

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 519.6

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-6-16

К вопросу о дискретной гладкости¹

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, М. Н. Добровольский, Д. А. Камаев

Агаян Сергей Мартикович — доктор физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: s.agayan@gcras.ru

Богоутдинов Шамиль Рафекович — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН; Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН (г. Москва).

e-mail: shm@gcras.ru

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Камаев Дмитрий Альфредович — доктор технических наук, ФГБУ «Научно-производственное объединение «Тайфун» (г. Обнинск).

e-mail: post@typhoon.obninsk.ru

Аннотация

Дискретный математический анализ (ДМА) — новый подход к анализу данных, ориентированный на исследователя и занимающий промежуточное положение между жесткими математическими методами и мягкими нечеткими.

Важную роль в ДМА играют нечеткие множества (НМ), часть из которых является моделями дискретных аналогов фундаментальных математических свойств (близости, предельности, тренда, связности, ...), а также нечеткая логика (НЛ), позволяющая соединить нечеткие модели в алгоритмы анализа данных, в частности, по сценариям классической математики.

В ДМА принят регрессионный подход к пределу и производной: они являются соответственно значением и угловым коэффициентом линейной регрессии, построенной по функции и нечеткой структуре на исходном конечном пространстве, моделирующей предельный переход в его точке. Таким образом, регрессионный предел и регрессионная производная существуют всегда. Возникает вопрос об их качестве, в частности, о способности увидеть дискретную гладкость. Это требует более глубокого, чем традиционный, анализа регрессии, чему и посвящена настоящая работа.

Ключевые слова: ДМА, дискретная гладкость, регрессионное дифференцирование, Ф-параметр.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Добровольский М. Н., Камаев Д. А. К вопросу о дискретной гладкости // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 6–16.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Геофизического центра РАН, утвержденного Минобрнауки России.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 519.6

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-6-16

On the issue of discrete smoothness

S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, M. N. Dobrovolsky, D. A. Kamaev

Agayan Sergey Martikovich — doctor of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: s.agayan@gcras.ru

Bogoutdinov Shamil Rafekovich — candidate of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences; Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: shm@gcras.ru

Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Kamaev Dmitry Alfredovich — doctor of technical sciences, Research and Production Association “Typhoon” (Obninsk).

e-mail: post@typhoon.obninsk.ru

Abstract

Discrete Mathematical Analysis (DMA) is a new approach to data analysis, focused on the researcher and occupying an intermediate position between hard mathematical methods and soft fuzzy methods.

Fuzzy Sets (FS) play an important role in DMA, some of which are models of discrete analogs of fundamental mathematical properties (proximity, limit, trend, connectivity, ...), as well as Fuzzy Logic (FL), which allows combining fuzzy models into data analysis algorithms, in particular, according to classical mathematical scenarios.

In DMA, a regression approach to the limit and derivative is adopted: they are, respectively, the value and slope of a linear regression, constructed based on a function and fuzzy structure on the initial finite space, modeling the limit transition at its point.

Thus, the regression limit and regression derivative always exist. The question arises about their quality, in particular, the ability to detect discrete smoothness. This requires a more in-depth regression analysis than traditional methods, which is the focus of this paper.

Keywords: DMA, discrete smoothness, regression differentiation, Φ -parameter.

Bibliography: 5 titles.

For citation:

Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Dobrovolsky, M. N., Kamaev, D. A. 2025, “On the issue of discrete smoothness”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 6–16.

1. Введение

В «Дискретном Математическом Анализе (ДМА)» [1]–[3] принят регрессионный подход к пределу и производной функции на конечном пространстве. Сначала в каждой точке пространства с помощью нормированной системы весов (нечеткой меры) на нем моделируется предельный переход в точке. Далее функция и мера соединяются для построения линейной

регрессии. Ее значение считается пределом функции в точке, а угловой коэффициент — производной.

Таким образом, регрессионный предел и регрессионная производная существуют всегда. Исследование показывает, что они очень эффективны в анализе данных. Тем не менее, более глубокий анализ функций на конечных пространствах, в частности, временных рядов требует дополнительного изучения этих понятий. Именно этому посвящена настоящая работа.

2. Φ -параметр конечного неотрицательного ряда

Через $\mathbb{R}(h) = \{ih, i \in \mathbb{Z}\}$ обозначим дискретную прямую с шагом h . Предполагается, что на отрезке $T(N) \subset \mathbb{R}(h)$

$$T(N) = \{t\} = \{t_1 = h, \dots, t_N = Nh\} \quad (1)$$

задан неотрицательный ряд $x = \{x_t\} = \{x_i = x(t_i) \geq 0\}$ и взгляд на $T(N)$ из нуля в виде весов $\delta = \{\delta_t\} = \{\delta_i = \delta(t_i)\}$.

Положим

$$\begin{aligned} \sum \delta &= \sum \delta_t : t \in T(N) \\ a_t &= \delta_t / \sum \delta, t \in T(N), a_i = a_{t_i} \\ M(x) &= \sum a_t x_t \leftrightarrow \delta\text{-среднее } x \text{ на } T(N) \end{aligned} \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Отношение $M(tx)$ к $M(x)$ называется Φ -параметром ряда x и обозначается через $\Phi(x)$:*

$$\Phi(x) = \sum a_i t_i x_i / \sum a_i x_i \quad (3)$$

Благодаря неотрицательности x_i параметр $\Phi(x)$ допускает прозрачную интерпретацию: положим $A_i = a_i x_i / M(x)$, тогда

$$\Phi(x) = \sum A_i t_i, A_i \geq 0 \text{ и } \sum A_i = 1$$

Вывод: параметр $\Phi(x)$ лежит в классическом отрезке $[t_1, t_2]$ и может считаться «горизонтальным центром тяжести ряда x » (вертикальным является $M(x)$).

Из однородности и аддитивности усреднения $x \rightarrow M(x)$ следует инвариантность относительно растяжения параметра $\Phi(x)$ и его квазилинейность:

- для $\lambda > 0 \rightarrow \Phi(\lambda x) = \Phi(x)$
- если $x \geq 0, y \geq 0$, то

$$\Phi(x + y) = \frac{M(x)}{M(x) + M(y)} \Phi(x) + \frac{M(y)}{M(x) + M(y)} \Phi(y)$$

Переходим к основному свойству параметра $\Phi(x)$, а именно к его монотонности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Отношение*

$$\Phi(x)(\alpha) = \Phi(xt^\alpha) = M(xt^{\alpha+1})/M(xt^\alpha) \quad (4)$$

возрастает по α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью дифференцирования по α путем анализа числителя $M(xt^{\alpha+1})'M(xt^\alpha) - M(xt^{\alpha+1})M(xt^\alpha)'$ производной $\Phi(xt^\alpha)'$:

первое слагаемое:

$$\begin{aligned} M(xt^{\alpha+1})'M(xt^\alpha) &= \left(\sum a_i x_i t_i^{\alpha+1} \ln t_i \right) \left(\sum a_{\bar{i}} x_{\bar{i}} t_{\bar{i}}^\alpha \right) = \sum_{(i, \bar{i})} a_i x_i t_i^{\alpha+1} \ln t_i a_{\bar{i}} x_{\bar{i}} t_{\bar{i}}^\alpha = \\ &= \sum_{(i, \bar{i}) + (\bar{i}, i) : i \neq \bar{i}} (a_i x_i t_i^{\alpha+1} \ln t_i a_{\bar{i}} x_{\bar{i}} t_{\bar{i}}^\alpha + a_{\bar{i}} x_{\bar{i}} t_{\bar{i}}^{\alpha+1} \ln t_{\bar{i}} a_i x_i t_i^\alpha) + \sum_{(i, i)} a_i^2 x_i^2 t_i^{2\alpha+1} \ln t_i = \\ &= \sum_{(i, \bar{i}) + (\bar{i}, i) : i \neq \bar{i}} a_i a_{\bar{i}} x_i x_{\bar{i}} t_i^\alpha t_{\bar{i}}^\alpha (t_i \ln t_i + t_{\bar{i}} \ln t_{\bar{i}}) + \sum_{(i, i)} a_i^2 x_i^2 t_i^{2\alpha+1} \ln t_i \end{aligned}$$

второе слагаемое:

$$\begin{aligned} M(xt^{\alpha+1})M(xt^\alpha)' &= \left(\sum a_i x_i t_i^{\alpha+1} \right) \left(\sum a_{\bar{i}} x_{\bar{i}} t_{\bar{i}}^\alpha \ln t_{\bar{i}} \right) = \sum_{(i, \bar{i})} a_i x_i t_i^{\alpha+1} a_{\bar{i}} x_{\bar{i}} t_{\bar{i}}^\alpha \ln t_{\bar{i}} = \\ &= \sum_{(i, \bar{i}) + (\bar{i}, i) : i \neq \bar{i}} (a_i x_i t_i^{\alpha+1} a_{\bar{i}} x_{\bar{i}} t_{\bar{i}}^\alpha \ln t_{\bar{i}} + a_{\bar{i}} x_{\bar{i}} t_{\bar{i}}^{\alpha+1} a_i x_i t_i^\alpha \ln t_i) + \sum_{(i, i)} a_i^2 x_i^2 t_i^{2\alpha+1} \ln t_i = \\ &= \sum_{(i, \bar{i}) + (\bar{i}, i) : i \neq \bar{i}} a_i a_{\bar{i}} x_i x_{\bar{i}} t_i^\alpha t_{\bar{i}}^\alpha (t_i \ln t_{\bar{i}} + t_{\bar{i}} \ln t_i) + \sum_{(i, i)} a_i^2 x_i^2 t_i^{2\alpha+1} \ln t_i \end{aligned}$$

разность:

$$M(xt^{\alpha+1})'M(xt^\alpha) - M(xt^{\alpha+1})M(xt^\alpha)' = \sum_{(i, \bar{i}) + (\bar{i}, i) : i \neq \bar{i}} a_i a_{\bar{i}} x_i x_{\bar{i}} t_i^\alpha t_{\bar{i}}^\alpha (t_i \ln t_i + t_{\bar{i}} \ln t_{\bar{i}} - t_i \ln t_{\bar{i}} - t_{\bar{i}} \ln t_i)$$

отдельно:

$$t_i \ln t_i + t_{\bar{i}} \ln t_{\bar{i}} - t_i \ln t_{\bar{i}} - t_{\bar{i}} \ln t_i = t_i (\ln t_i - \ln t_{\bar{i}}) - t_{\bar{i}} (\ln t_i - \ln t_{\bar{i}}) = (t_i - t_{\bar{i}}) (\ln t_i - \ln t_{\bar{i}}) > 0$$

в силу положительной монотонности логарифма $\ln t$.

Числитель производной, а потому и сама производная дроби $M(t^{\alpha+1}x)/M(t^\alpha x)$ положительна. Следовательно функция $\Phi(x)(\alpha)$ всегда возрастает на прямой $\mathbb{R}(\alpha)$. Доказательство окончено. $\square$

Определим носитель $\text{Supp } x$ ряда x : он поможет понять поведение $\Phi(x)(\alpha)$ при $\alpha = \pm\infty$:

$$\text{Supp } x = \{t_i : x_i > 0\} = \{t^*(x) = t_i^* < \dots < t_{i^{**}} = t^{**}(x)\} \quad (5)$$

В этих обозначениях

$$\Phi(x)(\alpha) = \frac{a_{i^*} x_{i^*} t_{i^*}^{\alpha+1} + \dots + a_{i^{**}} x_{i^{**}} t_{i^{**}}^{\alpha+1}}{a_{i^*} x_{i^*} t_{i^*}^\alpha + \dots + a_{i^{**}} x_{i^{**}} t_{i^{**}}^\alpha} \quad (6)$$

Это рациональное представление дает возможность понять поведение функции $\Phi(x)(\alpha)$ на бесконечностях:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \Phi(x)(\alpha) = \frac{t_{i^*}^{\alpha+1} (a_{i^*} x_{i^*} + \dots + a_{i^{**}} x_{i^{**}} (t_{i^{**}}/t_{i^*})^{\alpha+1})}{t_{i^*}^\alpha (a_{i^*} x_{i^*} + \dots + a_{i^{**}} x_{i^{**}} (t_{i^{**}}/t_{i^*})^\alpha)} = \frac{t_{i^*}^{\alpha+1} (a_{i^*} x_{i^*} + o(\alpha))}{t_{i^*}^\alpha (a_{i^*} x_{i^*} + o(\alpha))} = t_{i^*} = t^*(x)$$

Аналогично

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Phi(x)(\alpha) = \frac{t_{i^{**}}^{\alpha+1} (a_{i^{**}} x_{i^{**}} + \dots + a_{i^*} x_{i^*} (t_{i^*}/t_{i^{**}})^{\alpha+1})}{t_{i^{**}}^\alpha (a_{i^{**}} x_{i^{**}} + \dots + a_{i^*} x_{i^*} (t_{i^*}/t_{i^{**}})^\alpha)} = \frac{t_{i^{**}}^{\alpha+1} (a_{i^{**}} x_{i^{**}} + o(\alpha))}{t_{i^{**}}^\alpha (a_{i^{**}} x_{i^{**}} + o(\alpha))} = t_{i^{**}} = t^{**}(x)$$

Вывод: $\Phi(x)(\alpha)$ — непрерывная, возрастающая на $\mathbb{R}(\alpha)$ функция с образом $[t^*(x), t^{**}(x)]$.

Дальнейшее тесно связано с примером, в котором функция x является тождественной единицей.

ПРИМЕР 1. $x \equiv 1$. В этом случае все действующие лица выглядят так:

$$\Phi(1)(\alpha) = M(t^{\alpha+1})/M(t^\alpha); t^*(1) = t_1, t^{**}(1) = t_N$$

Поскольку $\Phi(1)(\alpha) = \Phi(t^\alpha)$, то функция $\Phi(1)(\alpha)$ является Φ -параметризацией на $T(N)$ важнейшего степенного семейства $\mathcal{T} = \{t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Это обстоятельство вместе с установленной монотонностью $\Phi(1)(\alpha)$ дает возможность определить для любого неотрицательного на $T(N)$ ряда его порядок в нуле.

Действительно, параметр $\Phi(x)$, являясь «горизонтальным центром тяжести» для x , лежит в $[t_1, t_N]$, а образ функций $\Phi(1)(\alpha)$ совпадает с отрезком $[t_1, t_N]$. Поэтому в силу монотонности $\Phi(1)(\alpha)$ существует единственный показатель $\alpha(x)$, для которого $\Phi(t^{\alpha(x)}) = \Phi(x)$. Его будем считать порядком x и обозначать через $\text{ord } x$. Порядком ряда, тождественно равного нулю, будем считать бесконечность: $\text{ord } 0 = \infty$.

Если $C(x) = M(x)/M(t^{\text{ord } x})$, то функция $C(x)t^{\text{ord } x}$ имеет одинаковые с x параметры $M(x)$ и $\Phi(x)$. Этого оказывается достаточно для регрессионного равенства x и $C(x)t^{\text{ord } x}$ на $T(N)$ в нуле. Неформально последнее означает, что у них одна δ -регрессия на $T(N)$, вокруг которой они, колеблясь, приближаются к нулю по горизонтали (рис. 1).

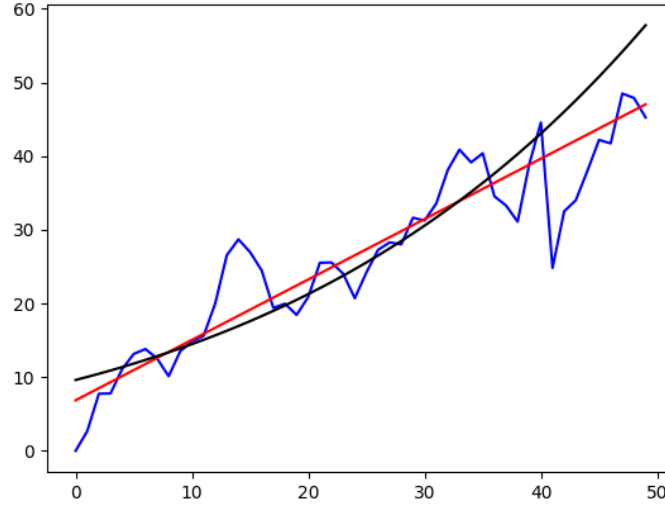


Рис. 1: Синий ряд — x , черный — $C(x)t^{\text{ord } x}$, красный — их общая δ -регрессия.

ТЕОРЕМА 1. Для любого неотрицательного на $T(N)$ ряда x существует единственная степенная модель $C(x)t^{\text{ord } x}$, имеющая одинаковую с x линейную δ -регрессию на $T(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталась только регрессионная часть. Обозначим через $l_\delta x$ линейную регрессию для x на $T(N)$ относительно весов δ :

$$l_\delta x \leftrightarrow l_\delta x(t) = a(x)t + b(x) \quad (7)$$

По модулю стандартных рассуждений, касающихся регрессии, коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} M(t^2)a(x) + M(t)b(x) = M(tx) \\ M(t)a(x) + b(x) = M(x) \end{cases}$$

Из нее

$$\begin{cases} a(x) = \frac{M(tx) - M(t)M(x)}{M(t^2) - M^2(t)} = M(x) \left(\frac{\Phi(x) - M(t)}{M(t^2) - M^2(t)} \right) \\ b(x) = M(x) - M(t)a(x) \end{cases}$$

Таким образом, пара $(M(x), \Phi(x))$ однозначно определяет регрессию $l_\delta x$. Доказательство окончено. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Стандартная степенная модель для x в анализе данных основана на регрессии x в двойном логарифмическом масштабе [4]. Степенная модель для x , построенная по параметру $\Phi(x)$, связана с x непосредственно. Их сравнение приведено на рис. 2.

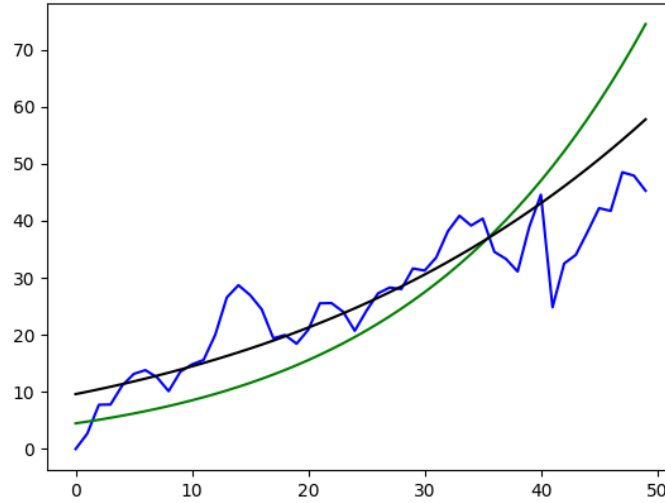


Рис. 2: Синий — исходный ряд x , зеленый — стандартная степенная модель для x , черный — степенная модель для x , построенная по параметру $\Phi(x)$.

3. Приложение к произвольным рядам

В дальнейшем T произвольный отрезок на дискретной прямой $\mathbb{R}(h)$ с концами a и b , f ряд на T , $R = Nh \ll b - a$ радиус локального обзора f в узле $t \in T$ с весом δ .

Обозначим через $x_f^+(t)$ и $x_f^-(t)$ неотрицательные ряды на $T(N)$:

$$\begin{aligned} x_f^+(t)(ih) &= |f(t + ih) - f(t)| \\ x_f^-(t)(ih) &= |f(t - ih) - f(t)|; i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ряд f в узле t будем считать справа (слева):

- гладким, если $\text{ord } x_f^+(t) \geq 1$ ($\text{ord } x_f^-(t) \geq 1$)
- липшицевым, если $\text{ord } x_f^+(t) \in (0, 1)$ ($\text{ord } x_f^-(t) \in (0, 1)$)
- разрывным, если $\text{ord } x_f^+(t) \leq 0$ ($\text{ord } x_f^-(t) \leq 0$)

Механизм $\text{ord } x_f^\pm(t)$ инвариантен. С одной стороны, это, безусловно, достоинство, поскольку дает возможность проникать глубоко во внутрь устройства f около t . С другой стороны, в анализе данных решающее слово за исследователем и такая строгость часто обременительна: на рис. 3 механизм $\text{ord } x_f^\pm(t)$ выделяет три аномалии, в то время как для исследователя есть только одна — правая. Таким образом, нужным является более мягкое отношение к механизму $\text{ord } x_f^\pm(t)$, обратно зависящее от средних $M(x_f^\pm(t))$: чем они меньше, тем отношение мягче.

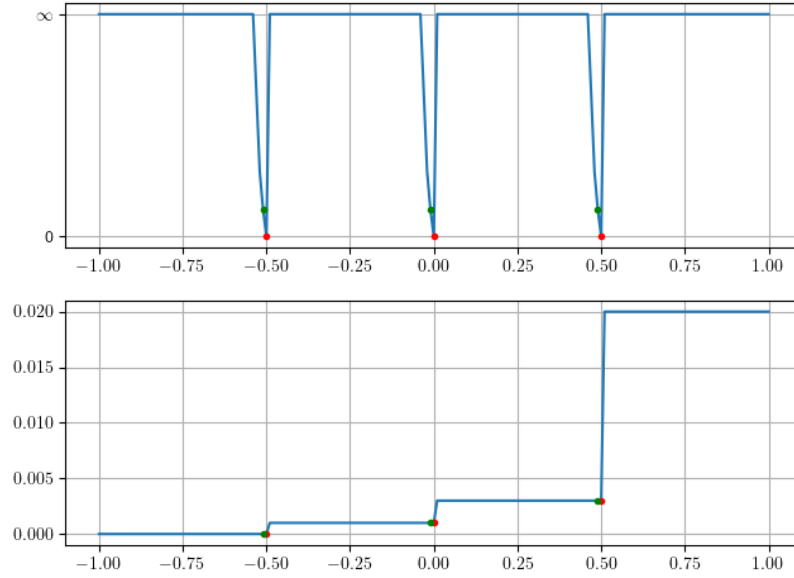


Рис. 3: Вверху — порядок $\text{ord } x_f^\pm(t)$, внизу — ряд f .

Авторы строят его в рамках ДМА, используя нечеткую логику. Сначала определяются нечеткие меры $\mu_M(x)$ и $\mu_\Phi(x)$, выражающие восприятие исследователем параметров $M(x)$ и $\Phi(x)$. Далее меры $\mu_M(x)$ и $\mu_\Phi(x)$ соединяются в рамках нечеткой логики в меру $\mu(x)$, представляющую собой итоговое понимание исследователем свойств гладкости, липшицевости и разрывности, причем в разных, зависящих от исследователя, пропорциях. Вариантов много, поскольку в их создании активное участие должен принимать исследователь. Эффективность таких конструкций нужно оценивать в рамках анализа данных, т.е. с практической точки зрения. Вариант, принятый в статье, представлен ниже формулами (10). Общая мера $\mu_f(t)$ получается из меры $\mu(x)$ и механизма $x_f^\pm(t)$ с помощью нечеткой конъюнкции $\min$:

$$\mu_f(t) = \min \left(\mu(x_f^+(t)), \mu(x_f^-(t)) \right) \quad (9)$$

На рис. 4 мера $\mu_f(t)$ решает вопрос разрывности для лестницы f (рис. 3) в пользу исследователя. Далее: на рис. 5 приведен дискретный след кусочно-гладкой функции. При его анализе на первый план выходит свойство гладкости, требующее более пристального к ней внимания. Соответствующий вариант меры $\mu_f(t)$ учитывает это, деля липшицевость на сильную и слабую. Первая трактуется как переход от гладкости к негладкости (зеленое), а вторая как негладкость (красное).

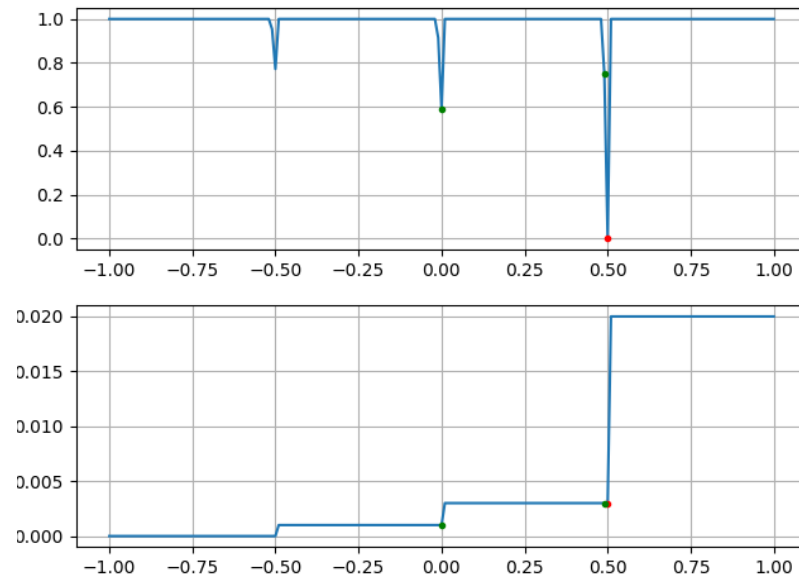


Рис. 4: Вверху — мера гладкости $\mu_f(t)$, внизу — классификация точек ряда $f(t)$ относительно меры $\mu_f(t)$ (непрерывные — синие, промежуточные — зеленые, разрывные — красные).

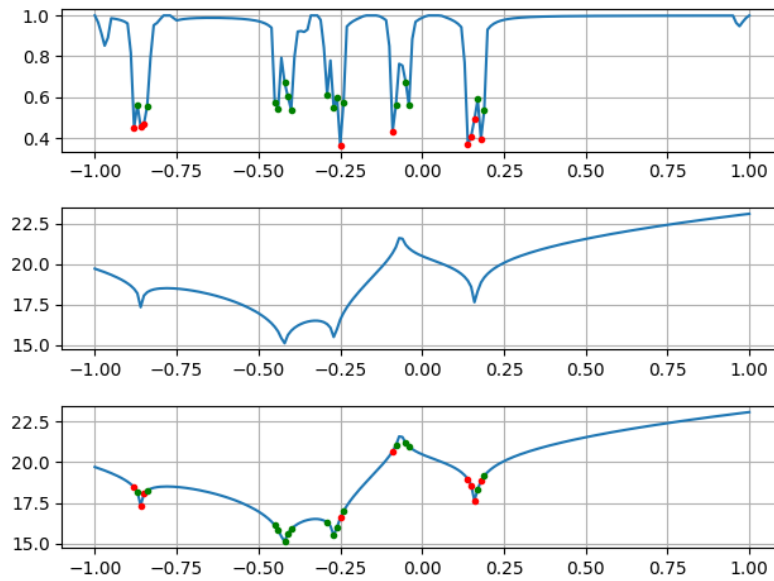


Рис. 5: Вверху — мера гладкости $\mu_f(t)$, посередине — ряд $f(t)$, внизу — классификация точек ряда $f(t)$ относительно меры $\mu_f(t)$ (гладкие — синие, промежуточные — зеленые, негладкие — красные).

В заключение возвратимся к мере $\mu(x)$ и приведем ее вариант, участвующий в работе:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= (1 - \mu_\Phi(x))\mu_M(x) + \mu_\Phi(x), \\ \text{где} \\ \mu_\Phi(x) &= \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ord } x > 1 \\ \text{ord } x, & \text{если } \text{ord } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{если } \text{ord } x < 0 \end{cases} \\ \mu_M(x) &= \left(1 - \frac{\min(M(x), B)}{B}\right)^p \end{aligned} \quad (10)$$

Параметр p определяется работой на степенном семействе $\mathcal{T} = \{t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$. В настоящей работе $p = 6.75$ и выбирается из соображения гладкости в нуле $|t^\alpha|$ при $\alpha \geq 1$, переходной гладкости при $\alpha \in [0.5, 1)$ и ее отсутствия при $\alpha < 0.5$ (рис. 6–8).

Параметр B является нижней гранью больших, по мнению исследователя, чисел. В настоящей работе:

$$B = B(f) = \frac{\sum f(t) : t \in T}{|T|} - \min_{t \in T} f(t).$$

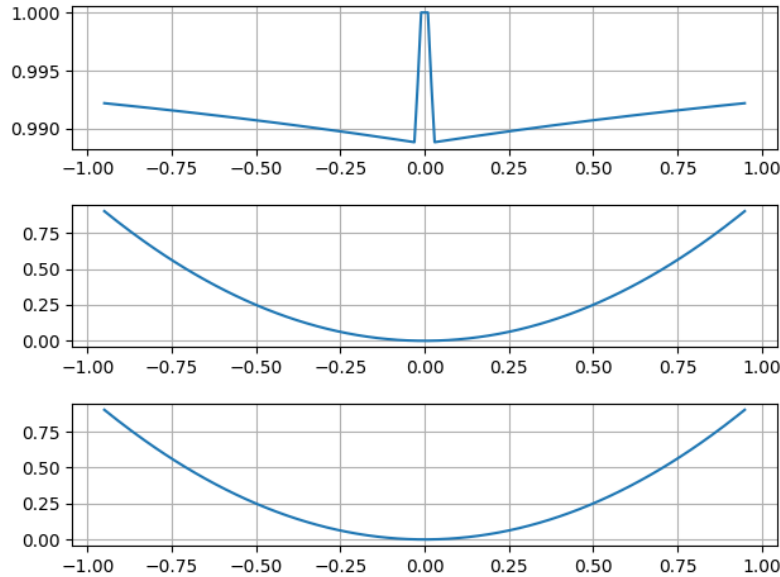


Рис. 6: Пример $f = |t^2|$, сверху — мера гладкости $\mu_f(t)$, посередине — ряд $f(t)$, внизу — классификация точек ряда $f(t)$ относительно меры $\mu_f(t)$ (гладкие — синие, промежуточные — зеленые, негладкие — красные).

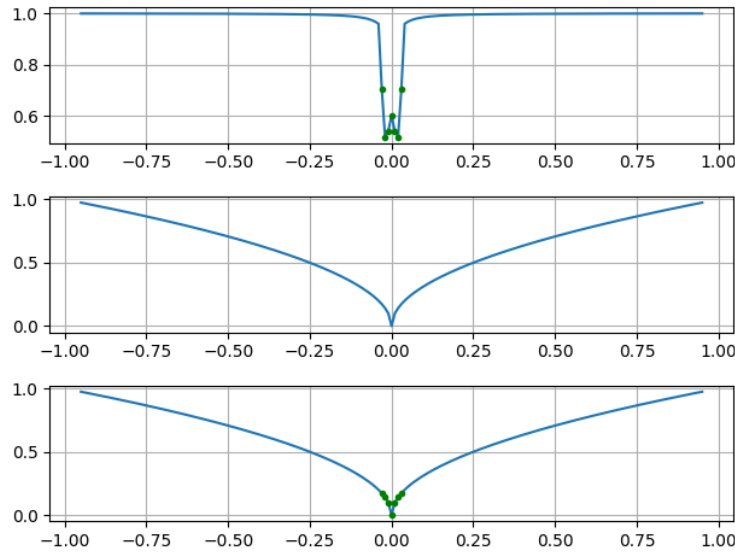


Рис. 7: Пример $f = |t^{0.5}|$, сверху — мера гладкости $\mu_f(t)$, посередине — ряд $f(t)$, внизу — классификация точек ряда $f(t)$ относительно меры $\mu_f(t)$ (гладкие — синие, промежуточные — зеленые, негладкие — красные).

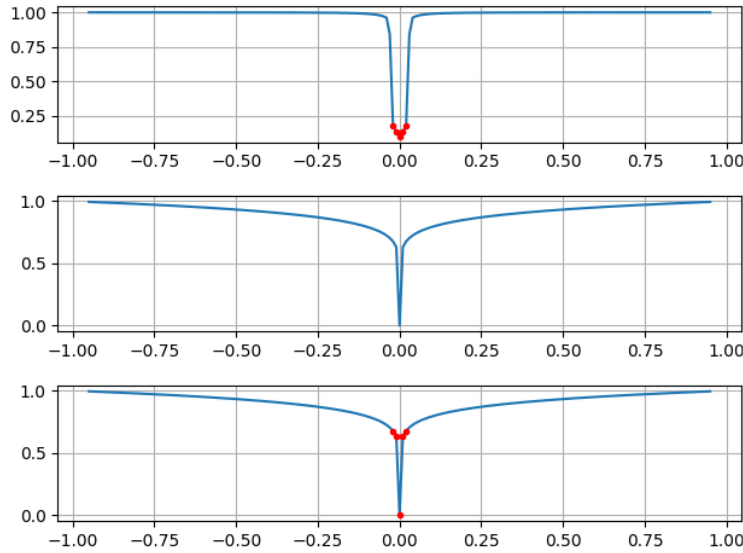


Рис. 8: Пример $f = |t^{0.1}|$, сверху — мера гладкости $\mu_f(t)$, посередине — ряд $f(t)$, внизу — классификация точек ряда $f(t)$ относительно меры $\mu_f(t)$ (гладкие — синие, промежуточные — зеленые, негладкие — красные).

4. Заключение

В классическом анализе равномерные показатели Липшица дают глобальное измерение гладкости: если функция f удовлетворяет равномерному показателю Липшица $\alpha > t$ в окрестности $[t - h, t + h]$ с многочленом p_t , то, во-первых, функция f обязательно t раз непрерывно дифференцируема в $[t - h, t + h]$, а, во-вторых, p_t есть многочлен Тейлора порядка

m для f в t [5].

Отсюда подход к m -гладкости в дискретном случае: регрессионные производные существуют всегда [1]–[3], поэтому у любого ряда f в любом узле t существует многочлен Тейлора p_t^m любого порядка m . Далее поступаем как выше в механизме $x_f^\pm(t)$.

Обозначим через $x_f^{+,m}(t)$ и $x_f^{-,m}(t)$ неотрицательные ряды на $T(N)$, подобно (8) представляющие отклонение f от p_t^m соответственно справа и слева. И назовем f m -гладкой в t справа (слева), если $\text{ord}_f^{+,m}(t) > m$ ($\text{ord}_f^{-,m}(t) > m$).

Эффективность механизма $\text{ord}_f^{\pm,m}(t)$ предполагается изучить в будущем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Добровольский М. Н., Иванченко О. В., Камаев Д. А. Регрессионное дифференцирование и регрессионное интегрирование конечных рядов // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 2. С. 27–47. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-2-27-47
2. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Камаев Д. А., Дзебоев Б. А., Добровольский М. Н. Распознавание аномалий на записях с помощью нечеткой логики // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, вып. 3. С. 6–43. doi: 10.22405/2226-8383-2025-26-3-6-43
3. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Kamaev D., Dzeboev B., Dobrovolsky M. Trends and Extremes in Time Series Based on Fuzzy Logic // Mathematics. 2024. Vol. 12, no. 2. P. 284–316. doi: 10.3390/math12020284
4. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 128 с.
5. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

REFERENCES

1. Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Dobrovolskiy, M. N., Ivanchenko, O. V., Kamaev, D. A. 2021, “Regression differentiation and regression integration of finite series”, *Chebyshevsky Sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 27–47. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-2-27-47
2. Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Kamaev, D. A., Dzeboev, B. A., Dobrovolsky, M. N. 2025, “Anomaly recognition in recordings using fuzzy logic” // *Chebyshevsky Sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 6–43. doi: 10.22405/2226-8383-2025-26-3-6-43
3. Agayan, S., Bogoutdinov, Sh., Kamaev, D., Dzeboev, B., Dobrovolsky, M. 2024, “Trends and Extremes in Time Series Based on Fuzzy Logic” // *Mathematics*, vol. 12, no. 2, pp. 284–316. doi: 10.3390/math12020284
4. Bozhokin, S.V. & Parshin, D.A. 2001, *Fractals and Multifractals*, Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk.
5. Malla, S. 2005, *Wavelets in Signal Processing*, Mir, Moscow.

Получено: 18.07.2025

Принято в печать: 08.12.2025