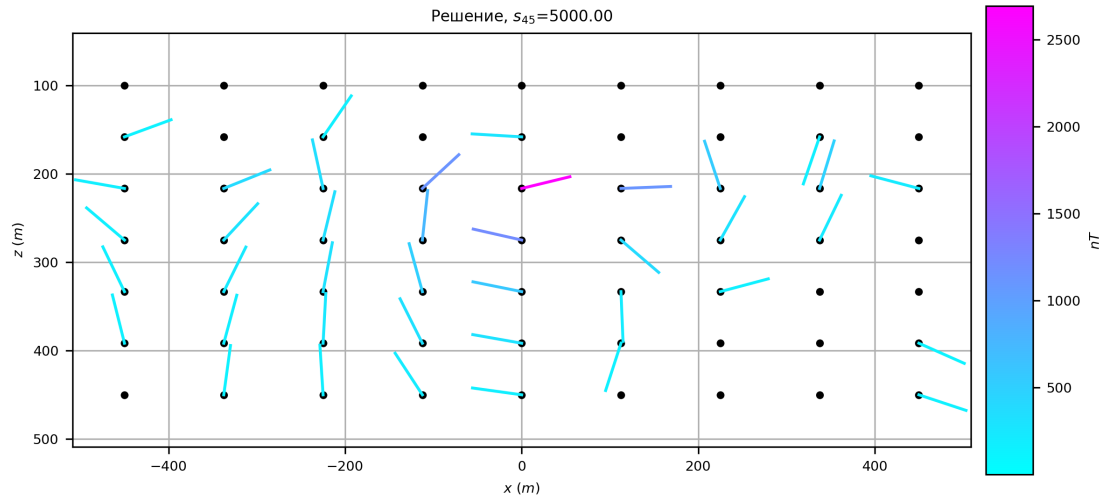


Рис. 10: Решение, полученное при помощи вектора  $s$  равному нулю везде, кроме 45-ой координаты.  $\|Ax - b\| = 9.265617e^{-13}$

Видно, что все решения на рисунках 9-12 имеют точность одного порядка.



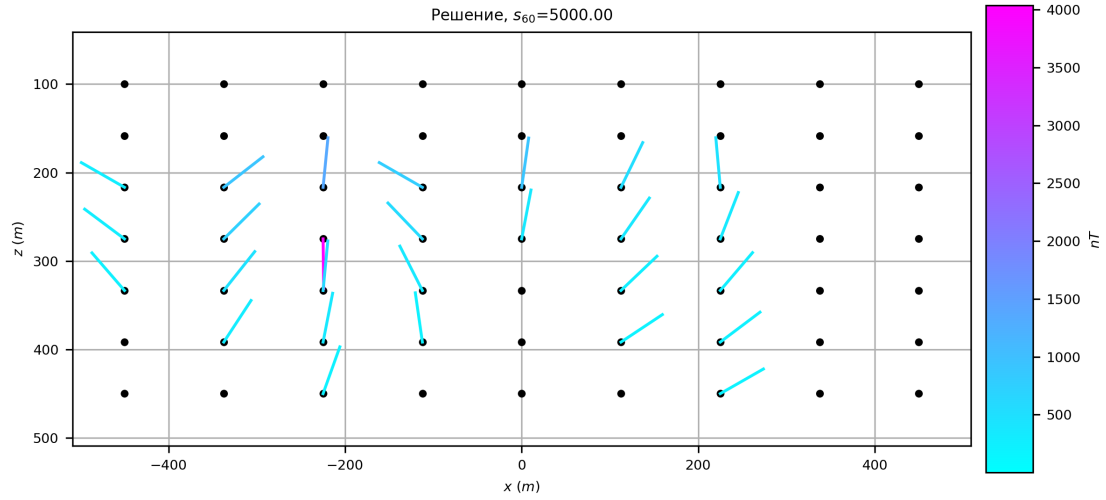


Рис. 11: Решение, полученное при помощи вектора  $s$  равному нулю везде, кроме 60-ой координаты.  $\|Ax - b\| = 5.900362e^{-13}$

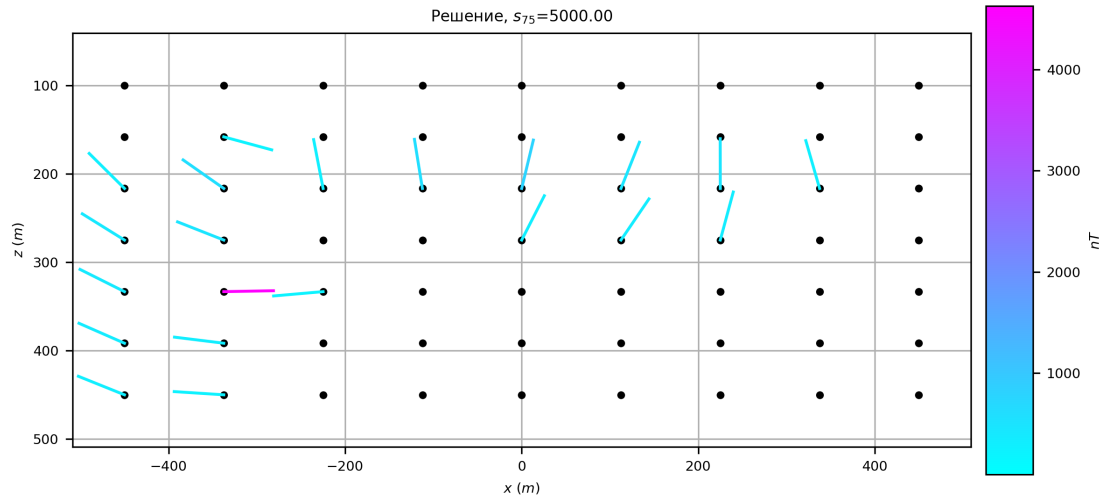
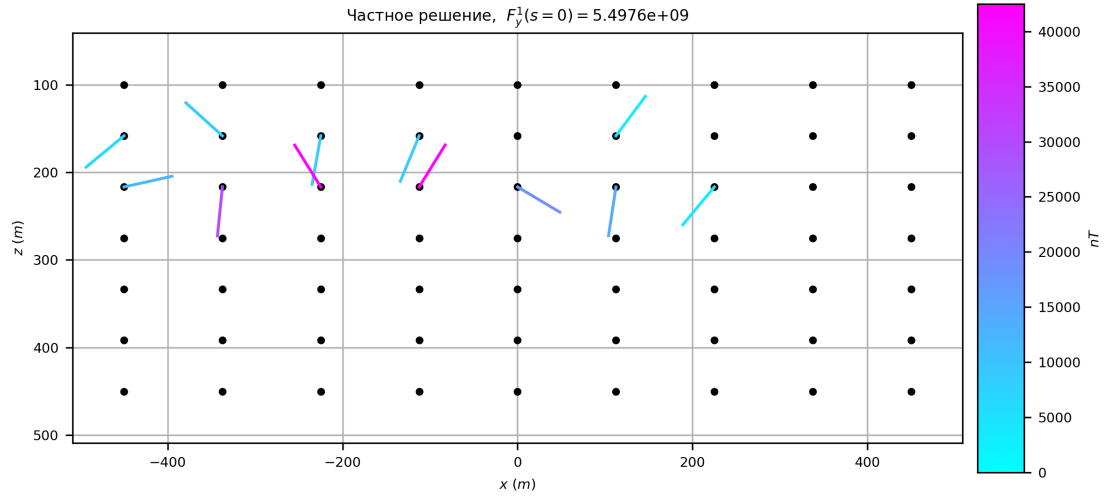
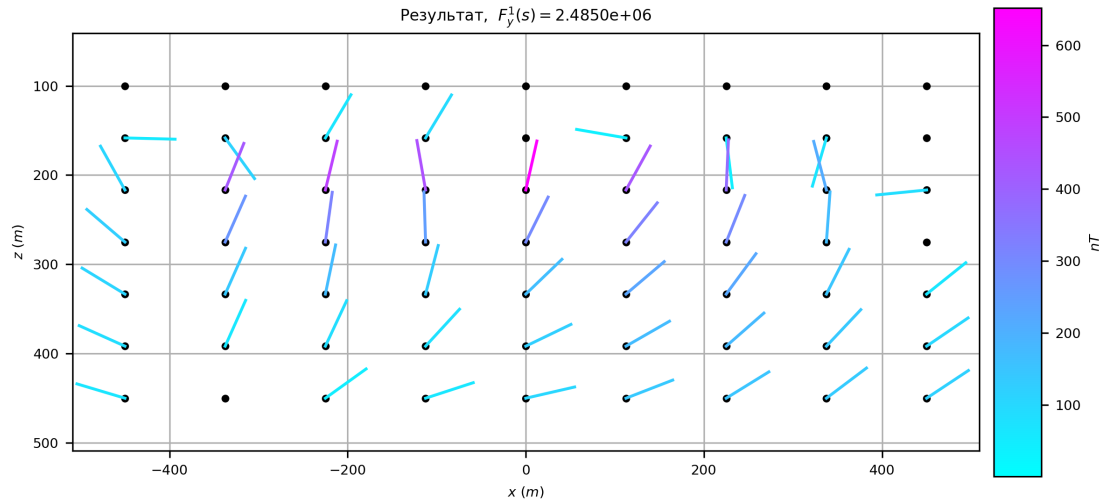


Рис. 12: Решение, полученное при помощи вектора  $s$  равному нулю везде, кроме 75-ой координаты.  $\|Ax - b\| = 6.359316e^{-13}$

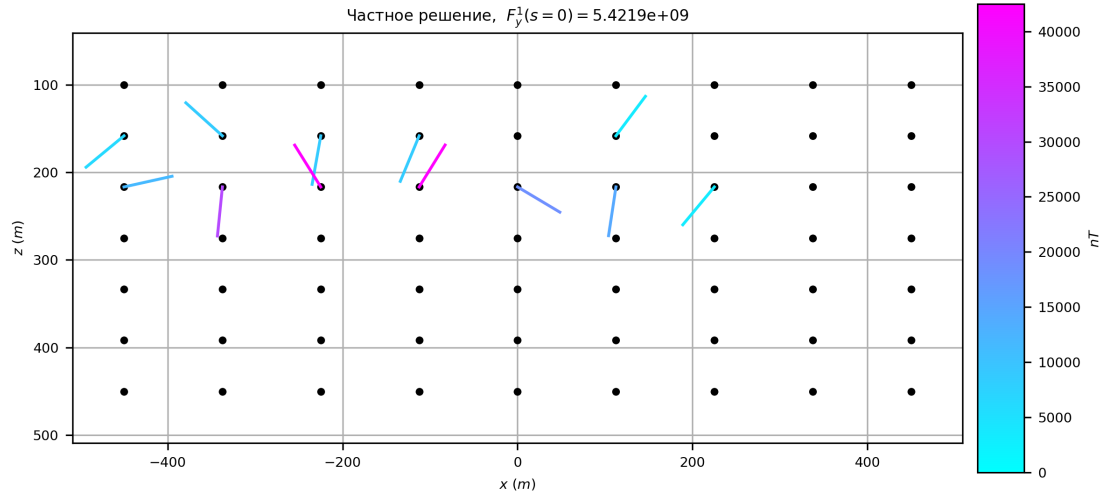
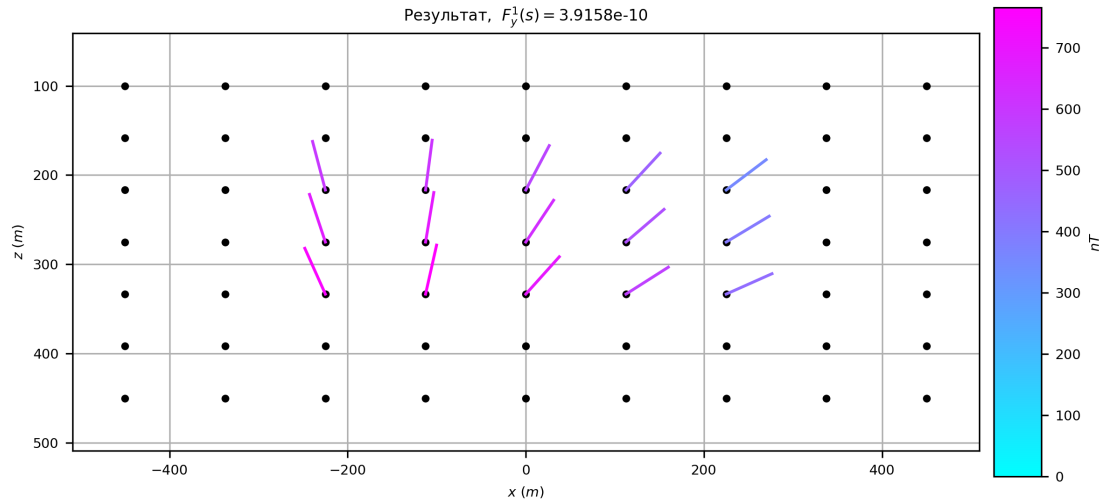
ПРИМЕР 3 ( $F_y^1$ ). Поиск решения с наименьшей нормой. На рисунке 13 показано частное решение  $x^*$  (4).

Для получения решения задачи в данной постановке использовался алгоритм ПГС, потребовалось 82 итерации. На рисунке 14 показано итоговое решение данного примера

Рис. 13: Частное решение.  $\|x^*\| = 7.414610e^4$ Рис. 14: Итоговое решение.  $\|x\| = 1.5763745e^3$ 

ПРИМЕР 4 ( $F_y^1$ ). Поиск решения, наиболее похожего на  $x^u$ . На рисунке 15 показано частное решение  $x^*$  (4).

Для получения решения задачи в данной постановке использовался алгоритм ПГС, потребовалось 126 итераций. На рисунке 16 показано итоговое решение данного примера

Рис. 15: Частное решение.  $\|x^* - x^n\| = 7.363328e^4$ Рис. 16: Итоговое решение.  $\|x - x^n\| = 1.978827e^{-5}$ 

ПРИМЕР 5 ( $F_y^3$ ). В данном примере в качестве вектора  $y$  будем использовать вектор  $\left\{ \frac{|D_j|}{\|D_j\|}, j = 1, \dots, n \right\}$  (рис. 17)

Для получения решения использовался алгоритм ПГС, потребовалось 12 итераций. На рисунке 19 показано итоговое решение данного примера. Голубые вектора имеют очень маленькую норму.

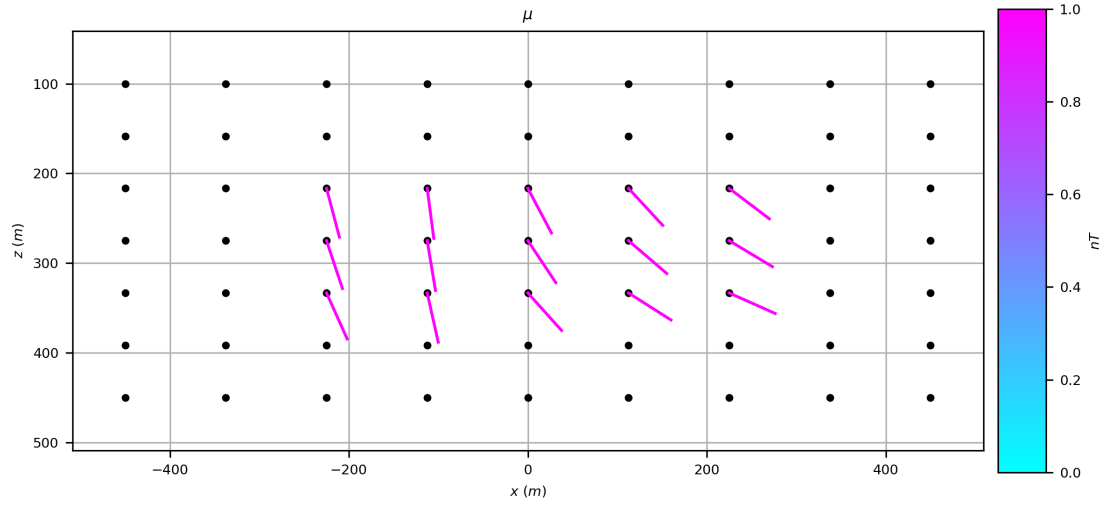
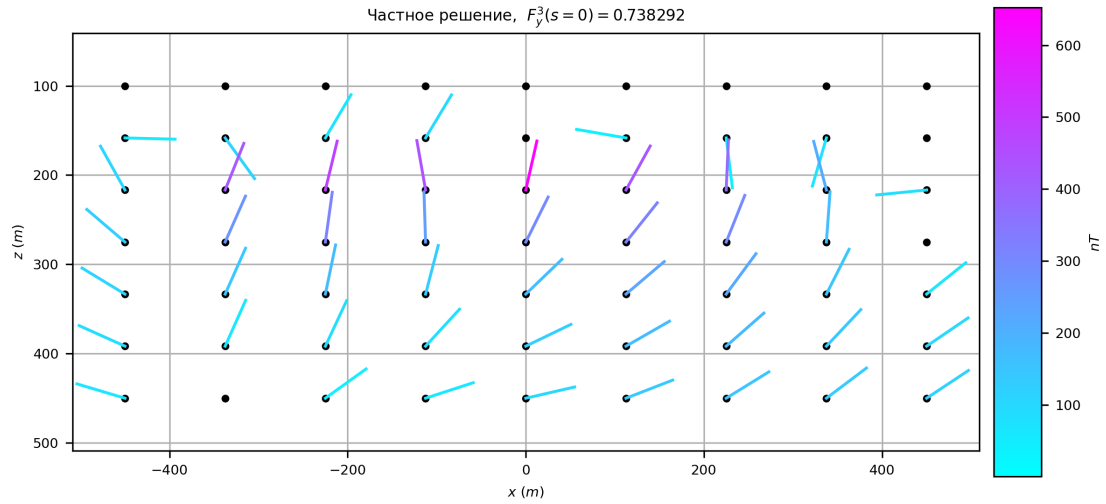
Рис. 17: Целевой вектор  $y$  данного примера

Рис. 18: Частное решение исходной задачи

ПРИМЕР 6 ( $F_\mu^1$ ). В данном примере показано применение трактовки  $E_\mu^1$  к исходной задаче (рис. 7 и 8). Поскольку в данной постановке ищется корреляция модулей на рисунке 20 показано целевые значения. В качестве вектора  $y$  используем нормированное к единице исходное распределение масс  $\left\{ \frac{mD_j}{\sum mD_j}, j = 1, \dots, n \right\}$  (рис. 21). Частное решение показано на рис. 22.

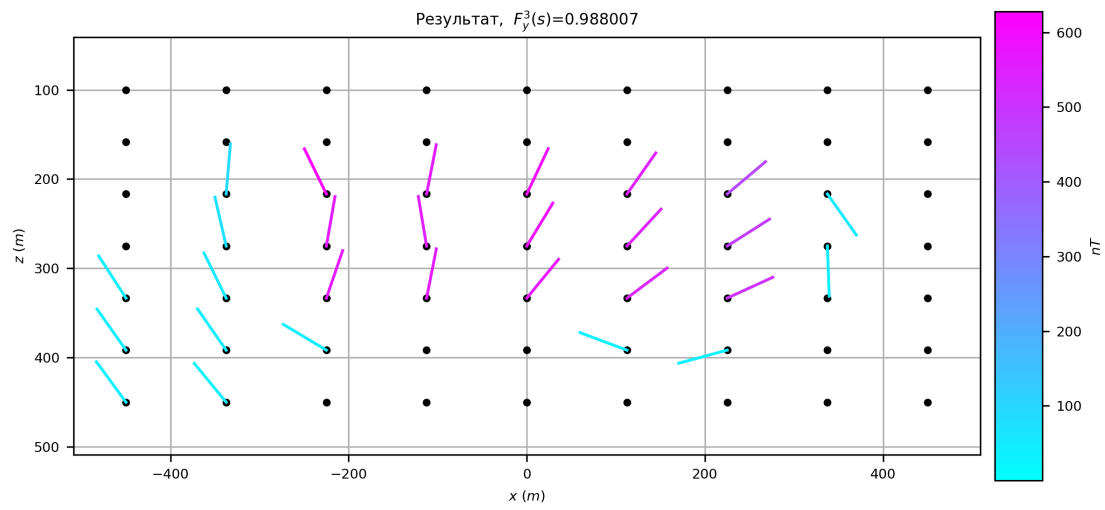


Рис. 19: Итоговое решение

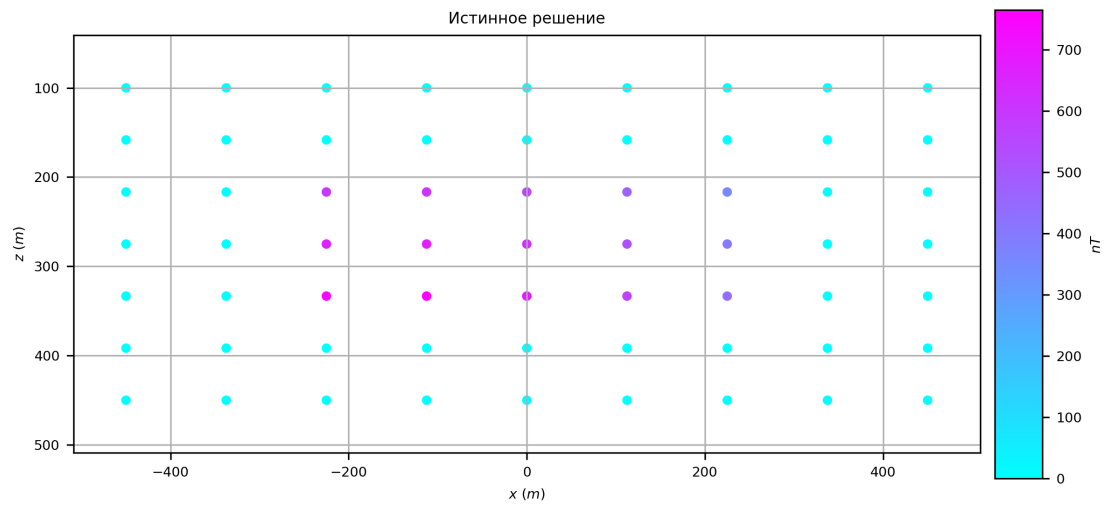


Рис. 20: Распределение модулей исходного магнитного поля (рис. 7)

Для получения решения использовался алгоритм ППС, потребовалось 64 итерации. На рисунке 23 показано итоговое решение данного примера

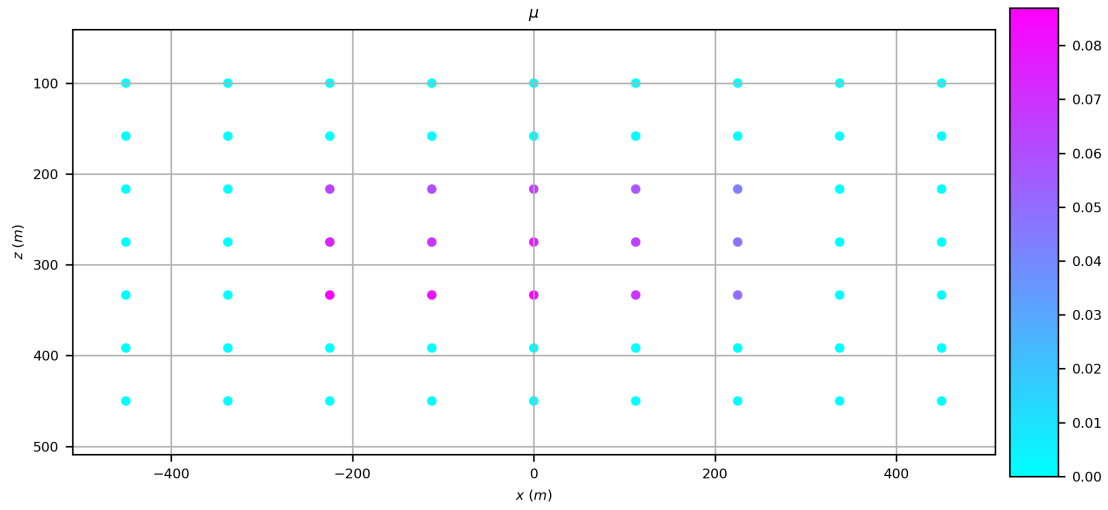
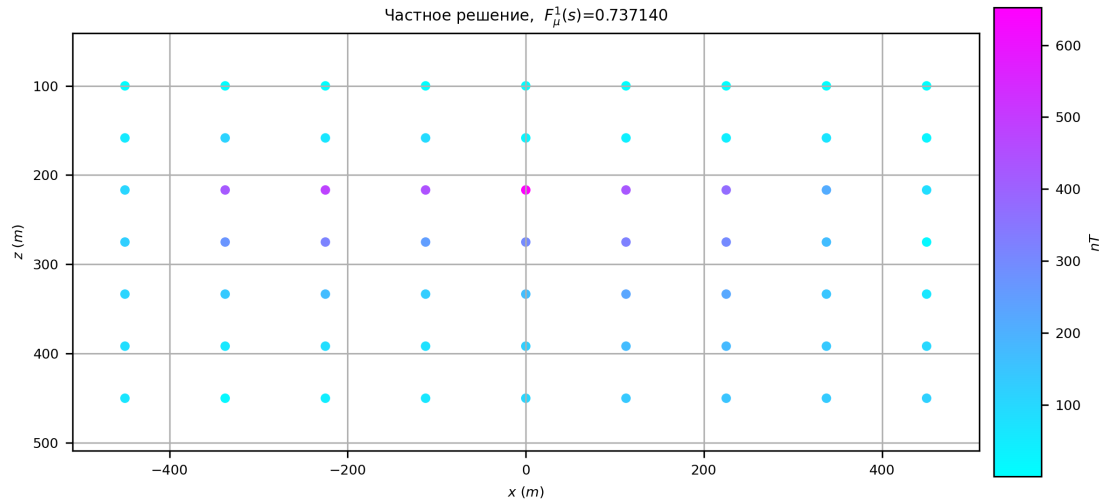
Рис. 21: Вектор  $y$ , с которым мы будем искать корреляцию целевого решения

Рис. 22: Распределение модулей частного решения (рис. 18)

## 6. Заключение

Проекционный метод (ПМ) и его параметризация (6) Открывают совершенно новые возможности в использовании СЛАУ. В разговоре об этом воспользуемся аналогией с космосом.

ПМ выполняет три функции:

- телескопа  $\equiv$  крупно, но конструктивно, описывая многообразие (планету)  $\Phi(A, b)$  решений СЛАУ  $Ax = b$ ;
- космического корабля  $\equiv$  доставляя исследователя в точку частного решения  $x^*$  на  $\Phi(A, b)$ ;
- планетохода  $\equiv$  средства передвижения по  $\Phi(A, b)$  из  $x^*$ , благодаря конструктивности (6), согласно той или иной стратегии на параметр параметризации  $s$ .

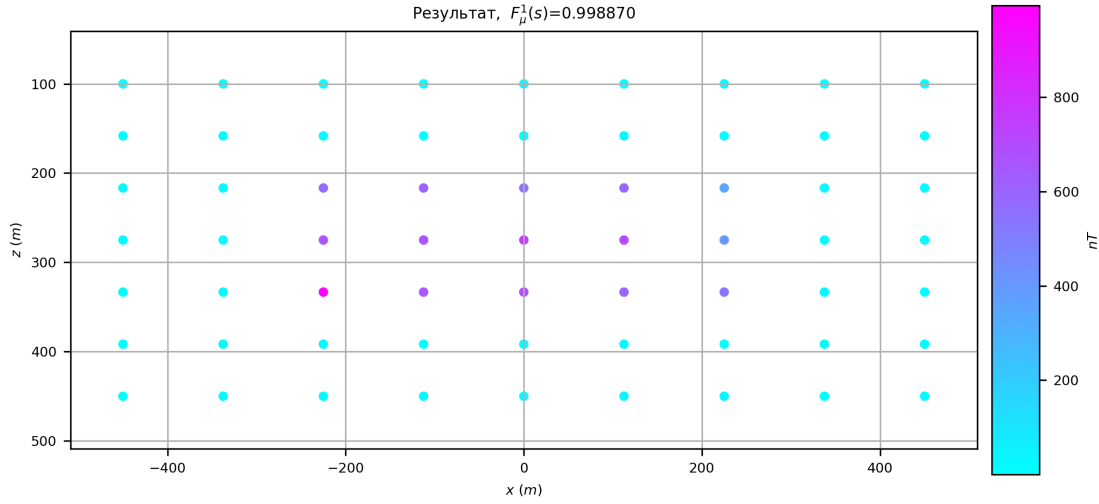


Рис. 23: Итоговое решение

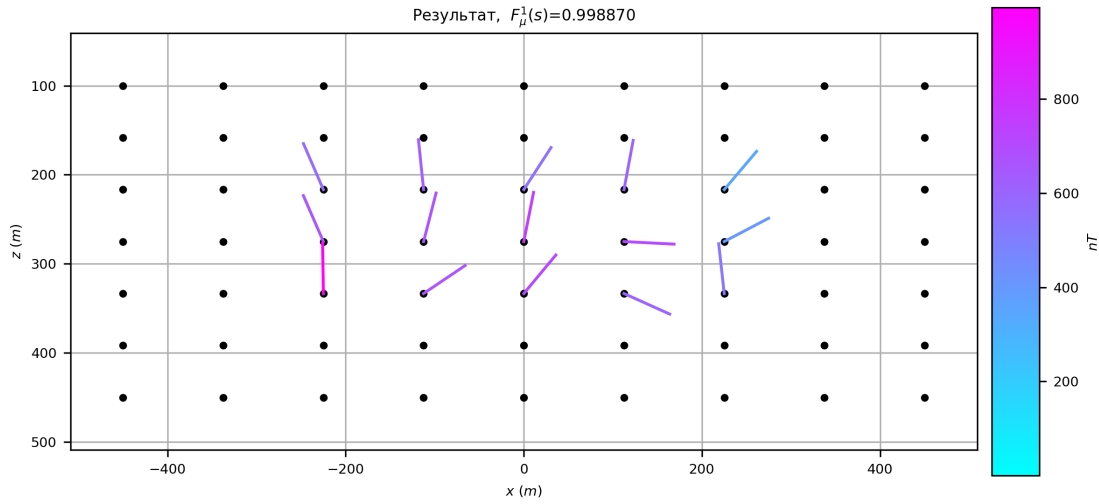


Рис. 24: Итоговое решение

Последняя зависит от цели путешествия. В нашем случае это конструкции  $E_y$  и  $E_\mu$ , а их техническое выражение – Полиномиальный Спуск (ПС) в виде алгоритмов ПГС и ППС.

Приведенные в работе сценарии изучения  $\Phi(A, b)$  фундаментальны, но просты. Из них должны складываться путешествия с более сложными целями. Технически они должны представлять собой соединение функционалов  $F_y$  и  $F_\mu$  с помощью тех или иных операций (разного рода усреднений, операторов нечеткой логики и так далее [5]). Это представляется авторам первым направлением дальнейших исследований.

Второе направление связано с решением важных, но более проблемно ориентированных задач. Так, в магнитном случае значительный интерес представляют обратные задачи с измерениями на поверхности  $I$  не самого поля  $U$ , а его модуля  $|U(I)|$ . Исследования авторов показывают, что эта задача может быть решена полиномиальным спуском 3-ей степени.

Третье направление возможных исследований связано с предположением о наличии топологической структуры на множестве индексов  $J$  переменной  $x = (x_j, j \in J)$  СЛАУ  $\Phi(A, b)$ . В этом случае исследование ДМА по дискретным функциям [6, 8, 7, 9, 10] позволяет построить новые суждения  $E(x^n)$  относительно истинного решения  $x^n$ .

Работа выполнена в рамках гранта РНФ 24-17-00346 «Определение пространственно-временной структуры магнитного поля Земли в окрестностях геомагнитных обсерваторий РФ с применением БПЛА».

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Булычев А. А., Соловьев А. А., Фирсов И. А. Проекционный метод решения систем линейных уравнений и его применение в гравиметрии // Доклады Российской Академии Наук. Науки о Земле. 2020. Vol. 493, №1. Р. 58–62.
2. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Firsov I. Solving Inverse Magnetometry Problems Using Fuzzy Logic // Russian Journal of Earth Sciences. 2024. Vol. 24, №4.
3. С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, А. А. Соловьев, Б. А. Дзедобоев, Б. В. Дзеранов, М. Н. Добровольский. Методы нечеткой математики для комплексного анализа геофизических данных // Физика Земли. 2025. №5. Р. 3–26.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа // Физматлит. 2009. Р. 572. 2025. №5. Р. 3–26.
5. Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф., Силов В. Б., Тарасов В. Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта // Наука, Москва. 1986. Р. 312.
6. Агаян С. М., Камаев Д. А., Богоутдинов Ш. Р., Павелъев А. С. Гравитационное сглаживание временных рядов (спектральные свойства) // Чебышевский сборник. 2018. Vol. 19, №4. Р. 11–25.
7. Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р. Исследование систем действительных функций на двумерных сетках с использованием нечетких множеств // Чебышевский сборник. 2019. Vol. 20, №1. Р. 94–111.
8. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Камаев Д. А., Добровольский М. Н. Стохастические тренды на основе нечеткой математики // Чебышевский сборник. 2019. Vol. 20, №3. Р. 92–106.
9. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Добровольский М. Н., Иванченко О. В., Камаев Д. А. Регрессионное дифференцирование и регрессионное интегрирование конечных рядов // Чебышевский сборник. 2021. Vol. 22, №2. Р. 27–47.
10. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Камаев Д. А., Дзедобоев Б. А., Добровольский М. Н. Распознавание аномалий на записях с помощью нечеткой логики // Чебышевский сборник. 2025. Vol. 26, №3. Р. 6–43.

## REFERENCES

1. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Bulychev A. A., Soloviev A. A., Firsov I. A. 2020, “Projection Method for Solving Systems of Linear Equations and its Application in Gravimetry”, *Reports of the Russian Academy of Sciences. Earth Sciences*, vol. 493, no. 1, pp. 58–62.
2. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Firsov I. 2024, “Solving Inverse Magnetometry Problems Using Fuzzy Logic”, *Russian Journal of Earth Sciences*, vol. 24, no. 4.



3. Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Soloviev, A. A., Dzeboev, B. A., Dzeranov, B. V., Dobrovolsky, M. N. 2025, "Fuzzy Mathematics Methods for Comprehensive Analysis of Geophysical Data", *Physics of the Earth*, vol. 493, no. 5, pp. 3–26.
4. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. 2009, "Elements of the theory of functions and functional analysis", *Fizmatlit*, 572 p.
5. Averkin A. N., Batyrshin I. Z., Blishun A. F., Silov V. B., Tarasov V. B. 1986, "Fuzzy sets in control models and artificial intelligence", *Nauka, Moscow*, 312 p.
6. Agayan S. M., Kamaev D. A., Bogoutdinov Sh. R., Pavel'ev A. S. 2018, "Gravity smoothing of time series (spectral properties)", *Chebyshevsky sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 11–25.
7. Gvishiani A. D., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R. 2019, "Study of systems of real functions on two-dimensional grids using fuzzy sets", *Chebyshevsky sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 94–111.
8. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Kamaev D. A., Dobrovolsky M. N. 2019, "Stochastic trends based on fuzzy mathematics", *Chebyshevsky sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 92–106.
9. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Dobrovolsky M. N., Ivanchenko O. V., Kamaev D. A. 2021, "Regression differentiation and regression integration of finite series", *Chebyshevsky sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 27–47.
10. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Kamaev D. A., Dzeboev B. A., Dobrovolsky M. N. 2025, "Recognition of anomalies in recordings using fuzzy logic", *Chebyshevsky sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 6–43.

Получено: 18.07.2025

Принято в печать: 08.12.2025