ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 511.36 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-461-466

Линейная независимость значений $E-$функций с периодическими коэффициентами

А. Ю. Нестеренко, В. Г. Чирский

Нестеренко Алексей Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский институт электроники и математики (г. Москва).
e-mail:nesterenko_a_y@mail.ru
Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, РАНХиГС (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Рассмотрим последовательности целых чисел $a_n^{(k,j)}, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j$, удовлетворяющие условиям

$$a_n^{(k,j)} = a_{n+T_j}^{(k,j)}, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j, n = 0, 1, ...$$

и рассмотрим функции

$$F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(k,j)}}{n!} z^n, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j.$$

В работе устанавливаются условия, при которых совокупность функций

$$1, e^z, F_{j,k}(z), j = 1, ..., m, k = 2, ..., T_j$$

линейно независима над $\mathbb{C}(z)$ и для любого рационального числа $\gamma \neq 0$ их значения в точке γ линейно независимы. Получена оценка меры линейной независимости этих чисел. Результат может быть использован при построении псевдослучайных чисел.

Ключевые слова: линейно независимые числа, $E-$ функции, псевдослучайные числа.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:
Нестеренко А. Ю., Чирский В. Г. Линейная независимость значений $E-$функций с периодическими коэффициентами // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 461–466.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 511.36 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-461-466

Linear independence of values of $E-$functions with periodic coefficients

A. Yu. Nesterenko, V. G. Chirskii

Nesterenko Alexey Yur'evich — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (Moscow).
e-mail:nesterenko_a_y@mail.ru,
Chirskii Vladimir Grigor'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University, Ranepa (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We consider sets of integers $a_n^{(k,j)}, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j$ which satisfy conditions

$$a_n^{(k,j)} = a_{n+T_j}^{(k,j)}, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j, n = 0, 1, ...$$

and functions

$$F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(k,j)}}{n!} z^n, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j.$$

We find conditions under which the set of functions

$$1, e^z, F_{j,k}(z), j = 1, ..., m, k = 2, ..., T_j$$

is linearly independent over $\mathbb{C}(z)$ and for any rational $\gamma \neq 0$ their values at γ are linearly independent numbers.An estimate of the measure of linear independence of these numbers is obtained. The result can be used to generate pseudo-random numbers.

Keywords: linearly independent numbers, $E-$ functions, pseudo-random numbers.

Bibliography: 5 titles.

For citation:
Nesterenko, A. Yu., Chirskii, V. G. 2025, "Linear independence of values of $E-$functions with periodic coefficients" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 461–466.

1. Введение

Работа продолжает исследования, начатые в статье [1]. Предлагается экономный подход к построению совокупностей псевдослучайных чисел, основанный на рассмотрении значений совокупностей $E-$функций с периодическими коэффициентами в рациональных точках. Устанавливается, что эти функции линейно независимы с 1 над полем $\mathbb{C}(z)$, а их значения линейно независимы. Также получена оценка линейной формы от этих значений. Используется метод Зигеля - Шидловского [2] и подход, предложенный в работе В.Х Салихова [3] к исследованию совокупностей $E-$функций, составляющих решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Основной результат

Пусть $T_1, \dots, T_m$–попарно взаимно простые натуральные числа. Рассмотрим последовательности целых чисел $a_n^{(k,j)}, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j$ удовлетворяющие условиям

$$a_n^{(k,j)} = a_{n+T_j}^{(k,j)}, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j, n = 0, 1, ...$$

Будем считать, что выполнены следующие условия:

1. Для каждого $j = 1, \dots, m$ пусть $a_n^{(1,j)} = 1$ для всех n.
2. Для каждого $j = 1, \dots, m$ пусть векторы $(a_0^{(k,j)}, \dots, a_{T_{j-1}}^{(k,j)}), k = 2, \dots, T_j$ линейно независимы с вектором $(a_0^{(1,j)}, \dots, a_{T_{j-1}}^{(1,j)}) = (1, \dots, 1)$.

Обозначим

$$F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(k,j)}}{n!} z^n, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть целые числа $a_n^{(k,j)}, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j, n = 0, 1, ...$ удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда функции*

$$1, e^z, F_{j,k}(z), j = 1, ..., m, k = 2, ..., T_j$$

линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ и для любого рационального $\gamma \neq 0$ числа

$$1, e^\gamma, F_{j,k}(\gamma), j = 1, ..., m, k = 2, ..., T_j \tag{2}$$

линейно независимы. Для любой ненулевой линейной формы

$$L(1, e^\gamma, F_{1,2}(\gamma), \dots, F_{1,T_1}(\gamma), \dots, F_{m,2}(\gamma), \dots, F_{m,T_m}(\gamma))$$

с целыми коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине числа H и любого $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ существует эффективная постоянная $b > 0$, зависящая от числа ε и чисел (2) такая, что

$$|L(1, e^\gamma, F_{1,2}(\gamma), \dots, F_{1,T_1}(\gamma), \dots, F_{m,2}(\gamma), \dots, F_{m,T_m}(\gamma))| > bH^{m-1-T_1-\dots-T_m}.$$

Доказательство теоремы существенно использует результаты статьи [1]. Основой являются тождества, аналогичные доказанным в [1]. Пусть $a_n^{(k,j)}, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j, n = 0, 1, 2, ...$– целые числа с условием

$$a_n^{(k,j)} = a_{n+T_j}^{(k,j)}, j = 1, ..., m, k = 1, ..., T_j, n = 0, 1, ...$$

Ряды $F_{j,k}(z)$, определённые равенствами (1) можно представить в виде

$$F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(k,j)}}{n!} z^n = \sum_{l=0}^{T_{j-1}} a_l^{(k,j)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{l+sT_j}}{(l+sT_j)!} \tag{3}$$

Как и в статье [1], обозначим

$$f_{j,0}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z/T_j)^{T_j s}}{(1)_s (1/T_j)_s ... ((T_j - 1)/T_j)_s}$$

при $l = 1, \ldots, T_{j-2}$

$$f_{j,l}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z/T_j)^{T_j s}}{(1)_s(1/T_j+1)_s(l/T_j+1)_s((l+1)/T_j)_s...((T_j-1)/T_j)_s}$$

и

$$f_{j,T_j-1}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z/T_j)^{T_j s}}{(1)_s(1/T_j+1)_s...((T_j-1)/T_j+1)_s},$$

где символ Похгаммера $(\gamma)_n$ определяется равенствами $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)$ при $n \geq 1$.

В статье [1] установлены тождества: при $l = 1, \ldots, T-1$

$$l!T^{Ts}(1)_s(1/T+1)_s \ldots (l/T+1)_s((l+1)/T)_s \ldots ((T-1)/T)_s = (l+sT)!. \tag{4}$$

При $l = 0$

$$T^{Ts}(1)_s(1/T)_s \ldots ((T-1)/T)_s = (Ts)!. \tag{5}$$

Таким образом, при $k = 1, \ldots, T_j$ из равенств (3)-(5) получаем:

$$F_{j,k}(z) = \sum_{l=0}^{T_{j-1}} \frac{a_l^{(k,j)}}{l!} f_{j,l}(z). \tag{6}$$

Линейную эквивалентность над полем $\mathbb{C}(z)$ конечных наборов функций S_1, S_2обозначаем символом $S_1 \sim S_2$.

Лемма 1 (Лемма 1 из [1]). *Для любого* $j = 1, \ldots, m$

$$\{f_{j,0}(z), \ldots, f_{j,T_j-1}(z)\} \sim \{f_{j,0}(z), \ldots, f_{j,0}^{(T_j-1)\}(z)}.$$

Лемма 2 (Лемма 2 из [1]). *Для любого* $j = 1, \ldots, m$

$$f_{j,0}(z) = 1/T_j \sum_{r=0}^{T_j-1} \exp(\zeta_j^r z),$$

где $\zeta_j = \exp(2\pi i/T_j)$.

Лемма 3 (Лемма 3 из [1]). *Для любого* $j = 1, \ldots, m$

$$\{f_{j,0}(z), \ldots, f_{j,T_j-1}(z)\} \sim \{\exp(\zeta_j^r z), r = 0, 1, ..., T_j - 1)\}. \tag{7}$$

Доказательства этих лемм совпадают с доказательствами лемм из [1] с точностью до обозначений. Рассмотрим при каждом $j = 1, \ldots, m$ эквивалентные системы векторов (7) и, соответственно,

$$\{F_{j,1}(z), \ldots, F_{j,T_j}(z)\} \sim \{\exp(\zeta_j^r z), r = 0, 1, ..., T_j - 1)\},$$

так как набор $\{F_{j,1}(z), \ldots, F_{j,T_j}(z)\}$ ввиду (7) линейно эквивалентен набору $\{f_{j,0}(z), \ldots, f_{j,T_j-1}(z)\}$. Заметим, что $F_{j,1}(z) = \exp z$. Поэтому

$$\{F_{j,2}(z), \ldots, F_{j,T_j}(z)\} \sim \exp(\zeta_j^r z), r = 1, \ldots, T_j - 1.$$

Следовательно,

$$\{F_{1,1}(z), F_{1,2}(z), \ldots, F_{1,T_1}(z), F_{2,2}(z), \ldots, F_{2,T_2}(z), \ldots, F_{m,2}(z), \ldots, F_{m,T_m}(z)\} \sim \\ \{\exp z, exp(\zeta_1 z), \ldots, exp(\zeta_1^{T_1-1} z), \ldots, exp(\zeta_m z), \ldots, exp(\zeta_m^{T_m-1} z)\}. \tag{8}$$

В статье [1] была доказана следующая лемма:

Лемма 4 (Лемма 4 из [1]). *Пусть* $\alpha_1, \ldots, \alpha_N-$ *различные числа, отличные от* 0. *Тогда функции* $1, \exp(\alpha_1 z), \ldots, \exp(\alpha_N z)$ *линейно независимы над полем* $\mathbb{C}(z)$.

Применим эту лемму к набору функций

$$\{1, \exp z, exp(\zeta_1 z), \ldots, exp(\zeta_1^{T_1-1} z), \ldots, exp(\zeta_m z), \ldots, exp(\zeta_m^{T_m-1} z)\}.$$

Если для некоторых$k, j, r < T_j, s < T_k$ выполняется равенство $\zeta_j^r = \zeta_k^s$, то $2\pi ir/T_j = 2\pi is/T_k$ и $r/s = T_j/T_k$, что противоречит условию взаимной простоты чисел T_j и T_k. Следовательно, наборы (8) состоят из функций, линейно независимых над $\mathbb{C}(z)$. Первая часть теоремы доказана.

Заметим, что функции $f_{j,k}(z), j = 1, \ldots, m, k = 0, \ldots, T_j - 1$ и 1 составляют решение системы дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{j,k}' = (k+1)\frac{(y_{j,k+1} - y_{j,k})}{z}, k = 0, \ldots, T_j - 2 \\ y_{j,T_j-1}' = \frac{T_j}{z^{T_j+1}(T_j-1)!)}(y_{j,0} - 1) - \frac{T_j}{z} y_{j,T_j-1}. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Поскольку для любого $j = 1, \ldots, m$ совокупность функций $\{F_{j,1}(z), \ldots, F_{j,T_j}(z)\}$ линейно эквивалентна совокупности функций $\{f_{j,0}(z), \ldots, f_{j,T_j-1}(z)$, причём любая функция $F_{j,k}(z)$ является линейной комбинацией функций $f_{j,0}(z), \ldots, f_{j,T_j-1}(z)$ с коэффициентами - целыми числами, функции $F_{j,1}(z), \ldots, F_{j,T_j}(z)$ для любого $j = 1, \ldots, m$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ имеющими, ввиду (9), полюс только в точке $z = 0$. При этом для каждого $j = 1, \ldots, m$ выполняется равенство $F_{j,1}(z) = \exp z$. Поэтому и функции $F_{j,k}(z), k = 2, \ldots, T_j, j = 1, \ldots, m$ и $F_{j,1}(z) = \exp z$ и 1 составляют решение системы из $T_1 + \ldots + T_m + 2 - m$ линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, имеющими полюс только в точке $z = 0$. Осталось применить теорему 1 главы 11 из книги [2] :

Пусть $\mathbb{I}$ - поле рациональных чисел, либо мнимое квадратичное поле над полем рациональных чисел. Пусть Е-функции $1, g_1(z), ..., g_r(z)$ *составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из поля* $\mathbb{C}(z)$ *и линейно независимы над* $\mathbb{C}(z)$. *Тогда для любого целого алгебраического числа* $\gamma \neq 0, \gamma \in \mathbb{I}$, *отличного от особых точек этой системы, значения* $1, g_1(\gamma), ..., g_r(\gamma)$ *линейно независимы и для любой ненулевой линейной формы* $L\left(1, g_1(\gamma), ..., g_r(\gamma)\right)$ *с целыми коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине числа* H *и любого* $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ *существует постоянная* $b > 0$, *зависящая от чисел* $g_1(\gamma), ..., g_r(\gamma), \varepsilon$ *такая, что*

$$\left| L\left(1, g_1(\gamma), ..., g_r(\gamma)\right) \right| > bH^{-r-\varepsilon}.$$

Эффективность постоянной b следует из результатов статьи [4].

3. Заключение

Сделаем заключительные замечания. Рассмотрение взаимно простых чисел $T_1, \ldots, T_m$ позволяет получить $T_1 + \ldots + T_m + 1 - m$ линейно независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций, выбирая $T_1^2 + \ldots + T_m^2 - (T_1 + \ldots + T_m)$ вместо $(T_1 + \ldots + T_m)^2 - (T_1 + \ldots + T_m)$ целых чисел. Например, в качестве чисел $T_1, \ldots, T_m$ можно взять последовательные простые числа $p_1, \ldots, p_m$. Это соображение можно использовать при экономном построении наборов псевдослучайных чисел (см. например [5]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г.; Нестеренко А. Ю. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей.//Дискрет.матем.-2015.-т.27.-№4.-с. 150 – 157

2. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.-М: "Наука".-1987.-448 с.(Английский перевод:[3] Andrei B.Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467pp.).

3. Салихов В. Х. Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференцивльным уравнениям первого порядка.// Мат. заметки.-1973.- Т.13.-№ 1.- С.29-40.

4. Bertrand D; Chirskii V, Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series.//Ann.Fac.Sci. Toulouse.-2004.-V.XIII.-no.2.-PP.241-260.

5. Алферов А. П.; Зубов А. Ю.;Кузьмин А. С.; Черемушкин А. В. Основы криптографии.-М.:Гелиос.-2001.-480с.

REFERENCES

1. Chirskii, V. G., Nesterenko, A. Yu. 2017, “An approach to the transformation of periodic sequences”, *Discrete Mathematics and Applications W.de Gruyter.-Berlin.-New York,*Vol.27, no.1, pp. 1-6.

2. Shidlovskii, A. B. 1989.“Transcendental Numbers”, *W.de Gruyter.-Berlin.-New York*, 467pp.

3. Salikhov, V. Kh. 1973, “On algebraic independence of the values of E-functions satisfying first order linear differential equations”, *Mat. Zametki* , Vol. 13,No 1, p.29 - 40.

4. Bertrand, D., Chirskii, V., Yebbou, J. 2004, “ Effective estimates for global relations on Euler-type series”, *Ann.Fac.Sci. Toulouse.*, Vol. 13, No. 2, p.241-260.

5. Alferov, A. P., Zubov, A. Yu., Kuzmin, A. S., Cheremushkin, A. B. 2001, “Fundamentals of Cryptography”, *Helios, Moscow*, 480p.

Получено: 17.06.2025
Принято в печать: 17.10.2025