

**ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК**  
**Том 26. Выпуск 4.**

---

УДК: 517.955.8

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-475-486

**Фазы квазиклассических решений двумерного безмассового  
уравнения Дирака в постоянном электромагнитном поле<sup>1</sup>**

Д. Ж. Акпан, И. А. Богаевский, Н. Р. Зиатдинов, А. А. Ошемков

**Акпан Динмухаммед Жулдызбайулы** — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва, Россия); Институт Математики и Математического Моделирования (г. Алматы, Казахстан).

*e-mail:* dimashakpan010101@gmail.com

**Богаевский Илья Александрович** — доктор физико-математических наук, Гуандун Технион – Израильский Технологический Институт (г. Шаньтоу, Китай); НИИ системных исследований РАН (г. Москва).

*e-mail:* ibogaevsk@gmail.com

**Зиатдинов Наиль Равильевич** — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail:* nail.ziatdinov@math.msu.ru

**Ошемков Андрей Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail:* a@oshemkov.ru

**Аннотация**

Изучены графики фаз квазиклассических асимптотик решений двумерного безмассового уравнения Дирака с локализованным начальным условием в постоянном (не зависящим ни от точки, ни от времени) электромагнитном поле. Рассматриваемое уравнение описывает распространение квазичастиц (электронов и дырок) в графене, при этом электрическая компонента поля параллельна плоскости графена, а магнитная — перпендикулярна ей. Получены формулы для фаз при всех значениях компонент электромагнитного поля.

**Ключевые слова:** безмассовое уравнение Дирака, квазиклассическая асимптотика, графен, квазичастицы, лежандровы подмногообразия.

**Библиография:** 6 названий.

**Для цитирования:**

Акпан, Д. Ж., Богаевский, И. А., Зиатдинов, Н. Р., Ошемков А. А. Фазы квазиклассических решений двумерного безмассового уравнения Дирака в постоянном электромагнитном поле // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 475–486.

<sup>1</sup>Поддержано Программой развития МГУ, проект № 23-Ш05-25.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 4.

UDC: 517.955.8

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-475-486

**Phases of semiclassical solutions of the two-dimensional massless Dirac equation with a constant electromagnetic field**

D. Zh. Akpan, I. A. Bogaevskii, N. R. Ziatdinov, A. A. Oshemkov

**Akpan Dinmukhammed Zhuldyzbayuly** — Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia); Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan).

e-mail: dimashakpan010101@gmail.com

**Bogaevskii Ilya Aleksandrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Guangdong Technion-Israel Institute of Technology (Guangdong, China); Scientific Research Institute of System Analysis (Moscow).

e-mail: ibogaevsk@gmail.com

**Ziatdinov Nail Ravilevich** — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: nail.ziatdinov@math.msu.ru

**Oshemkov Andrey Aleksandrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: a@oshemkov.ru

**Abstract**

The phase graphs of semiclassical asymptotics of solutions to the two-dimensional massless Dirac equation with a localized initial condition in a constant (independent of position and time) electromagnetic field have been studied. The considered equation describes the propagation of quasiparticles (electrons and holes) in graphene, with the electric component of the field parallel to the graphene plane and the magnetic component perpendicular to it. Formulas for the phases have been obtained for all values of the electromagnetic field components.

*Keywords:* massless Dirac equation, semiclassical asymptotics, graphene, quasiparticles, Legendrian submanifolds.

*Bibliography:* 6 titles.

**For citation:**

Akpan, D. Zh., Bogaevskii, I. A., Ziatdinov, N. R., Oshemkov, A. A. 2025, "Phases of semiclassical solutions of the two-dimensional massless Dirac equation with a constant electromagnetic field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 475–486.

**1. Введение**

Квазичастицы (электроны и дырки) в графене описываются двумерным безмассовым уравнением Дирака

$$(\hat{H}_A - ih\partial_t) [\psi] = 0, \quad \hat{H}_A = \sigma_x(\hat{p}_x - A_x) + \sigma_y(\hat{p}_y - A_y) - A_t,$$

где  $h > 0$  — малый параметр,  $\psi(t, x, y) \in \mathbb{C}^2$  — двумерный псевдоспинор, зависящий от времени и точки плоскости,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули,  $\hat{p}_x = -ih \partial_x$ ,  $\hat{p}_y = -ih \partial_y$  — операторы импульса,

$$A = A_t(t, x, y) dt + A_x(t, x, y) dx + A_y(t, x, y) dy$$

— ковариантный 3-потенциал заданного электромагнитного поля

$$\begin{aligned} dA &= E_x(t, x, y) dt \wedge dx + E_y(t, x, y) dt \wedge dy - B_z(t, x, y) dx \wedge dy, \\ E_x &= \partial_t A_x - \partial_x A_t, \quad E_y = \partial_t A_y - \partial_y A_t, \quad B_z = -\partial_x A_y + \partial_y A_x, \end{aligned}$$

электрическая компонента которого лежит в плоскости графена, а магнитная — перпендикулярна ей. Квазичастицы являются фермионами с нулевой массой покоя и двигаются со скоростью Ферми, которая в 300 раз меньше скорости света и в используемой нами системе единиц равна 1. Электрон имеет заряд  $-1$ , и его потенциальная энергия в электрическом поле равна  $-A_t$ .

Решение уравнения Дирака, являющееся собственным вектором операторов  $\hat{H}_A + A_t$  и  $ih\partial_t + A_t$  с положительным собственным значением (кинетической энергией, равной разности полной и потенциальной), описывает поток электронов, а с отрицательным — поток дырок. Дырка — это античастица электрона, имеющая отрицательную кинетическую энергию. Квазичастиц с нулевой кинетической энергией не существует.

В настоящей работе изучаются особенности фазы квазиклассической асимптотики (т. е. при  $h \rightarrow +0$ ) решения задачи Коши для уравнения Дирака в *постоянном* (не зависящим ни от времени, ни от точки) электромагнитном поле с локализованным начальным условием

$$\psi(0, x, y) = \frac{1}{h} f\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}\right),$$

где  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  — начальное (псевдоспинорное) поле, быстро убывающее в бесконечности. Теория таких асимптотик для различных уравнений математической физики изложена в обзоре [6]. В случае нулевого магнитного поля и постоянного электрического эта задача исследовалась в [3].

Фаза квазиклассической асимптотики — это многозначная функция  $S(t, x, y)$ , являющаяся решением уравнения эйконала:

$$\det \|\sigma_x(\partial_x S - A_x) + \sigma_y(\partial_y S - A_y) + \sigma_t(\partial_t S - A_t)\| = 0, \quad (1.1)$$

$$\sigma_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

область определения которого стремится к началу координат при  $t \rightarrow +0$ . Уравнение эйконала (1.1) распадается на два уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\partial_t S - A_t \pm \sqrt{(\partial_x S - A_x)^2 + (\partial_y S - A_y)^2} = 0$$

с двумя негладкими гамильтонианами:

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(p_x, p_y, t, x, y) &= -A_t + \sqrt{(p_x - A_x)^2 + (p_y - A_y)^2}, \\ H_h(p_x, p_y, t, x, y) &= -A_t - \sqrt{(p_x - A_x)^2 + (p_y - A_y)^2}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

первый из них (с плюсом перед корнем) управляет электронами, а второй (с минусом) — дырками.

Если компоненты  $A_t, A_x, A_y$  потенциала линейны по времени и координатам, то поле постоянно и фаза  $S$  квазиоднородна:

$$S(t, x, y) = t^2 S(1, x/t, y/t),$$

поэтому она полностью определяется своими значениями при  $t = 1$ . Это следует из инвариантности уравнения эйконала и начального условия относительно квазиоднородных преобразований  $(t, x, y, S) \mapsto (\lambda t, \lambda x, \lambda y, \lambda^2 S)$ .

Электромагнитное поле определяет потенциал не однозначно, а с точностью до дифференциала функции  $\varphi(t, x, y)$ :  $A$  можно заменить на  $\tilde{A} = A + d\varphi$ , и электромагнитное поле останется прежним. Однако, уравнение эйконала всё-таки изменится, но вместо  $S$  будет иметь решение  $\tilde{S} = S + \varphi$ .

## 2. Результаты

Для постоянного электромагнитного поля

$$dA = E dt \wedge dx - B dx \wedge dy$$

с электрической компонентой  $(E, 0, 0)$  и магнитной  $(0, 0, B)$  выберем потенциал  $A$  в виде:

$$A = -\frac{1}{2}E x dt + \frac{1}{2}E t dx + \frac{1}{2}B y dx - \frac{1}{2}B x dy.$$

Тогда уравнение эйконала примет вид:

$$\left(\partial_t S + \frac{1}{2}Ex\right)^2 - \left(\partial_x S - \frac{1}{2}Et - \frac{1}{2}By\right)^2 - \left(\partial_y S + \frac{1}{2}Bx\right)^2 = 0.$$

Этот потенциал зависит от времени, но именно в этом случае получаются самые простые формулы для  $S$ . Если выбрать более простой автономный потенциал

$$\tilde{A} = A - d\frac{Etx + Bxy}{2} = -E x dt - B x dy,$$

то уравнение эйконала тоже упростится:

$$(\partial_t \tilde{S} + Ex)^2 - \partial_x \tilde{S}^2 - (\partial_y \tilde{S} + Bx)^2 = 0,$$

а решение изменится следующим образом:

$$\tilde{S} = S - \frac{Etx + Bxy}{2}.$$

Графики  $w = S_\varepsilon(t, x, y)$  и  $w = S_h(t, x, y)$  решений уравнений Гамильтона–Якоби

$$\partial_t S_\varepsilon + H_\varepsilon \Big|_{p_x = \partial_x S_\varepsilon, p_y = \partial_y S_\varepsilon} = 0, \quad \partial_t S_h + H_h \Big|_{p_x = \partial_x S_h, p_y = \partial_y S_h} = 0$$

с гамильтонианами (1.2) представляют собой проекции в четырёхмерное пространство с координатами  $(t, x, y, w)$  замыканий множеств, состоящих из траекторий (расширенных) систем уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_x = -\partial_x H, \quad \dot{p}_y = -\partial_y H, \quad \dot{x} = \partial_{p_x} H, \quad \dot{y} = \partial_{p_y} H, \quad \dot{w} = p_x \partial_{p_x} H + p_y \partial_{p_y} H - H, \quad p_t = -H$$

с начальными условиями  $t = x = y = w = 0$  и гамильтонианами  $H = H_\varepsilon$  и  $H = H_h$  соответственно. Многозначные решения  $S_\varepsilon$  и  $S_h$  являются фазами квазиклассических асимптотик

распределений электронов и дырок соответственно. График фазы  $S$  — это объединение графиков фаз  $S_\varepsilon$  и  $S_h$ .

Замыкания множеств траекторий (а не их проекций) гамильтоновых систем образуют подмногообразия  $\Lambda_\varepsilon$ ,  $\Lambda_h$  и  $\Lambda = \Lambda_\varepsilon \cup \Lambda_h$  в пространстве 1-струй функций  $J^1(\mathbb{R}_{t,x,y}^3, \mathbb{R}_w)$  (нижние индексы — это координаты) на пространстве-времени с контактной формой

$$\sigma = p_t dt + p_x dx + p_y dy - dw.$$

Эти подмногообразия *лежандровы*, т. е.  $\sigma|_\Lambda = 0$ , и имеют особенности, поскольку гамильтонианы  $H_\varepsilon$  и  $H_h$  не являются гладкими при  $p_x = p_y = 0$ . Лежандрово подмногообразие  $\Lambda$  лежит на гиперповерхности

$$\mathcal{H}^{B,E} = \left\{ \left( p_t + \frac{1}{2}Ex \right)^2 - \left( p_x - \frac{1}{2}Et - \frac{1}{2}By \right)^2 - \left( p_y + \frac{1}{2}Bx \right)^2 = 0 \right\} \subset J^1(\mathbb{R}_{t,x,y}^3, \mathbb{R}_w). \quad (2.1)$$

Графики фаз  $S_\varepsilon$ ,  $S_h$  и  $S$  — это образы лежандровых подмногообразий  $\Lambda_\varepsilon$ ,  $\Lambda_h$  и  $\Lambda$  соответственно при естественном проектировании

$$\pi : J^1(\mathbb{R}_{t,x,y}^3, \mathbb{R}_w) \rightarrow \mathbb{R}_{t,x,y,w}^4, \quad (p_t, p_x, p_y, t, x, y, w) \mapsto (t, x, y, w).$$

Зафиксируем значения  $B, E \in \mathbb{R}$  и обозначим соответствующие им лежандровы подмногообразия  $\Lambda = \Lambda_\varepsilon \cup \Lambda_h$  через  $\Lambda^{B,E} = \Lambda_\varepsilon^{B,E} \cup \Lambda_h^{B,E}$ , а многозначные фазы  $S$ ,  $S_\varepsilon$  и  $S_h$  — через  $S^{B,E}$ ,  $S_\varepsilon^{B,E}$  и  $S_h^{B,E}$  соответственно.

**ТЕОРЕМА 1.** *Лежандрово подмногообразие  $\Lambda^{B,E}$  допускает параметризацию*

$$p_t = P_t(a, b, u, E, B), \quad p_x = P_x(a, b, u, E, B), \quad p_y = P_y(a, b, u, E, B), \\ t = T(a, b, u, E, B), \quad x = X(a, b, u, E, B), \quad y = Y(a, b, u, E, B), \quad w = W(a, b, u, E, B),$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R} \setminus 0$  — параметры,  $c = B^2 - E^2$ ,  $a$

$$P_t(a, b, u, E, B) = -\frac{B}{2u} \left( \frac{a^2}{c} + b^2 \right) + \frac{E \cos \sqrt{c}u}{2u} \left( \frac{a^2}{c} - b^2 \right) = -\frac{B}{2u} \left( \frac{a^2}{c} + b^2 \right) + \\ + \frac{E \operatorname{ch} \sqrt{-c}u}{2u} \left( \frac{a^2}{c} - b^2 \right), \\ P_x(a, b, u, E, B) = \frac{ab \cos \sqrt{c}u}{u} = \frac{ab \operatorname{ch} \sqrt{-c}u}{u}, \\ P_y(a, b, u, E, B) = -\frac{E}{2u} \left( \frac{a^2}{c} + b^2 \right) + \frac{B \cos \sqrt{c}u}{2u} \left( \frac{a^2}{c} - b^2 \right) = -\frac{E}{2u} \left( \frac{a^2}{c} + b^2 \right) + \\ + \frac{B \operatorname{ch} \sqrt{-c}u}{2u} \left( \frac{a^2}{c} - b^2 \right), \\ T(a, b, u, E, B) = B \left( \frac{a^2}{c} + b^2 \right) - \frac{E \sin \sqrt{c}u}{\sqrt{c}u} \left( \frac{a^2}{c} - b^2 \right) = B \left( \frac{a^2}{c} + b^2 \right) - \\ - \frac{E \operatorname{sh} \sqrt{-c}u}{\sqrt{-c}u} \left( \frac{a^2}{c} - b^2 \right),$$

$$\begin{aligned}
X(a, b, u, E, B) &= \frac{2ab \sin \sqrt{c}u}{\sqrt{cu}} = \frac{2ab \operatorname{sh} \sqrt{-c}u}{\sqrt{-cu}}, \\
Y(a, b, u, E, B) &= -E \left( \frac{a^2}{c} + b^2 \right) + \frac{B \sin \sqrt{c}u}{\sqrt{cu}} \left( \frac{a^2}{c} - b^2 \right) = -E \left( \frac{a^2}{c} + b^2 \right) + \\
&\quad + \frac{B \operatorname{sh} \sqrt{-c}u}{\sqrt{-cu}} \left( \frac{a^2}{c} - b^2 \right), \\
W(a, b, u, E, B) &= -\frac{(a^2 + b^2 c)^2 (2\sqrt{c}u - \sin 2\sqrt{c}u)}{8c\sqrt{c}u^2} = -\frac{(a^2 + b^2 c)^2 (2\sqrt{-c}u - \operatorname{sh} 2\sqrt{-c}u)}{8c\sqrt{-c}u^2}
\end{aligned}$$

— функции, аналитические по всем своим аргументам при  $E + B \neq 0$  и однородные по параметрам  $a, b$ . При  $E = B \neq 0$  ( $c = 0$ ):

$$\begin{aligned}
P_t(a, b, u, B, B) &= -\frac{a^2 B^2 u^2 + a^2 + 4b^2 B^2}{4Bu}, \quad P_x(a, b, u, B, B) = \frac{ab}{u}, \\
P_y(a, b, u, B, B) &= \frac{-a^2 B^2 u^2 + a^2 - 4b^2 B^2}{4Bu}, \\
T(a, b, u, B, B) &= \frac{a^2(3 + B^2 u^2) + 12b^2 B^2}{6B}, \quad X(a, b, u, B, B) = 2ab, \\
Y(a, b, u, B, B) &= \frac{a^2(3 - B^2 u^2) - 12b^2 B^2}{6B}, \quad W(a, b, u, B, B) = -\frac{a^4 u}{6}.
\end{aligned}$$

При  $u > 0$  приведённые формулы задают лежандрово подмногообразие  $\Lambda_{\varepsilon}^{B, E}$ , а при  $u < 0$  — лежандрово подмногообразие  $\Lambda_h^{B, E}$ .

СЛЕДСТВИЕ 1. График  $\pi(\Lambda^{B, E})$  многозначной фазы  $S^{B, E}$  допускает параметризацию

$$x = \frac{tX}{T} \Big|_{a=1}, \quad y = \frac{tY}{T} \Big|_{a=1}, \quad w = \frac{t^2 W}{T^2} \Big|_{a=1}$$

с параметрами  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $u \in \mathbb{R} \setminus 0$ . При  $u > 0$  приведённые формулы задают график  $\pi(\Lambda_{\varepsilon}^{B, E})$  фазы  $S_{\varepsilon}^{B, E}$ , а при  $u < 0$  — график  $\pi(\Lambda_h^{B, E})$  фазы  $S_h^{B, E}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Параметризация теоремы 1 двузначна — приведённые формулы не меняются при замене  $(a, b) \mapsto -(a, b)$ . Параметризация следствия 1 однозначна.

**Случай**  $|B| > |E|$

Лежандрово подмногообразие  $\Lambda^{1,0}$  задаётся параметрическими формулами

$$\begin{aligned}
p_t &= -\frac{a^2 + b^2}{2u}, \quad p_x = \frac{ab \cos u}{u}, \quad p_y = \frac{(a^2 - b^2) \cos u}{2u}, \\
t = a^2 + b^2, \quad x &= \frac{2ab \sin u}{u}, \quad y = \frac{(a^2 - b^2) \sin u}{u}, \quad w = -\frac{(a^2 + b^2)^2 (2u - \sin 2u)}{8u^2},
\end{aligned}$$

с параметрами  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R} \setminus 0$ , а график многозначной фазы  $S^{1,0}$  — формулами

$$x = \frac{2tb \sin u}{(1 + b^2)u} = \frac{t \sin \beta \sin u}{u}, \quad y = \frac{t(1 - b^2) \sin u}{(1 + b^2)u} = \frac{t \cos \beta \sin u}{u}, \quad w = -\frac{t^2 (2u - \sin 2u)}{8u^2}$$

с параметрами  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $u \in \mathbb{R} \setminus 0$ , или вместо  $b$  можно взять угол  $\beta$ , где  $b = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

При фиксированном  $t$  график многозначной фазы  $S^{1,0}(t, x, y)$  представляет собой фронт плоской субримановой структуры на контактном поле плоскостей в трёхмерном пространстве. Этот фронт был изучен в [5] и изображен на рис. 1 при  $t = 1$ .

Пусть  $c = B^2 - E^2 > 0$ ,  $\sigma = \sqrt{c}$ . Линейное контактное преобразование  $J^1(\mathbb{R}_{t,x,y}^3, \mathbb{R}_w)$

$$(p_t, p_x, p_y, t, x, y, w) \mapsto \left( Bp_t + Ep_y, \sigma p_x, Ep_t + Bp_y, \frac{Bt - Ey}{\sigma}, x, \frac{By - Et}{\sigma}, \sigma w \right)$$

переводит  $\mathcal{H}^{1,0}$  в  $\mathcal{H}^{B,E}$ , а  $\Lambda^{1,0}$  в  $\Lambda^{B,E}$ , и сохраняет лоренцеву метрику  $t^2 - x^2 - y^2$ . Таким образом, график фазы  $S^{1,0}$  переводится в график фазы  $S^{B,E}$  линейным лоренцевым преобразованием, а также им определённым квазиоднородным преобразованием:

$$(t, x, y, w) \mapsto \left( t, \frac{\sigma tx}{Bt - Ey}, \frac{t(By - Et)}{Bt - Ey}, \frac{\sigma^3 t^2 w}{(Bt - Ey)^2} \right),$$

сохраняющим лоренцеву метрику  $t^2 - x^2 - y^2$  и время. При этом преобразовании график искается тем сильнее, чем ближе к 1 отношение электрической компоненты поля к магнитной. В частности, прямая  $x = y = w = 0$ , состоящая из точек, в которых график не является аналитическим, переходит в прямую  $x = w = 0$ ,  $y = -Et/B$ . На рис. 2 изображён график фазы  $S^{0.75,0.25}$  при  $t = 1$ .

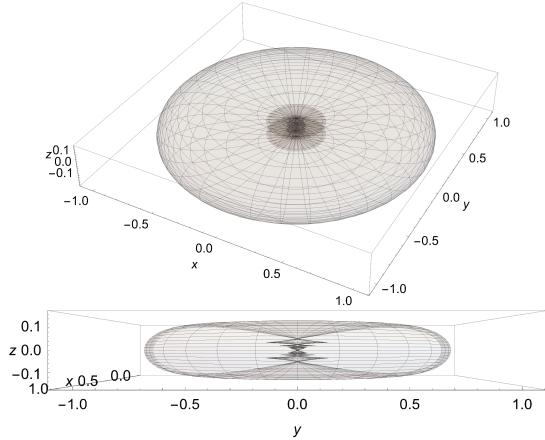


Рис. 1: Фаза  $S^{1,0}$

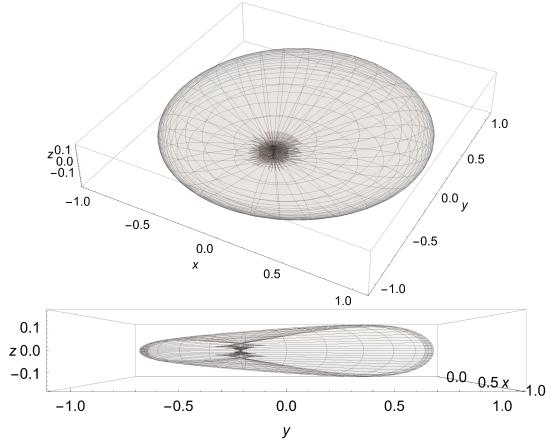


Рис. 2: Фаза  $S^{0.75,0.25}$

### Случай $|E| > |B|$

Лежандрово подмногообразие  $\Lambda^{0,1}$  задаётся параметрическими формулами

$$\begin{aligned} p_t &= -\frac{(a^2 + b^2) \operatorname{ch} u}{2u}, & p_x &= \frac{ab \operatorname{ch} u}{u}, & p_y &= \frac{a^2 - b^2}{2u}, \\ t &= \frac{(a^2 + b^2) \operatorname{sh} u}{u}, & x &= \frac{2ab \operatorname{sh} u}{u}, & y &= a^2 - b^2, & w &= -\frac{(a^2 - b^2)^2 (\operatorname{sh} 2u - 2u)}{8u^2}, \end{aligned}$$

с параметрами  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R} \setminus 0$ , а график многозначной фазы  $S^{0,1}$  — формулами

$$\begin{aligned} x &= \frac{2tb}{1 + b^2} = t \sin \beta, & y &= \frac{t(1 - b^2)u}{(1 + b^2) \operatorname{sh} u} = \frac{tu \cos \beta}{\operatorname{sh} u}, \\ w &= -\frac{(1 - b^2)^2 (\operatorname{sh} 2u - 2u)}{8(1 + b^2)^2 \operatorname{sh}^2 u} = -\frac{t^2 (\operatorname{sh} 2u - 2u) \cos^2 \beta}{8 \operatorname{sh}^2 u}, \end{aligned}$$

с параметрами  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $u \in \mathbb{R} \setminus 0$ , или вместо  $b$  можно взять угол  $\beta$ , где  $b = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

При фиксированном  $t$  график многозначной фазы  $S^{0,1}(t, x, y)$  представляет собой фронт плоской сублоренцевой структуры на поле гиперплоскостей в четырёхмерном пространстве-времени. Этот фронт был изучен в [1] и изображен на рис. 3 при  $t = 1$ . Лежандрово многообразие  $\Lambda^{B,E}$  имеет особенности, описанные в [4].

Пусть  $-c = E^2 - B^2 > 0$ ,  $\sigma = \sqrt{-c}$ . Линейное контактное преобразование  $J^1(\mathbb{R}_{t,x,y}^3, \mathbb{R}_w)$

$$(p_t, p_x, p_y, t, x, y, w) \mapsto \left( Ep_t + Bp_y, \sigma p_x, Bp_t + Ep_y, \frac{Et - By}{\sigma}, x, \frac{Ey - Bt}{\sigma}, \sigma w \right)$$

переводит  $\mathcal{H}^{0,1}$  в  $\mathcal{H}^{B,E}$ , а  $\Lambda^{0,1}$  в  $\Lambda^{B,E}$ , и сохраняет лоренцеву метрику  $t^2 - x^2 - y^2$ . Таким образом, график фазы  $S^{0,1}$  переводится в график фазы  $S^{B,E}$  линейным лоренцевым преобразованием, а также им определенным квазиоднородным преобразованием:

$$(t, x, y, w) \mapsto \left( t, \frac{\sigma tx}{Et - By}, \frac{t(Ey - Bt)}{Et - By}, \frac{\sigma^3 t^2 w}{(Et - By)^2} \right),$$

сохраняющим лоренцеву метрику  $t^2 - x^2 - y^2$  и время. При этом преобразовании график искается тем сильнее, чем ближе к 1 отношение магнитной компоненты поля к электрической. В частности, прямая  $x = y = w = 0$  переходит в прямую  $x = w = 0$ ,  $y = -Bt/E$ . На рис. 4 изображен график фазы  $S^{0.25,0.75}$  при  $t = 1$ . В пределе при  $(B, E) \rightarrow (1/2, 1/2)$  получается поверхность, изображенная на рис. 5.

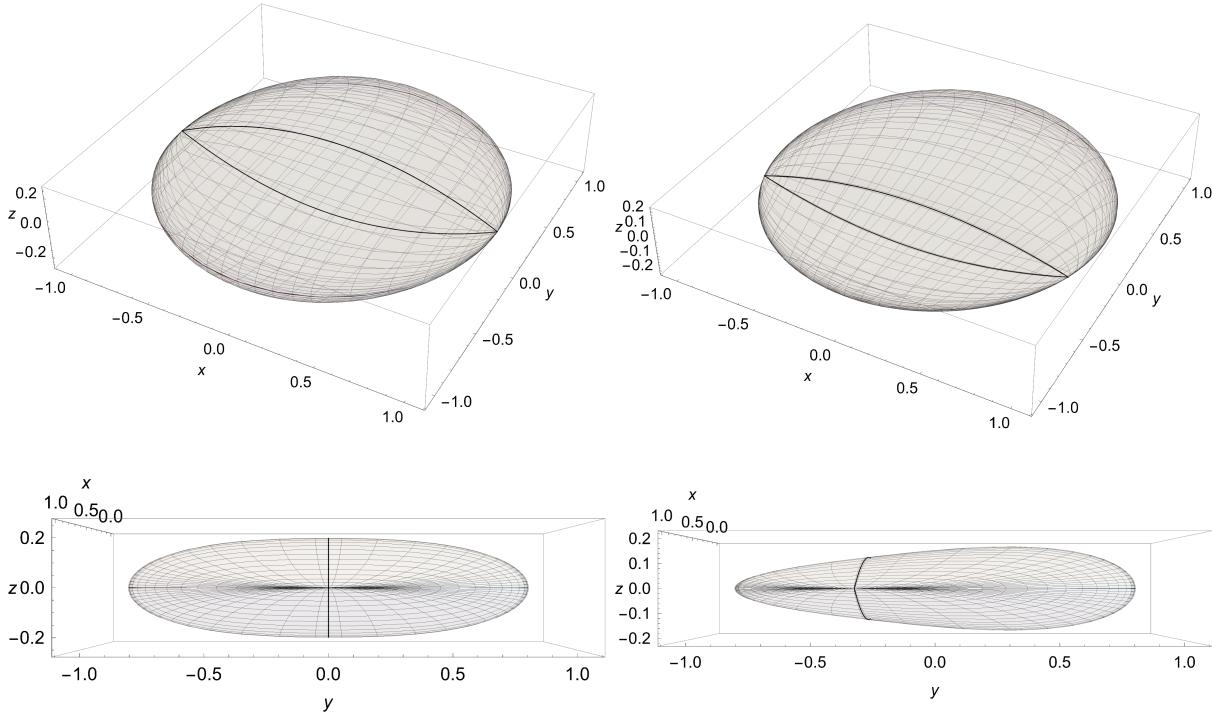


Рис. 3: Фаза  $S^{0,1}$

Рис. 4: Фаза  $S^{0.25,0.75}$

### Случай $E = B \neq 0$

Лежандрово подмногообразие  $\Lambda^{1,1}$  задаётся параметрическими формулами

$$\begin{aligned} p_t &= -\frac{a^2 u^2 + a^2 + 4b^2}{4u}, \quad p_x = \frac{ab}{u}, \quad p_y = \frac{-a^2 u^2 + a^2 - 4b^2}{4u}, \\ t &= \frac{a^2(3 + u^2) + 12b^2}{6}, \quad x = 2ab, \quad y = \frac{a^2(3 - u^2) - 12b^2}{6}, \quad w = -\frac{a^4 u}{6}, \end{aligned}$$

с параметрами  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R} \setminus 0$ , а график многозначной фазы  $S^{1,1}$  — формулами

$$x = \frac{12tb}{3 + u^2 + 12b^2}, \quad y = t \frac{3 - u^2 - 12b^2}{3 + u^2 + 12b^2}, \quad w = -\frac{6t^2 u}{(3 + u^2 + 12b^2)^2}$$

с параметрами  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $u \in \mathbb{R} \setminus 0$ .

Пусть  $E = B > 0$ . Квазиоднородное растяжение  $J^1(\mathbb{R}_{t,x,y}^3, \mathbb{R}_w)$

$$(p_t, p_x, p_y, t, x, y, w) \mapsto (Bp_t, Bp_x, Bp_y, t, x, y, Bw)$$

переводит  $\mathcal{H}^{1,1}$  в  $\mathcal{H}^{B,B}$ , а  $\Lambda^{1,1}$  в  $\Lambda^{B,B}$ . Таким образом, график фазы  $S^{1,1}$  переводится в график фазы  $S^{B,B}$  растяжением вдоль оси  $w$ :

$$(t, x, y, w) \mapsto (t, x, y, Bw).$$

На рис. 5 изображён график фазы  $S^{0.5,0.5}$  при  $t = 1$ .

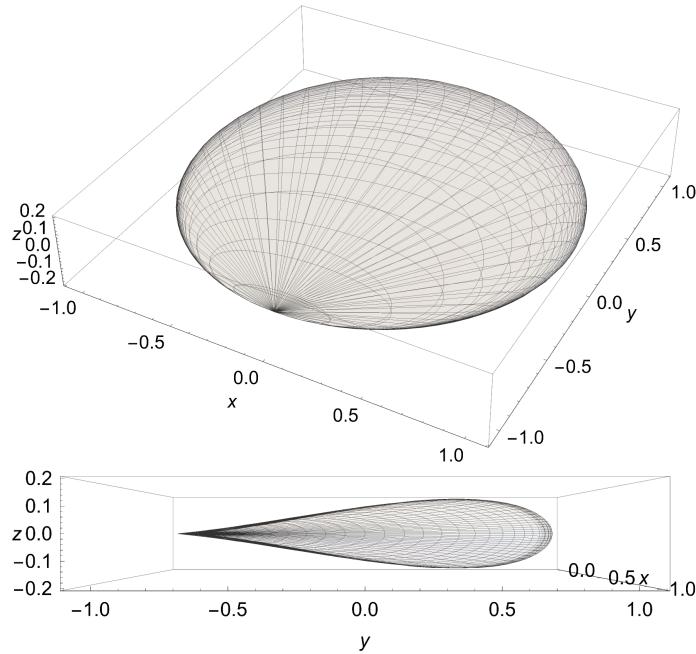


Рис. 5: Фаза  $S^{0.5,0.5}$

### 3. Связь с управляемыми системами

Рассмотрим управляемую систему

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = u, \quad \frac{dy}{d\tau} = v, \quad \frac{dw}{d\tau} = A_t(t, x, y) + uA_x(t, x, y) + vA_y(t, x, y), \quad u^2 + v^2 \leq 1 \quad (3.1)$$

в четырёхмерном пространстве с координатами  $(t, x, y, w)$ , её допустимые скорости в каждой точке образуют двумерный диск в пространстве всех скоростей. Множество достижимости этой системы представляет собой объединение всех её допустимых траекторий, выходящих из начала координат. Те из них, которые лежат на границе множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина.

Для того, чтобы его сформулировать, введём семейство линейных гамильтонианов, зависящих от управления  $(u, v)$ :

$$H_{u,v}(\xi, q) = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_w (A_t + u A_x + v A_y),$$

где  $\xi = (\xi_t, \xi_x, \xi_y, \xi_w)$  — импульсы, двойственные координатам  $q = (t, x, y, w)$ . Экстремали — это липшицева кривая  $\xi = \Xi(\tau)$ ,  $q = Q(\tau)$  в кокасательном расслоении, удовлетворяющая для почти всех  $\tau$  следующим условиям:

- $\Xi(\tau) \neq 0$ ;
- $\frac{d\Xi}{d\tau} = -\partial_q H_{u_{\max}, v_{\max}}(\Xi(\tau), Q(\tau))$ ,  $\frac{dQ}{d\tau} = \partial_\xi H_{u_{\max}, v_{\max}}(\Xi(\tau), Q(\tau))$ ,  $H_{u_{\max}, v_{\max}}(\Xi(\tau), Q(\tau)) = 0$ ;
- $(u_{\max}, v_{\max})$  — точка максимума функции  $H_{u,v}(\Xi(\tau), Q(\tau))$  на множестве  $u^2 + v^2 \leq 1$  при фиксированном  $\tau$ .

Экстремальная траектория — это проекция экстремали, она задаётся уравнением  $q = Q(\tau)$ . Принцип максимума утверждает, что допустимая траектория управляемой системы, лежащая на границе её множества достижимости, всегда является экстремальной. Обратное, вообще говоря, неверно — экстремальная траектория может, например, сначала идти по границе, а потом уходить внутрь множества достижимости.

Как правило, экстремали — это траектории гамильтоновой системы с *максимизированным* гамильтонианом

$$H_{\max}(\xi, q) = \max_{u^2 + v^2 \leq 1} H_{u,v}(\xi, q) = \xi_t + \xi_w A_t + \sqrt{(\xi_x + \xi_w A_x)^2 + (\xi_y + \xi_w A_y)^2}.$$

Остальные экстремали называются *особыми*.

Максимизированный гамильтониан однороден по импульсам, а  $\xi_w$  — первый интеграл гамильтоновой системы. Поэтому с точностью до умножения импульсов на положительные числа существуют три вида неособых экстремалей: траектории электронов  $\xi_w \equiv -1$ , траектории дырок  $\xi_w \equiv 1$ , экваториальные траектории  $\xi_w \equiv 0$ .

В самом деле, уравнение  $H_{\max} = 0$  задаёт гиперповерхность в сферизованном кокасательном расслоении  $M = S(T^*\mathbb{R}_q^4 \setminus \{\xi = 0\})$ , в котором имеется каноническая контактная структура  $\xi dq = 0$ . Не особые экстремали являются характеристиками этой гиперповерхности. (В теории дифференциальных уравнений с частными производными они называются бихарактеристиками.) Естественное проектирование

$$\rho : M \setminus \{\xi_w = 0\} \rightarrow J^1(\mathbb{R}_{t,x,y}^3, \mathbb{R}_w), \quad (\xi, q) \mapsto \left( p_t = -\frac{\xi_t}{\xi_w}, p_x = -\frac{\xi_x}{\xi_w}, p_y = -\frac{\xi_y}{\xi_w}, t, x, y, w \right)$$

является контактным отображением, и

$$\rho(\{H_{\max} = 0\} \cap \{\xi_w < 0\}) = \{p_t + H_\varepsilon = 0\}, \quad \rho(\{H_{\max} = 0\} \cap \{\xi_w > 0\}) = \{p_t + H_h = 0\}.$$

Особенности фронтов систем (3.1) изучались в [1, 2].

#### 4. Доказательство теоремы 1

Проверим, что формулы из теоремы задают многообразие, состоящее из траекторий гамильтоновых систем с гамильтонианами  $H_\varepsilon$  и  $H_h$ . В самом деле, эти траектории удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{-E(p_t + Ex/2) + B(p_y + Bx/2)} &= \frac{dx}{2(-p_x + Et/2 + By/2)} = \frac{dp_y}{B(-p_x + Et/2 + By/2)} = \\ &= \frac{dy}{2(-p_y - Bx/2)} = \frac{dp_t}{E(-p_x + Et/2 + By/2)} = \frac{dt}{2(p_t + Ex/2)} = \\ &= \frac{dw}{2p_x(-p_x + Et/2 + By/2) - 2p_y(p_y + Bx/2) + 2p_t(p_t + Ex/2)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

которые получаются исключением  $d\tau$  из уравнений характеристик

$$\begin{aligned} \frac{dp_t}{d\tau} &= -\partial_t H, \quad \frac{dp_x}{d\tau} = -\partial_x H, \quad \frac{dp_y}{d\tau} = -\partial_y H, \quad \frac{dt}{d\tau} = \partial_{p_t} H, \quad \frac{dx}{d\tau} = \partial_{p_x} H, \quad \frac{dy}{d\tau} = \partial_{p_y} H, \\ \frac{dw}{d\tau} &= p_x \partial_{p_x} H + p_y \partial_{p_y} H + p_t \partial_{p_t} H \end{aligned}$$

гиперповерхности

$$H = 0, \quad H = (p_t + H_\varepsilon)(p_t + H_h) = \left( p_t + \frac{1}{2}Ex \right)^2 - \left( p_x - \frac{1}{2}Et - \frac{1}{2}By \right)^2 - \left( p_y + \frac{1}{2}Bx \right)^2$$

в контактном пространстве.

Подстановка в эти уравнения формул из утверждения теоремы показывает, что уравнения (4.1) дают два независимых соотношения на дифференциалы параметров  $a, b, u$ :

$$\frac{da}{du} = \frac{a + cbu}{2u}, \quad \frac{db}{du} = -\frac{-b + au}{2u}.$$

Это и есть дифференциальные уравнения траекторий, из которых состоит многообразие, заданное этими формулами. Общее решение этих уравнений при  $c \neq 0$ :

$$\begin{aligned} a(u) &= C_1 \sqrt{|u|} \cos \frac{\sqrt{cu}}{2} + C_2 \sqrt{c|u|} \sin \frac{\sqrt{cu}}{2} = C_1 \sqrt{|u|} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{-cu}}{2} - C_2 \sqrt{-c|u|} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{-cu}}{2}, \\ b(u) &= -C_1 \sqrt{\frac{|u|}{c}} \sin \frac{\sqrt{cu}}{2} + C_2 \sqrt{|u|} \cos \frac{\sqrt{cu}}{2} = -C_1 \sqrt{\frac{|u|}{-c}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{-cu}}{2} + C_2 \sqrt{|u|} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{-cu}}{2}. \end{aligned}$$

При  $c = 0$  получаем по непрерывности:

$$a = C_1 \sqrt{|u|}, \quad b = -C_1 u \sqrt{|u|}/2 + C_2 \sqrt{u}.$$

Вычислим пределы координат и импульсов после подстановки полученных решений в формулы теоремы:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} T(a(u), b(u), u, E, B) &= \lim_{u \rightarrow 0} X(a(u), b(u), u, E, B) = \lim_{u \rightarrow 0} Y(a(u), b(u), u, E, B) = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} W(a(u), b(u), u, E, B) = 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} P_t(a(u), b(u), u, E, B) = -\operatorname{sgn}(u) \frac{C_1^2 + C_2^2(B+E)^2}{2(B+E)},$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} P_x(a(u), b(u), u, E, B) = \operatorname{sgn}(u) C_1 C_2,$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} P_y(a(u), b(u), u, E, B) = \operatorname{sgn}(u) \frac{C_1^2 - C_2^2(B+E)^2}{2(B+E)}.$$

Таким образом формулы теоремы описывают траектории с нулевыми начальными условиями для координат и всеми возможными начальными условиями для импульсов (т. е. теми, которые удовлетворяют ограничению  $p_t^2 = p_x^2 + p_y^2$ ).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogaevskii I. A. Sub-Lorentzian structures in  $\mathbb{R}^4$ : left-invariance and conformal normal forms // *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2018. Vol. 24, no. 3. P. 371–389.
2. Bogaevskii I. A. Fronts of control-affine systems in  $\mathbb{R}^3$  // *Journal of Singularities*. 2020. Vol. 21. P. 15–29.
3. Dobrokhotov S. Yu., Tolchennikov A. A. Solution of the two-dimensional Dirac equation with a linear potential and a localized initial condition // *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2019. Vol. 26, no. 2. P. 139–151.
4. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. Москва: Фазис, 1996.
5. Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Динамические системы–7. ВИНИТИ, 1987. Т. 16 (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления). С. 5–85.
6. Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И. Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений // УМН. 2021. Т. 76, № 5(461). С. 3–80.

## REFERENCES

1. Bogaevskii, I. A. 2018, “Sub-Lorentzian structures in  $\mathbb{R}^4$ : left-invariance and conformal normal forms”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, vol. 24, no. 3, pp. 371–389.
2. Bogaevskii, I. A. 2020, “Fronts of control-affine systems in  $\mathbb{R}^3$ ”, *Journal of Singularities*, vol. 21, pp. 15–29.
3. Dobrokhotov, S. Yu., Tolchennikov, A. A. 2019, “Solution of the two-dimensional Dirac equation with a linear potential and a localized initial condition”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 26, no. 2, pp. 139–151.
4. Arnold, V. I. 1990, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*, Kluwer, Dordrecht.
5. Vershik, A. M., Gershkovich, V. Ya. 1994, “Nonholonomic dynamical systems, geometry of distributions and variational problems”. Translation from *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya* 16, 5–85 (1987) *Dynamical systems. VII. Encycl. Math. Sci.*, vol. 16, pp. 1–81.
6. Dobrokhotov, S. Yu. , Nazaikinskii, V. E., Shafarevich, A. I. 2021, “Efficient asymptotics of solutions to the Cauchy problem with localized initial data for linear systems of differential and pseudodifferential equations”, *Russian Mathematical Surveys*, vol. 76, no. 5, pp. 745–819.