

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 4.

УДК: 539.5

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-487-496

**Численная оценка трещиностойкости сварных композиций из титановых листов, изготовленных в режиме сверхпластичности**

А. К. Галимов, Р. Я. Лутфуллин

**Галимов Амир Камилович** — кандидат физико-математических наук, Институт проблем сверхпластичности металлов Российской Академии наук (ИПСМ РАН) (г. Уфа).

*e-mail: amirtab@mail.ru*

**Лутфуллин Рамиль Яватович** — доктор технических наук, Институт проблем сверхпластичности металлов Российской Академии наук (ИПСМ РАН) (г. Уфа).

*e-mail: lutfullin.ramill@imsp.ru*

**Аннотация**

Рассмотрена численная оценка трещиностойкости листовых заготовок из титанового сплава с различной микроструктурой, соединенных сваркой давлением в режиме сверхпластичности. Структурно-механическая модель рассматриваемого объекта представлена в виде графа. На основе функционального осреднения реализован итерационный метод нахождения параметров напряжений и деформаций для его вершин в виде обобщения метода Ньютона. Приведенные результаты математического анализа механики зарождения и развития трещины в двуслойной сварной заготовке из титанового сплава ВТ6 с принципиально различной микроструктурой указывает на перспективность использования таких слоистых титановых композиций в изделиях ответственного назначения с целью повышения их конструктивной прочности.

*Ключевые слова:* граф, метод Ньютона, структурно-механическая модель, титановый сплав, структурно-неоднородная заготовка, трещиностойкость.

*Библиография:* 15 названий.

**Для цитирования:**

Галимов, А. К., Лутфуллин, Р. Я. Численная оценка трещиностойкости сварных композиций из титановых листов, изготовленных в режиме сверхпластичности // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 487–496.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 4.

UDC: 539.5

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-487-496

**Numerical evaluation of crack resistance of welded compositions made of titanium sheets manufactured in the superplasticity mode**

A. K. Galimov, R. Ya. Lutfullin

**Galimov Amir Kamilovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Institute of Problems of Metal Superplasticity of the Russian Academy of Sciences (Ufa).

*e-mail: amirtab@mail.ru*

**Lutfullin Ramil Kamilovich** — doctor of technical sciences, Institute of Problems of Metal Superplasticity of the Russian Academy of Sciences (Ufa).

*e-mail: lutfullin.ramill@imsp.ru*

**Abstract**

A numerical assessment of the crack resistance of titanium alloy sheet blanks with various microstructures connected by pressure welding in the superplasticity mode is considered. The structural and mechanical model of the object under consideration is represented as a graph. Based on functional averaging, an iterative method for finding stress and strain parameters for its vertices is implemented as a generalization of Newton's method. The presented results of a mathematical analysis of the mechanics of the origin and development of cracks in a two-layer welded billet made of VT6 titanium alloy with a fundamentally different microstructure indicate the prospects of using such layered titanium compositions in critical products in order to increase their structural strength.

**Keywords:** graph, Newton's method, structural and mechanical model, titanium alloy, structurally inhomogeneous billet, crack resistance.

**Bibliography:** 15 titles.

**For citation:**

Galimov, A. K., Lutfullin, R. Ya. 2025, "Numerical evaluation of crack resistance of welded composition made of titanium sheets manufactured in the superplasticity mode", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 487–496.

**1. Введение**

Известно, что титановые сплавы, в частности двухфазный сплав ВТ6, в зависимости от микроструктуры обладают существенно отличающимися механическими свойствами, в частности трещиностойкостью [1-3], которая во многом определяет конструкционную прочность материала в изделиях ответственного назначения, подвергающихся при эксплуатации воздействию ударных или циклических внешних нагрузок [4].

Повысить сопротивление указанным нагрузкам возможно в случае использования, например, слоистых материалов с разнородной структурой [5]. Механика разрушения слоистых материалов остается малоизученной и весьма дискуссионной [5,6]. Методически интересно рассмотреть листовые заготовки из титанового сплава с различными параметрами микроструктуры, сваренные давлением в режиме сверхпластичности (СП) [5-8]. Образующиеся слоисто-неоднородные структурные полуфабрикаты представляют интерес с точки зрения возможности повышения трещиностойкости материала в полых изделиях ответственного назначения,

таких как полая лопатка вентилятора гражданского авиадвигателя или сферический сосуд давления, востребованных в авиакосмической отрасли [4,7].

В настоящее время предлагается использование разработанного подхода на основе функционального осреднения [9] для количественной оценки условий зарождения и распространения трещин в слоистых структурно-неоднородных композициях при их одноосном нагружении (растяжении).

## 2. Вычисление параметров напряжения и деформации по заданной структурно-механической модели

Слоистый структурно-неоднородный плоский образец (пакет сваренных листовых заготовок) при одноосном растяжении можно представить как параллельное соединение элементарных компонентов, число которых определяется числом сваренных листовых заготовок с неоднородной микроструктурой в рассматриваемом пакете. Действительно, поскольку сваренный образец, при одноосном упругом растяжении, деформируется как единое целое, то параметры деформации в составляющих его компонентах одинаковы. В то же время напряжения в рассматриваемых прослоях будут отличаться в силу различия их механических свойств, обусловленных различной микроструктурой. В частности, если рассматривается пакет из двух листовых заготовок (с крупнозернистой и мелкозернистой структурой), то его структурно-механическая модель [10, 11], с учетом упругих свойств этих заготовок и так называемой «поправки Ирвина» [12, 13] выглядит как на рис. 1.

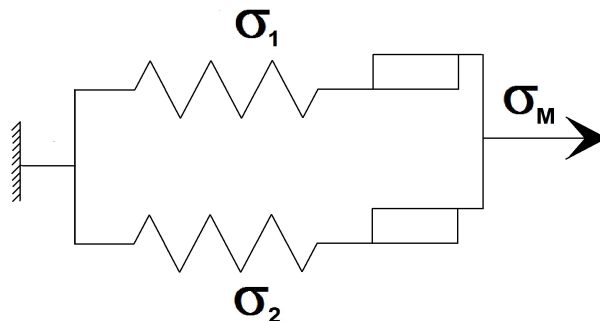


Рис. 1: структурно-механическая модель двухслойной листовой заготовки из титановых сплавов с различной микроструктурой

В общем случае, для оценки параметров напряженно-деформированного состояния при одноосном растяжении рассматриваемого образца структурно-механические модели рассматриваются как структурно-организованная иерархическая система связи идеальных моделей материальных тел. Компонентной схеме модели соответствует граф (рис. 2) (корневое дерево) [14] компонентов, построенных путем их последовательного и параллельного соединения при движении по дереву вверх с последовательным укреплением составных компонентов схемы.

Для разработанной структурно-организованной иерархической системы связи идеальных моделей материальных тел [15] каждый компонент, элементарный или составной, характеризуется длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $s$ , обращенного к узловому соединению. Каждой вершине рассматриваемого графа (корневого дерева) можно поставить в соответствие пару натуральных чисел  $i$  и  $j$ , первое из которых – номер иерархического уровня (нижний уровень –  $i=1$ ), второе – номер вершины на заданном иерархическом уровне.

Функциональное осреднение деформаций и напряжений осуществляется с учетом того обстоятельства, что значения весовых коэффициентов могут быть выражены в качестве функций от различных параметров. Величины деформаций и напряжений составных компонентов, в соответствии с определением структурно-механических моделей, вычисляется путем сведения последовательного соединения к взвешенному осреднению деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \sum_k q_{i-1,k}^0 \varepsilon_{i-1,k}, \\ \sigma_{i,j} &= \sigma_{i-1,k} \end{aligned} \right\} \frac{l_{i-1,k}^0}{l_0} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i-1,k} &= \sum_k q_{i-1,k} \sigma_{i-1,k}, \\ \varepsilon_{i,j} &= \varepsilon_{i-1,k} \end{aligned} \right\} \frac{s_{i-1,k}}{s} \quad (2.2)$$

$$a_{i,j}^\tau = \sum_k q_{i-1,k} a_{i-1,k}^\tau \quad (2.3)$$

а при последовательном соединении

$$a_{i,j}^\tau = \left[ \sum_k (q_{i-1,k} a_{i-1,k}^\tau)^{-1} \right]^{-1} \quad (2.4)$$

Последнее обстоятельство используется при определении напряженно-деформированного состояния систем с нелинейными базисными компонентами с использованием итерационного метода по схеме Ньютона [15].

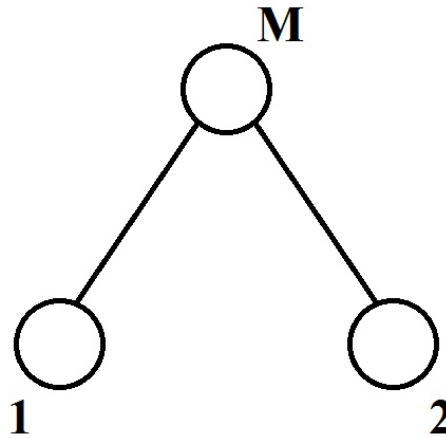


Рис. 2: Граф (корневое дерево) структурно-механической модели

При этом первое приближение ( $k=1$ ) для значения напряжения в концевой вершине дерева связи ( $\sigma_M^1$ ) для очередного временного слоя связи  $\tau+1$  ( $\varepsilon_M^{\tau+1} = \varepsilon_M^\tau + \delta^\tau \varepsilon_M$  при заданной программе деформирования моделируемого образца  $\varepsilon_M = \varepsilon(t)$ ) определяется из соотношения

$$\sigma_M^{\tau+1} = \sigma_M^\tau + a_M^\tau (\varepsilon_M^{\tau+1} - \varepsilon_M^\tau) + o(\delta^\tau \varepsilon)$$

Соответственно, при заданной программе нагружения  $\sigma_M = \sigma(t)$

$$\varepsilon_M^{\tau+1} = \varepsilon_M^\tau + (a_M^\tau)^{-1} (\sigma_M^{\tau+1} - \sigma_M^\tau) + o(\delta^\tau \sigma)$$

Величины скоростей деформаций  $\xi = \dot{\varepsilon}$ , например, для вязких элементов нижнего иерархического уровня, аппроксимируется разностной схемой первого порядка точности.

Условия сходимости итерационного процесса (выбор шага дискретизации времени  $\delta^T t$ , т. е. величины приращения  $\delta^T \varepsilon_{1,j} \leq \delta^T \varepsilon_M$  или  $\delta^T \sigma_{1,j} \leq \delta^T \sigma_M$ ) определяются параметрами базисных соотношений.

Исходными данными для расчетов по предложенной методике является граф компонентной схемы структурно-механической модели, величины параметров используемых базисных компонентов (элементов упругости, вязкости и пластичности) программа нагружения (или деформирования) моделируемого объекта, и задаваемая точность вычислений.

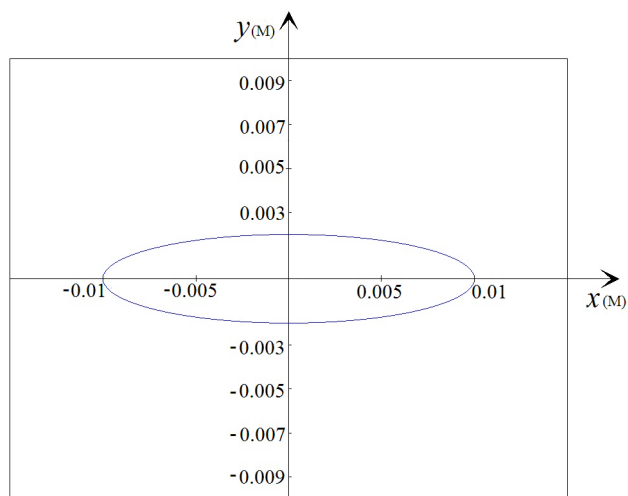


Рис. 3: Графическое представление трещины в рассматриваемом образце

### 3. Численный анализ условий зарождения трещины в сварном образце

Итак, в качестве примера рассмотрим пакет плоских двух листовых заготовок титановых сплавов ВТ6 с крупнозернистой пластинчатой и мелкозернистой глобулярной микроструктурой [1-3], сваренных между собой в твердом состоянии давлением в режиме СП. Параметры, характеризующие механические свойства и размерные характеристики приведены в [6]. Такому пакету соответствует структурно-механическая модель, представленная на рис. 1. Она, соответственно, описывается графом (рис. 2), число висячих вершин которого соответственно равно двум. Висячие вершины представляют собой элементарные компоненты, параметры которых обусловлены свойствами титановых сплавов с крупно- и мелкозернистой микроструктурой [6].

Элементарные (базисные) компоненты представляют собой модели упругости или, с учетом так называемой поправки Ирвина, модели идеального упругопластического тела, которая включает в себя элементы упругости – модель Гука [10, 11] связи напряжения  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где  $E$  – модуль упругости, при этом упругопластичность аппроксимируется непрерывной зависимостью.

Рассмотрим сначала процесс зарождения трещины в рассматриваемых сваренных листах. Потенциальная энергия упругой деформации определяется из уравнения [11, 12]

$$W_0 = \frac{\sigma_0^2 S_{\Pi}}{2E} \cdot t$$

где  $\sigma_0$  – приложенное напряжение,  $S_{\Pi}$  – площадь поверхности листа,  $E$  – модуль упругости,  $t$  – толщина листа.

Пусть рассматриваемый сварной пакет подвергается одноосному упругому растяжению  $\epsilon \approx 0,00125$ . Тогда напряжения в листах с крупнозернистой и мелкозернистой микроструктурой достигнут значений 120 МПа и 135 МПа соответственно.

При таком приложенном напряжении к листу с крупнозернистой микроструктурой энергия его деформации достигает  $W_{КЗ}=18$  Дж, что соответствует энергии зарождения в нем трещины [6].

Но, при этом, слой с мелкозернистой структурой испытывает напряжение 135 МПа, что обуславливает энергию деформации  $W_{МЗ}=19,5$  МПа, что существенно меньше энергии деформации зарождения трещины в листе с мелкозернистой структурой, равной 27 Дж [6]. Это препятствует зарождению трещины в сварном образце в целом.

Действительно, сварка листовых заготовок давлением в режиме сверхпластичности обеспечивает образование сварного соединения со свойствами, идентичными свойствам соединяемых материалов. На границе соединения возникает резкий переход от одного к фактически другому материалу с тем же химическим составом, но с измененными механическими свойствами, благодаря принципиально иной микроструктуре.

#### 4. Численный анализ условий развития трещины

Рассмотрим теперь энергию деформации, которая приводит к развитию уже существующей трещины, которая традиционно представляется [12] в виде эллипса с центром осей в начале координат и большой осью вдоль оси ОХ, в условиях растягивающих напряжений  $\sigma_0$  ( $\sigma_m$ ) вдоль оси ОУ (рис. 3).

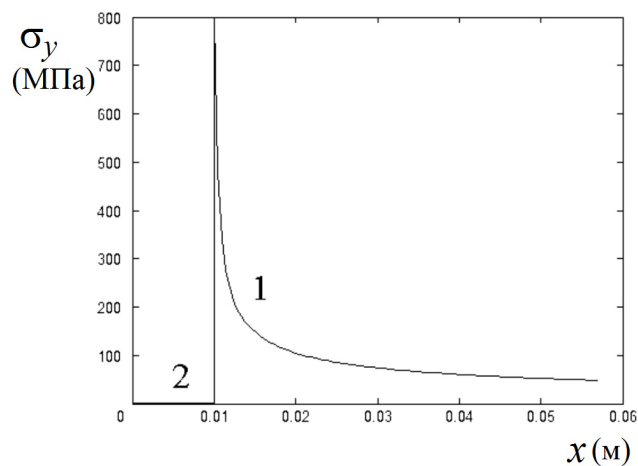


Рис. 4: распределение нормального напряжения относительно оси Y в окрестности правой вершины трещины

Пусть сваренный (сварной) пакет листовых заготовок с трещиной в центре пакета, длиной  $2l=20$  мм. подвергается одноосному упругому растяжению  $\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_m$ )  $\approx 0.0015$ .

Тогда в составных компонентах напряжения распределятся со значениями: для слоя с мелкозернистой микроструктурой  $\sigma_{мз} \approx 208,5$  МПа для слоя с крупнозернистой микроструктурой  $\sigma_{кз} = 186$  МПа

Наличие трещин обуславливает распределение напряжений вне площади трещин заготовки и наличие концентрации напряжений в вершинах этих трещин. Напряжения в окрестности вершины сомкнувшейся трещины определяются [12] формулой

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2}$$

Здесь  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений,  $r$  – радиус пластической зоны в вершине трещины. Согласно подходу Ирвина [12, 13] («поправка Ирвина» к теории Гриффитса), макроскопически хрупкое разрушение обязательно сопровождается микропластическим деформированием, и величины  $r$  и  $K_I$  определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right) \\ K_I = \sigma \sqrt{\pi(l+r)} \end{cases}$$

которую можно решить методом последовательных приближений по схеме:

$$\begin{aligned} K_{I_0} &= \sigma \sqrt{\pi l} \\ \begin{cases} r_k = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{I_{k-1}}}{\sigma_T} \right) \\ K_{I_{k+1}} = \sigma \sqrt{\pi(l+r_k)} \end{cases} \end{aligned}$$

$k=0,1,2, \dots$

На рис. 4 приведены распределения напряжений  $\sigma_y$  для слоя с мелкозернистой микроструктурой в области правой вершины трещины, вдоль оси  $Ox$ . Потенциальная энергии деформации описывается с учетом наличия трещины в середине листа следующей зависимостью [12].

$$W = \frac{\sigma^2 S_{\Pi}}{2E} \cdot t - \frac{\pi \sigma^2 l^2}{E} \cdot t = \frac{\sigma^2}{E} \left( \frac{s_{\Pi}}{2} - \pi l^2 \right) \cdot t$$

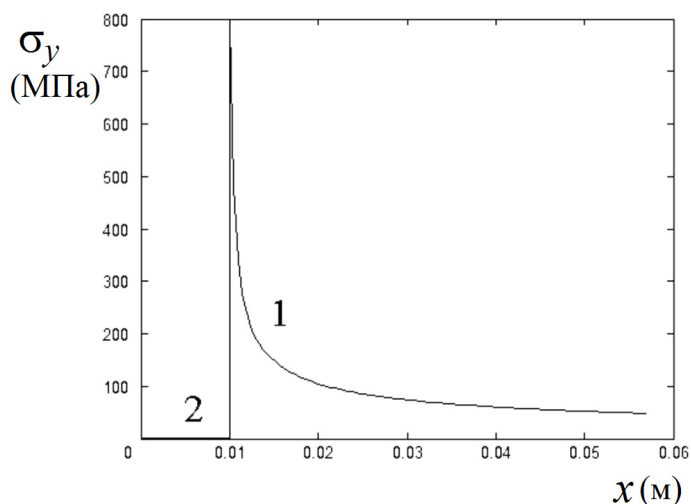


Рис. 5: Распределение нормальных напряжений в окрестности правой вершины трещины

При заданной величине растяжения потенциальная энергия деформации в рассматриваемых слоях с мелко- и крупнозернистой микроструктурой примет значения  $W_{МЗ}=24$  Дж и  $W_{КЗ}=21$  Дж соответственно. Для слоя с мелкозернистой микроструктурой указанное значение соответствует энергии развития трещины, но для слоя с крупнозернистой микроструктурой  $W_{МЗ}=21$  Дж значительно меньше значения 30 Дж, которое соответствует энергии развития трещины в слое с такой микроструктурой [6]. Поскольку энергии деформации для развития трещины в слое с крупнозернистой микроструктурой недостаточно, то последнее обстоятельство препятствует развитию трещины в рассматриваемом слоистом сварном пакете листов из титанового сплава с крупно- и мелкозернистой микроструктурой.

## 5. Заключение

Проведенный математический анализ механики зарождения и развития трещины в двухслойной сварной заготовке из титанового сплава ВТ6 с принципиально различной микроструктурой указывает на перспективность использования слоистых титановых композиций в полых изделиях ответственного назначения с целью повышения их конструкционной прочности.

## 6. Благодарности

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов и выражают благодарность проф. Хабибуллину Б. Н. за техническую помощь.



## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышева И. П., Мурзинова М. А., Жеребцов С. В., Салищев Г. А. Механические свойства ультрамелкозернистого титанового сплава VT6 // Перспективные материалы. 2011. №12. С. 316-320
2. Саркеева А. А., Лутфуллин Р. Я., Круглов А. А., Астанин В. В. Влияние структуры на механическое поведение титанового сплава VT6 при ударном нагружении // Письма о материалах 2012. Т. 2. №2. С. 99-102
3. Валиев Р. З., Клевцов Г. В., Семенова И. П. и др. Прочность и механизм ударного разрушения титана и его сплавов в исходном и микрокристаллическом состояниях // Деформация и разрушение материалов. 2012. №11. С. 32-37.
4. Салищев Г. А., Жеребцов С. В., Малышева С. П. и др. Применение титановых сплавов с субмикрокристаллической структурой для изготовления деталей авиадвигателей // Перспективные материалы. 2009. №7. С. 280-285
5. Саркеева А. А., Круглов А. А., Бородин Е. М. и др. Поведение при ударном нагружении слоистого материала из титанового сплава // Физическая мезомеханика. 2012. №5. С.51-57.
6. Sarkeeva A. A. Impact fracture characteristics of multilayer laminate based on near-alpha titanium alloy // Письма о материалах . 2022. 12(4s) С. 499-503.
7. Валиахметов О. Р., Галеев Р. М., Иванько В. А. и др. Использование наноструктурных материалов и нанотехнологий для создания полых конструкций // Российские нанотехнологии. 2010. Т. 5. №1-2. С. 102-111.
8. Sarkeeva A. A. Kruglov A. A. Characteristics of the mechanical behavior of a near-alpha multilayer laminate under impact loading // Письма о материалах. 2023. 13(4s). Р. 488-492.
9. Зверев Г. Н. Принципы, базисы, законы фундаментальной информатики // Открытое образование 2013. №3. С. 4-11.
10. Рейнер М. Реология. — М.: Наука, 1965 223 с.
11. Смирнов О. М. Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности. — М.: Машиностроение, 1979, 223 с.
12. Партон В. З. Механика разрушения. — М.: Физматлит, 1990. 239 с.
13. Броек Д. Основы механики разрушения. — Москва: Высшая школа, 1980. 368 с.
14. Сачков В. В. Введение в комбинаторную математику. — М.: Наука, 1989, 200 с.
15. Барыкин Н. П., Галимов А. К. Структурно-механические модели материалов в условиях процессов обработки давлением и последующей эксплуатации // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка давлением 1999. №4. С. 4-8.

## REFERENCES

1. Malysheva, S. P., Myrsinova, M. A., Jerebcov, C. V., Salyshev, G. A. 2011, "Mechanical properties of ultrafine-grained titanium alloy VT6", *Perspektivnye materialy*, no. 12, pp. 316–320.

2. Sarkeeva, A. A., Lutfullin, R. Ya., Kruglov, A. A., Astanin, V. V. 2012, "Influence of the structure in the mechanical behavior of VT6 titanium alloy under impact loading", *Letters on materials*, no. 2, pp. 99–102.
3. Valiev, R. Z., Klevtsov, G. V., Semenova, I. P. and other. 2012, "Strength and mechanism of impact fracture of titanium and its alloys in the initial and submicrocrystalline states", *Deformatsiya i Razrushenie materialov* no. 11, pp. 32–37.
4. Salishev, G. A., Jerebtsov, S. V., Malysheva, S. P. and other. 2009, "The use of titanium alloys with a submicrocrystalline structure for the manufacture of parts aircraft engines", *Perspektivnye materialy*, no. 7, pp. 280–285.
5. Sarkeeva, A. A., Kruglov, A. A., Borodin, E. M. and other. 2012, "Impact loading behavior of titanium alloy laminated material", *Physical mesomechanics*, no 5, pp. 51–57.
6. Sarkeeva, A. A. 2022, "Impact fracture characteristics of multilayer laminate based on near-alpha titanium alloy", *Letters on materials*, no. 12(4s), pp. 499–503.
7. Valiachmetov, O. R., Galeev, R. M., Ivanko, V. A., and other. 2010, "Using nanostructured materials and nanotechnology to create hollow structures", *Russian nanotechnology*, no. 12(4s), Vol.5. no 1-2, pp. 102–111.
8. Sarkeeva, A. A. & Kruglov, A. A. 2022, "Characteristics of the mechanical behavior of a near-alpha multilayer laminate under impact loading", *Letters on materials*, no. 13(4s), pp. 488–492.
9. Zverev, G. N. 2023, "Principles, bases, laws of fundamental computer science", *Open education*, no 3, pp. 4–11.
10. Reiner, M. 1965, *Rheology*, Nauka, Moscow, Russia 223 pp.
11. Smirnov, O. M. 1979, *Pressure treatment of metals in a state of superplasticity*, Mashinostroenie, Moscow, Russia.
12. Parton, V. Z. 1990, *Elementary engine*, Fismatlit, Moscow, Russia.
13. Broek, D. 1980, *Elementary engineering fracture mechanics*, Vishsaya Shkola, Moscow, Russia.
14. Sachkov, V. V. 1989, *Elementary engineering fracture mechanics*, Nauka, Moscow, Russia.
15. Barykin, N. P. & Galimov, A. K. 1999, "Structural and mechanical models of materials in conditions of pressure treatment and subsequent operation", *Forging and stamping production. Material working by pressure*, no 4, pp. 4–8.

Получено: 17.04.2025

Принято в печать: 17.10.2025