ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 1.

УДК 511

ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА ДЕЛИТЕЛЕЙ С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ, ИМЕЮЩИМИ ДВОИЧНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

К. М. Эминян (г. Москва)

Аннотация

Пусть $\tau_k(n)$ — число решений уравнения $x_1x_2\cdots x_k = n$ в натуральных числах x_1, x_2, $\ldots$ x_k. Пусть

$$D_k(x) = \sum_{n\leqslant x} \tau_k(n).$$

Задача получения асимптотической формулы для $D_k(x)$ при $k = 2$ называется проблемой делителей Дирихле, а при $k \geqslant 3$ — обобщенной проблемой делителей Дирихле.

Эта асимптотическая формула имеет вид

$$D_k(x) = xP_{k-1}(\log x) + O(x^{\alpha_k+\varepsilon}),$$

где $P_{k-1}(x)$ — многочлен степени $k-1$, $0 < \alpha_k < 1$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Обобщенная проблема делителей Дирихле имеет богатую историю.

В 1849 Л. Дирихле [1] доказал, что

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{1}{k}, \quad k \geqslant 2.$$

В 1903 году Г.Ф. Вороной [2] доказал, что (см. также [3])

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{1}{k+1}, \quad k \geqslant 2.$$

В 1922 году Г. Харди и Д. Литтлвуд [4] доказал, что

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{3}{k+2}, \quad k \geqslant 4.$$

В 1979 году. Р. Хис-Браун [5] доказал, что

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{3}{k}, \quad k \geqslant 8.$$

В 1972 году замечательный результат получил А. А. Карацуба [6]. Его оценка остаточного члена асимптотической формулы имеет вид

$$O(x^{1-\frac{c}{k^{2/3}}}(c_1 \log x)^k),$$

где $c > 0$, $c_1 > 0$ — абсолютные постоянные.

Эта оценка равномерна по $2 \leqslant k \leqslant \log x$.

Пусть $\mathbb{N}_0$ — класс множества натуральных чисел, двоичного разложения которых содержат четное число единиц. В 1991 автор [8] решил проблему делителей Дирихле в числах из множества $\mathbb{N}_0$ и получил формулу

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\in\mathbb{N}_0}} \tau(n) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqslant X} \tau(n) + O(X^{\omega} \ln^2 X),$$

где $\tau(n)$ — число делителей n, $\omega = \frac{1}{2}\left(1+\log_2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = 0.9428\ldots$.

В настоящей статье обобщенная проблема делителей Дирихле решается в числах из множества $\mathbb{N}_0$.

Ключевые слова: Обобщенная проблема делителей, двоичные разложения, асимптотическая формула, равномерная оценка остаточного члена.

Библиография: 15 названий.

GENERALIZED PROBLEM OF DIVISORS WITH NATURAL NUMBERS WHOSE BINARY EXPANSIONS HAVE SPECIAL TYPE

K. M. Eminyan (Moscow)

Abstract

Let $\tau_k(n)$ be the number of solutions of the equation $x_1x_2\cdots x_k = n$ in natural numbers x_1, x_2, ..., x_k. Let

$$D_k(x) = \sum_{n\leqslant x}\tau_k(n).$$

The problem of obtaining of asymptotic formula for $D_k(x)$ is called Dirichlet divisors problem when $k = 2$, and generalyzed Dirichlet divisors problem when $k \geqslant 3$.

This asymptotic formula has the form

$$D_k(x) = xP_{k-1}(\log x) + O(x^{\alpha_k+\varepsilon}),$$

where $P_{k-1}(x)$ — is the polynomial of the degree $k-1$, $0 < \alpha_k < 1$, $\varepsilon > 0$ — is arbitrary small number.

Generalyzed Dirichlet divisor problem has a rich history.

In 1849, L. Dirichlet [1] proved , that

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{1}{k}, \quad k \geqslant 2.$$

In 1903, G. Voronoi [2]

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{1}{k+1}, \quad k \geqslant 2.$$

(see also [3])

In 1922, G. Hardy and J. Littlewood [4] proved that

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{3}{k+2}, \quad k \geqslant 4.$$

In 1979, D. R. Heath-Brown [5] proved that

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{3}{k}, \quad k \geqslant 8.$$

In 1972, A. A. Karatsuba got a remarkable result [6].

His uniform estimate of the remainder term has the form

$$O(x^{1-\frac{c}{k^{2/3}}}(c_1\log x)^k),$$

where $c > 0$, $c_1 > 0$ — are absolute constants.

Let $\mathbb{N}_0$ — be a set of natural numbers whose binary expansions have even number of ones.

In 1991, the autor [8] solved Dirichlet divisors problem and got the formula

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\in\mathbb{N}_0}}\tau(n) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqslant X}\tau(n) + O(X^{\omega}\ln^2 X),$$

where $\tau(n)$ — the number of divisors n, $\omega = \frac{1}{2}\big(1+\log_2\sqrt{2+\sqrt{2}}\big) = 0.9428\ldots$.

In this paper, we solve the generalyzed Dirichlet divisors problem in numbers from $\mathbb{N}_0$.

Keywords: generalized problem of divisors, binary expansions, asymptotic formula, uniform estimate of the remainder term.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Пусть

$$n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots \tag{1}$$

— двоичное разложение натурального числа n, ($\varepsilon_j = 0, 1;\ j = 0, 1, 2, \ldots$).

Разобьем множество натуральных чисел на два непересекающихся класса следующим образом. Если число единиц в разложении (1) четное, отнесем n к классу $\mathbb{N}_0$; в противном случае — к классу $\mathbb{N}_1$.

Пусть

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \in \mathbb{N}_0; \\ -1, & \text{если} \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

В работе [8] автор вывел асимптотическую формулу вида

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\in\mathbb{N}_0}} \tau(n) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqslant X}\tau(n) + O(X^{\omega}\ln^2 X),$$

где $\tau(n)$ — число делителей n, $\omega = \frac{1}{2}\big(1+\log_2\sqrt{2+\sqrt{2}}\big) = 0.9428\ldots$.

В настоящей статье изучается сумма

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\in\mathbb{N}_0}} \tau_k(n),$$

где $\tau_k(n)$ — число решений уравнения $x_1\cdots x_k = n$ в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$, $k \geqslant 3$.

Сформулируем основные результаты статьи.

Теорема 1. *Для любого фиксированного натурального $k \geqslant 3$ существует $\eta = \eta(k) > 0$ такое, что справедлива формула*

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\in\mathbb{N}_0}} \tau_k(n) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqslant X}\tau_k(n) + O(X^{1-\eta}).$$

Заметим, что

$$\sum_{n\leqslant X}\tau_k(n) \sim XP_{k-1}(\ln X),$$

где $P_{k-1}(x)$ — многочлен степени $k-1$ (см. [13], гл. V, задача 3), поэтому формула теоремы 1 является асимптотической при $X \to +\infty$.

Теорема 2. *Для любого фиксированного натурального $k \geqslant 3$ существует $\eta = \eta(k) > 0$ такое, что*

$$S = \sum_{n\leqslant X}\varepsilon(n)\tau_k(n) = O(X^{1-\eta}).$$

Доказательства теорем основано на принадлежащей автору оценке интеграла

$$\int_0^1 |S(\alpha)|d\alpha,$$

где

$$S(\alpha)=\sum_{n\leqslant 2^Q}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n},$$

где Q — натуральное число см. [8].

2. Леммы

Лемма 1. *(А.О. Гельфонд).*
При любых вещественных α справедлива оценка

$$|\sum_{n\leqslant X}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}|\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}X^{\lambda_0},$$

$\lambda_0=\log_4 3=0.7924\ldots.$

Доказательство см. в [7].

Лемма 2. *Пусть*

$$S(\alpha)=\sum_{n\leqslant 2^{2Q}-1}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^1 |S(\alpha)|d\alpha\leqslant 2^{Q\theta_0},$$

где $\theta_0=\log_2\sqrt{2+\sqrt{2}}=0.8857\ldots.$

Доказательство см. в [8].

Лемма 3. *Пусть*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\ \ (a,\,q)=1,\ \ q\geqslant 1,\ \ |q|\leqslant 1.$$

Тогда при любом β, $U>0$, $P\geqslant 1$ имеем

$$\sum_{x=1}^{P}\min\Big(U,\frac{1}{\parallel\alpha x+\beta\parallel}\Big)\leqslant 6\Big(\frac{P}{q}+1\Big)(U+q\log q).$$

Доказательство см. в [13, гл. VI].

Лемма 4. *Пусть a_n — произвольные комплексные числа такие, что при $a<n\leqslant b$, $|a_n|\leqslant 1$. Пусть q — натуральное число, $q\leqslant b-a$. Тогда*

$$\Big|\sum_{a<n\leqslant b}a_n\Big|\ll\frac{b-a}{\sqrt{q}}+\Big\{\frac{b-a}{q}\sum_{r=1}^{q-1}\Big|\sum_{a<n\leqslant b-r}a_n\overline{a_{n+r}}\Big|\Big\}^{1/2}.$$

Доказательство дословно повторяется доказательство леммы 3 в [14, Приложение, §11].

Лемма 5. *(П. К. Галлахер). Пусть $S(t)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[t_0, t_k]$ функция, $t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k$. Тогда, полагая $\delta = \min\limits_{0\leqslant r<k}(t_{r+1}-t_r)$, будем иметь*

$$\sum_{r=1}^{k}|S(t_r)| \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_k}|S(t)|\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k}|S'(t)|\,dt.$$

Доказательство см. [15, глава 1].

Лемма 6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Справедлива оценка*

$$2^{-k}\sum_{r=0}^{2^k-1}\left|\sum_{x=0}^{2^k-1}\varepsilon(x)e^{2\pi i\frac{rx}{2^k}}\right| \ll 2^{\frac{\theta_0 k}{2}}k,$$

где θ_0 — константа из леммы 2.

Доказательство. Применяем лемму 5, положив в ней

$$S(t) = \sum_{x=0}^{2^k-1}\varepsilon(x)e^{2\pi itx}, \quad t_r = \frac{r}{2^k}, \;\; \delta = 2^{-k}.$$

Тогда

$$S'(t) = 2\pi i\sum_{x=0}^{2^k-1}x\varepsilon(x)e^{2\pi itx},$$

Следовательно,

$$2^{-k}\sum_{r=0}^{2^k-1}\left|\sum_{x=0}^{2^k-1}\varepsilon(x)e^{2\pi irx2^{-k}}\right| = 2^{-k}\sum_{r=0}^{2^k-1}|S(t_r)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1|S(t)|\,dt + 2^{-k}\int_0^1|S'(t)|\,dt.$$

Оценим интеграл:

$$\int_0^1|S'(t)|dt.$$

После применения преобразования Абеля получим

$$\int_0^1|S'(t)|dt \leqslant 2\pi\int_0^{2^k-1}\int_0^1|\sum_{0\leqslant x\leqslant u}\varepsilon(x)e^{2\pi ixt}|dt\,du+$$

$$+2\pi\int_0^1|\sum_{0\leqslant x\leqslant 2^k-1}\varepsilon(x)e^{2\pi ixt}|dt.$$

Воспользуемся тождеством

$$\sum_{0\leqslant x\leqslant u}\varepsilon(x)e^{2\pi ixt} = \sum_{0\leqslant x\leqslant 2^k-1}\varepsilon(x)e^{2\pi ixt}\frac{1}{2^k}\sum_{0\leqslant y\leqslant u}\sum_{b=0}^{2^k-1}e^{2\pi ib(x-y)2^{-k}};$$

получим

$$\int_0^1|S'(t)|dt \leqslant \frac{2\pi}{2^k}\int_0^{2^k-1}\sum_{b=0}^{2^k-1}\int_0^1|\sum_{0\leqslant y\leqslant u}e^{-2\pi iby2^{-k}}||\sum_{0\leqslant x\leqslant 2^k-1}\varepsilon(x)e^{2\pi ix(t+b2^{-k})}|dt\,du+$$

$$+2\pi\int_0^1 |\sum_{0\leqslant x\leqslant 2^k-1}\varepsilon(x)e^{2\pi ixt}|dt.$$

Отсюда, из неравенства

$$|\sum_{0\leqslant y\leqslant u} e^{-2\pi iby2^{-k}}| \ll \frac{2^k}{|b|+1}$$

и из периодичности с периодом 1 функции $S(t)$ следует, что

$$\int_0^1 |S'(t)|dt \ll 2^k\sum_{b=0}^{2^k-1}\frac{1}{|b|+1}\int_0^1 |S(t)|dt.$$

Если k — четное число, то из леммы 2 имеем

$$\int_0^1 |S'(t)|dt \ll 2^k k 2^{(k\theta_0)/2}. \tag{2}$$

Если k — нечетное число, $k = 2k_1+1$, то поскольку

$$S(t) = \sum_{0\leqslant x<2^{2k_1}-1}\varepsilon(x)e^{2\pi ixt} + \sum_{0\leqslant x<2^{2k_1}-1}\varepsilon(x+2^{k_1})e^{2\pi ixt}\cdot e^{2\pi i2^{2k_1}t},$$

$\varepsilon(x+2^{k_1}) = -\varepsilon(x)$, вновь применяя лемму 2, получаем и в этом случае неравенство (2).

Наконец, применяя указанным способом лемму 2 к интегралу

$$\int_0^1 |S(t)|dt,$$

завершаем доказательство леммы 6.

Лемма 7. *Пусть k и t — целые числа, $0\leqslant t\leqslant k$. Пусть при $m\in\mathbb{N}$*

$$\hat\varepsilon_m(r) = 2^{-m}\sum_{x=0}^{2^m-1}\varepsilon(xm)e^{-2\pi irx2^{-m}}$$

и пусть a — произвольное число из промежутка $[0,\, 2^k-1]$. Тогда

$$\sum_{\substack{r=0\\ r\equiv a \pmod{2^t}}}^{2^k-1} |\hat\varepsilon_k(r)| \ll 2^{\theta_0(k-t)/2}|\hat\varepsilon_t(a)|\,k,$$

где θ_0 — константа из леммы 2.

Доказательство. По определению имеем

$$\sum_{\substack{r=0\\ r\equiv a \pmod{2^t}}}^{2^k-1} |\hat\varepsilon_k(r)| = 2^{-k}\sum_{r \pmod{2^{k-t}}}\left|\sum_{x=0}^{2^k-1}\varepsilon(x)e^{2\pi i\frac{a+2^tr}{2^k}x}\right| =$$

$$= 2^{-k}\sum_{r \pmod{2^{k-t}}}\left|\sum_{x=0}^{2^{k-t}-1}\sum_{y=0}^{2^t-1}\varepsilon(x+2^{k-t}y)e^{2\pi i\frac{a+2^tr}{2^k}(x+2^{k-t}y)}\right|.$$

Поскольку $\varepsilon(x+2^{k-t}y)=\varepsilon(x)\varepsilon(y)$, имеем

$$\sum_{\substack{r=0\\ r\equiv a(\mod 2^t)}}^{2^k-1}|\hat{\varepsilon}_k(r)|=2^{-(k-t)}\sum_{r(\mod 2^{k-t})}\left|\sum_{x=0}^{2^{k-t}-1}\varepsilon(x)e^{2\pi i\left(\frac{r}{2^{k-t}}+\frac{a}{2^k}\right)x}\right|\left|2^{-t}\sum_{y=0}^{2^t-1}\varepsilon(y)e^{2\pi i\frac{ay}{t}}\right|=$$

$$=2^{-(k-t)}\sum_{r(\mod 2^{k-t})}\left|\sum_{x=0}^{2^{k-t}-1}\varepsilon(x)e^{2\pi i\left(\frac{r}{2^{k-t}}+\frac{a}{2^k}\right)x}\right||\hat{\varepsilon}_t(a)|.$$

Сумма в правой части последнего неравенства оценивается точно так же, как аналогичная сумма из леммы 6.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть

$$S=\sum_{n\leqslant X}\varepsilon(n)\tau_k(n).$$

Разобьем сумму S на не более чем $O(\ln^k X)$ сумм вида

$$S(X_1,X_2,\dots,X_k)=\sum_{X_1\leqslant x_1<2X_1}\dots\sum_{\substack{X_k\leqslant x_k<2X_k\\ x_1,x_2,\dots,x_k\leqslant X}}\varepsilon(x_1x_2\cdots x_k)$$

и рассмотрим одну из них.

Считаем, что $X_j\geqslant 1$, $j=1,2,\dots,k$, и предполагаем выполненным неравенство

$$X_1\cdot X_2\cdots X_k<X$$

Без ограничения общности считаем, что

$$X_1\leqslant X_2\leqslant\ldots\leqslant X_k.$$

Рассмотрим три возможных случая.

1° Пусть $X_k>X^{0.8}$. Тогда

$$X_1\cdot X_2\cdots X_{k-1}<X^{0.2},$$

следовательно

$$|S(X_1,X_2,\dots,X_k)|\leqslant\sum_{d\leqslant X^{0.2}}\tau_{k-1}(d)|\sum_{\substack{X_kd\leqslant dx\leqslant 2X_kd\\ dx\leqslant X}}\varepsilon(dx)|. \tag{3}$$

2° $X^{0.1}<X_k\leqslant X^{0.8}$.

Пусть

$$\tau'_{k-1}(d)=\sum_{X_1\leqslant x_1<2X_1}\dots\sum_{X_{k-1}\leqslant x_{k-1}<2X_{k-1}}1.$$

Тогда в случае 2° имеем

$$S(X_1,X_2,\dots,X_k)=\sum_{Y\leqslant y<2^{k-1}Y}\tau'_{k-1}(y)\sum_{\substack{X_k<x\leqslant 2X_k\\ xy\leqslant X}}\varepsilon(xy),$$

где $Y=X_1\cdot X_2\cdots X_{k-1}$.

Пусть $Y \leqslant X_k$, тогда

$$S(X_1, X_2, \ldots, X_k) \ll X^{\varepsilon} \sum_{Y<y\leqslant 2^{k-1}Y} |\sum_{\substack{X_k<x\leqslant 2X_k \\ xy\leqslant X}} \varepsilon(xy)|.$$

Заметим, что если $Y < X^{0.1}$, то так как $X_k \leqslant X^{0.8}$, тривиальная оценка приводит к неравенству

$$|S(X_1, X_2, \ldots, X_k)| \ll X^{0.9+\varepsilon}.$$

Поэтому можно считать, что

$$X^{0.1} < Y \leqslant \sqrt{X}. \tag{4}$$

Неравенство $Y \leqslant \sqrt{X}$ следует из неравенств $X_kY < X$, $Y \leqslant X_k$

Если же $X_k < Y$, то меняя названия переменных, получаем

$$|S(X_1, X_2, \ldots, X_k)| \ll \sum_{Y<y\leqslant 2Y} |\sum_{\substack{X_k\leqslant x<2^{k-1}X_k \\ xy\leqslant X}} \tau'_{k-1}(x)\varepsilon(xy)|,$$

где Y удовлетворяет неравенству (4).

Тем самим получаем, что в случае 2° достаточно оценить сумму $S_2(X_k, Y)$ вида

$$S_1(X_k, Y) = X^{\varepsilon} \sum_{Y\leqslant y<Y'} |\sum_{X_k\leqslant x<X'_k} b_x\varepsilon(xy)| = X^{\varepsilon} S_2(X_k, Y), \tag{5}$$

$X_k < X'_k \ll X_k$, $X^{0.1} < Y \ll \sqrt{X}$, $|b_x| \ll X^{\varepsilon}$, $X_kY \leqslant X$.

3° Пусть $X_k \leqslant X^{0.1}$. Тогда $k \geqslant 10$, так как иначе, оценивая $S(X_1, \ldots, X_k)$ тривиально, приходим к неравенству

$$|S(X_1, X_2, \ldots, X_k)| \ll X^{0.9+\varepsilon}. \tag{6}$$

Пусть m — наибольшее натуральное число такое, что

$$X_1X_2\cdots X_m \leqslant \sqrt{X}.$$

Без ограничения общности считаем, что $1 \leqslant m \leqslant k-1$ (иначе тривиально приходим к (6)). Заметим также, что из

$$X_1X_2\cdots X_m \leqslant \sqrt{X}, \quad X_1X_2\cdots X_mX_{m+1} > \sqrt{X} \text{ и } X_{m+1} \leqslant X_k \leqslant X^{0.1}$$

следует, что

$$X^{0.4} < X_1X_2\ldots X_m \leqslant \sqrt{X}.$$

Введем обозначения $y = x_1\cdots x_m$, $x = x_{m+1}\cdots x_k$,

$$\tau'_t(y) = \sum_{X_1\leqslant x_1<2X_1} \cdots \sum_{\substack{X_m\leqslant x_m<2X_m \\ x_1\cdots x_m=y}} 1,$$

$$\tau'_{k-m}(x) = \sum_{X_{m+1}\leqslant x_{m+1}<2X_{m+1}} \cdots \sum_{\substack{X_k\leqslant x_k<2X_k \\ x_{m+1}\cdots x_k=x}} 1.$$

Тогда получим

$$|S(X_1, X_2, \ldots, X_k)| \leqslant \sum_{Y\leqslant y<2^{k-1}Y} \tau_m(y)|\sum_{\substack{Z\leqslant z\leqslant Z' \\ yz\leqslant X}} \tau'_{k-m}(z)\varepsilon(yz)|,$$

где $Z = Z_{m+1} \cdots Z_k$, $X^{0.4} < Y \leqslant X^{0.5}$, $YZ \leqslant X$, $Z' \ll Z$.

Поскольку $\tau_m(y) \ll X^{\varepsilon}$, то и в случае 3° мы пришли к тому, что достаточно оценить сумму того же типа, что и в случае 2° (см. (5)).

Вернемся к случаю 1° и оценим сумму (3).

Пусть $X' = X_k d$, $X'' = \min(2X', X)$.

Оценим при фиксированном d сумму

$$\sum_{X' \leqslant dx < X''} \varepsilon(dx).$$

Имеем

$$\sum_{X' \leqslant dx < X''} \varepsilon(dx) = \sum_{X' \leqslant x < X''} \varepsilon(x) \frac{1}{d} \sum_{b=1}^{d} e^{2\pi i \frac{xb}{d}} =$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{b=1}^{d} \sum_{X' \leqslant x < X''} \varepsilon(x) e^{2\pi i \frac{xb}{d}}.$$

Отсюда, применяя оценку Гельфонда, получаем

$$\Big| \sum_{X' \leqslant dx < X''} \varepsilon(dx) \Big| \ll X^{\lambda_0},$$

где $\lambda_0 = 0.792...$ (см. [7]).

Теперь в случае 1° имеем оценку

$$S(X_1, X_2, \ldots, X_k) \ll X^{0.2+\lambda_0+\varepsilon} \ll X^{1-\eta_1},$$

где $\eta_1 > 0$.

Пусть теперь выполняется один из случаев 2° или 3°. Оценим сумму (5).

Применим неравенство Коши:

$$S_2^2(X_k, Y) \ll Y \sum_{Y < y \leqslant Y'} \Big| \sum_{X_k \leqslant x < X_k'} b_x \varepsilon(xy) \Big|^2.$$

Пусть $H = [X^{\rho}]$, где $0 < \rho < 10^{-3}$ — малый параметр, который будет выбран позже.

Применим лемму 4:

$$\Big| \sum_{X_k \leqslant x < X_k'} b_x \varepsilon(xy) \Big|^2 \ll \frac{X_k}{H} \sum_{|h| \leqslant H} \left(1 - \frac{|h|}{H}\right) \sum_{\substack{X_k \leqslant x < X_k' \\ X_k \leqslant x+h < X_k'}} b_x \, b_{x+h} \varepsilon(xy) \varepsilon(xy + hy).$$

Вклад $h = 0$ оценивается как $O\big(\frac{X_k^2}{H}\big)$, поэтому

$$S_2^2(X_k, Y) \ll \frac{X^{1+\varepsilon}}{H} \sum_{h=1}^{H} \sum_{X_k \leqslant x < X_k'} \Big| \sum_{Y \leqslant y < Y'} \varepsilon(xy) \varepsilon(xy + hy) \Big| + \frac{X^2}{H}.$$

Зафиксируем $h \in [1, H]$. Теперь достаточно доказать, что

$$S_3(X_k, Y) = \sum_{X_k \leqslant x < X_k'} \Big| \sum_{Y \leqslant y < Y'} \varepsilon(xy) \varepsilon(xy + hy) \Big| \ll X^{1-\eta}.$$

Выберем натуральное число λ из неравенств

$$2^{\lambda-1} < Y\,X^{2\rho} \leqslant 2^{\lambda}.$$

Введем символом $\varepsilon_\lambda(n)$:

$$\varepsilon_\lambda(n) = \begin{cases} 1, & \text{если сумма первых } \lambda \text{ двоичных цифр } n \text{ четная;} \\ -1, & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Докажем, что тогда

$$S_3(X_k, Y) \leqslant \sum_{X_k \leqslant x < X_k'} |\sum_{Y \leqslant y < Y'} \varepsilon(xy)\varepsilon(xy + hy)| + X^{1-\rho+\varepsilon}.$$

Поделим xy на 2^λ с остатком:

$$xy = 2^\lambda\, q + r, \quad 0 \leqslant r < 2^\lambda.$$

Если $r < 2^\lambda - 2^{k-1}YH$, то тогда

$$xy + yh = 2^\lambda q + r + yh, \quad 0 < r + yh < 2^\lambda.$$

Для таких xy имеем

$$\varepsilon(xy)\varepsilon(xy + hy) = \varepsilon(2^\lambda q + r)\varepsilon(2^\lambda q + r + yh) =$$

$$= \varepsilon(r)\varepsilon(r + yh) = \varepsilon_\lambda(xy)\varepsilon_\lambda(xy + hy).$$

Число пар (x, y), для которых остаток от деления xy на 2^λ лежит между $2^\lambda - 2^{k-1}YH$ и $2^\lambda - 1$, есть

$$O(X2^{-\lambda}YHX^\varepsilon) = O(X^{1-\rho+\varepsilon}).$$

Перейдем к оценке

$$S_4(X_k, Y) = \sum_{X_k \leqslant x < X_k'} |\sum_{Y \leqslant y < 2Y} \varepsilon_\lambda(xy)\varepsilon_\lambda(xy + hy)|.$$

Введем для символа $\varepsilon_\lambda(r)$ дискретное преобразование Фурье:

$$\widehat{\varepsilon}_\lambda(r) = 2^{-\lambda} \sum_{l=0}^{2^\lambda - 1} \varepsilon_\lambda(l) e^{-2\pi i \frac{rl}{2^\lambda}}.$$

Отметим, что в последней сумме $\varepsilon_\lambda(l)$ можно заменить на $\varepsilon(l)$.

По определению имеем

$$\varepsilon_\lambda(xy) = \sum_{r=0}^{2^\lambda - 1} \widehat{\varepsilon}_\lambda(r) e^{2\pi i \frac{rxy}{2^\lambda}},$$

$$\varepsilon_\lambda(xy + yh) = \sum_{s=0}^{2^\lambda - 1} \widehat{\varepsilon}_\lambda(s) e^{2\pi i \frac{s(xy+yh)}{2^\lambda}}.$$

Суммируя получившиеся линейные суммы по y, получаем неравенство

$$S_4(X_k, Y) \leqslant \sum_{r=0}^{2^\lambda - 1} \sum_{s=0}^{2^\lambda - 1} |\widehat{\varepsilon}_\lambda(r)||\widehat{\varepsilon}_\lambda(s)| \times$$

$$\times \sum_{X_k \leqslant x < X'_k} \min\Big(Y, \Big\|\frac{r+s}{2^\lambda}x + \frac{hs}{2^\lambda}\Big\|^{-1}\Big).$$

Пусть t — целое неотрицательное число такое, что $2^t\|(r+s)$.

Пусть сначала $0 \leqslant t \leqslant \lambda - 120\rho\log_2 X$.

Заметим, что из неравенства $2^\lambda > Y \geqslant X^{1/10}$ следует, что $\lambda > 0.1\log_2 X$. Применим к сумме

$$\sum_{X_k \leqslant x < X'_k} \min\Big(Y, \Big\|\frac{r+s}{2^\lambda}x + \frac{hs}{2^\lambda}\Big\|^{-1}\Big).$$

лемму 3, положив в ней $q = 2^{\lambda-t}$, $\alpha = \frac{r+s}{2^\lambda}$, $\beta = \frac{sh}{2^\lambda}$;

$$\sum_{X_k \leqslant x < X'_k} \min\Big(Y, \Big\|\frac{r+s}{2^\lambda}x + \frac{hs}{2^\lambda}\Big\|^{-1}\Big) \ll \Big(\frac{X_k}{2^{\lambda-t}} + 1\Big)\Big(Y + \lambda\, 2^{\lambda-t}\Big).$$

Упростим правую часть полученного неравенства.

Имеем

$$\frac{X_k}{2^{\lambda-t}} + 1 < \frac{X_k X^{2\rho}}{2^{\lambda-t}} + 1 \leqslant 2\frac{X_k X^{2\rho}}{2^{\lambda-t}};$$

$$Y + \lambda 2^{\lambda-t} < YX^{2\rho} + \lambda 2^{\lambda-t} < 2YX^{3\rho};$$

таким образом,

$$\left(\frac{X_k}{2^{\lambda-t}} + 1\right)\left(Y + \lambda 2^{\lambda-t}\right) \ll X^{1+5\rho}2^{-(\lambda-t)};$$

$$\sum_{X_k \leqslant x < X'_k} \min\Big(Y, \Big\|\frac{r+s}{2^\lambda}x + \frac{hs}{2^\lambda}\Big\|^{-1}\Big) \ll X^{1+5\rho}2^{-(\lambda-t)}.$$

Теперь, пользуясь леммой 7 оценим сумму

$$\sum_{r=0}^{2^\lambda-1} \sum_{s=0,2^t\|(r+s)}^{2^\lambda-1} |\widehat{\varepsilon}_\lambda(r)||\widehat{\varepsilon}_\lambda(s)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{a=0}^{2^\lambda-1} \sum_{\substack{r=0\\ r\equiv a \pmod{2^t}}}^{2^\lambda-1} |\widehat{\varepsilon}_\lambda(r)| \sum_{\substack{s=0\\ s\equiv -a \pmod{2^t}}}^{2^\lambda-1} |\widehat{\varepsilon}_\lambda(s)|$$

$$\leqslant 2^{\theta_0(\lambda-t)}\log^2 X \sum_{a=0}^{2^\lambda-1} |\widehat{\varepsilon}_\lambda(a)|^2 = 2^{\theta_0(\lambda-t)}\log^2 X.$$

В рассматриваемом случае получена оценка

$$S_4(X_k, Y) \ll X^{1+6\rho}2^{-(1-\theta_0)(\lambda-t)}.$$

Поскольку $\lambda - t \geqslant 120\rho\log_2 X$, $1-\theta_0 > 0.1$, имеем

$$S_4(X_k, Y) \ll X^{1+6\rho-12\rho} < X^{1-\rho}.$$

Осталось рассмотреть случай

$$\lambda - 120\rho\log_2 X < t \leqslant \lambda.$$

Имеем:

$$S_4(X_k,Y) \leqslant \sum_{X_k \leqslant x < X'} \sum_{r=0}^{2^\lambda-1} \sum_{s=0, 2^t \| (r+s)}^{2^\lambda-1} |\widehat{\varepsilon}_\lambda(r)||\widehat{\varepsilon}_\lambda(s)| \min\left(Y, \left\| \frac{r+s}{2^\lambda}x + \frac{hs}{2^\lambda}\right\|^{-1}\right) =$$

$$= \sum_{X_k \leqslant x < X'} \sum_{r_2=0}^{2^{\lambda-t}-1} \sum_{s_2=0}^{2^{\lambda-t}-1} \sum_{r_1=0}^{2^t-1} \sum_{\substack{s_1=0 \\ r_1+s_1 \equiv 0 (\mod 2^t)}}^{2^t-1} |\widehat{\varepsilon}_\lambda(r_1+2^t r_2)||\widehat{\varepsilon}_\lambda(s_1+2^t s_2)| \times$$

$$\times \min\left(Y, \left\| \frac{r_1+s_1+2^t(r_2+s_2)}{2^k}x + \frac{s_1+2^t s_2}{2^k}\right\|^{-1}\right).$$

При $0 \leqslant s_1, r_1 < 2^t$ из сравнения $r_1+s_1 \equiv 0(\mod 2^t)$ следует, что либо $r_1 = s_1 = 0$, либо $r_1+s_1 = 2^t$.

Отсюда и из леммы 1 получаем, что

$$S_4(X_k,Y) \ll 2^{-2\lambda(1-\lambda_0)} \sum_{X_k \leqslant x < X'} \sum_{s_2=0}^{2^{\lambda-t}-1} \sum_{r_2=0}^{2^{\lambda-t}-1} \sum_{s_1=0}^{2^t-1} \min\left(Y, \left\| \frac{hs_1}{2^\lambda}x + \beta\right\|^{-1}\right) +$$

$$+ X 2^{-2\lambda(1-\lambda_0)} 2^{2(\lambda-t)}, \tag{7}$$

где

$$\beta = \frac{1+r_2+s_2}{2^{\lambda-t}}x + \frac{hs_2}{2^{\lambda-t}}.$$

Пусть $\frac{hs_1}{2^\lambda} = \frac{h_1 s_1}{2^{\lambda_1}}$, где $\frac{h_1}{2^{\lambda_1}}$ — несократимая дробь. Так как

$$2^{-\lambda_1} \leqslant 2^{-\lambda} X^\rho, \quad Y + \lambda_1 2^{\lambda_1} \ll Y\, X^{3\rho}$$

имеем

$$\sum_{s_1=0}^{2^t-1} \min\left(Y, \left\| \frac{hs_1}{2^\lambda}x + \beta\right\|^{-1}\right) \ll Y\, X^{5\rho}.$$

Подставим это неравенство в (7):

$$S_4(X_k,Y) \ll X^{1+5\rho} 2^{2(\lambda-t)} 2^{-2\lambda(1-\lambda_0)}.$$

Отсюда, поскольку

$$2^{2(\lambda-t)} \leqslant 2^{240\rho \log_2 X} = X^{240\rho}, \ 2^{2\lambda} \geqslant (Y X^{-2\rho})^2 > X^{0.2-4\rho},$$

при достаточна малых ρ имеем

$$S_4(X_k,Y) \ll X^{1-\rho}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 1 прямо следует из теоремы 2, поскольку

$$\sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \in \mathbb{N}_0}} \tau_k(n) = \sum_{n \leqslant X} \frac{1+\varepsilon(n)}{2} \tau_k(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \leqslant X} \tau_k(n) + O(X^{1-\eta}).$$

4. Заключение

В работе решена обобщенная проблема делителей с натуральными числами, имеющими двоичные разложения специального вида.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Diriclet L. Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie// Abh. Akad Berlin (Werke 2, 49 - 66), 1849, Math. Abh., 69–83.

2. Voronoi G. Sur un probléme du calcul des fonctions asymptitiques//J. Fur die reine und angewandte, Math., 1903, 126, 241–282.

3. Landau E. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Nacher//K. Gas. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klassen, 1912, 6, 687–771.

4. Hardy G., Littlewood J. The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz//Proc. London Maht. Soc. 2, 1922, 21, 39–74.

5. D. R. Heath-Brown, Recent Progress in Analytic Number Theory//Symposium Durham, 1979, v.1 London: Academic Press. 1981.

6. Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле//Изв. АН СССР, Сер. матем., 1972, 36:3, 475–483.

7. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données//Acta Arith. 1968. Vol. XII. P. 259-265.

8. Эминян К. М. О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел//Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:3 1991, 680-686.

9. Эминян К. М. Проблема Гольдбаха в простых числах с двоичными разложениями специального вида//Изв. РАН. Сер. матем., 78:1 2014, 215-224.

10. Эминян К. М. О средних значениях функции $\tau_k(n)$ в некоторых последовательностях натуральных чисел//Мат. заметки, Том 90 выпуск 3 сентябрь 2011.

11. Mauduit C. et Rivat J. Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers//Annals of Mathematics. Second Series. 2010. V. 171. No 3, 1591-1646.

12. Green B. Three topics in additive prime number theory // Current Developments in Mathematics, Vol. 2007 (2009), 1-41.

13. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983.

14. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.

15. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Мир, 1974.

REFERENCES

1. Diriclet L. 1849, "Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie". Abh. Akad Berlin (Werke 2, 49 - 66), Math. Abh., 69-83.
2. Voronoi G. 1903, "Sur un probléme du calcul des fonctions asymptitiques", J. Fur die reine und angewandte, Math., 126, 241–282.
3. Landau E. 1912, "Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen". Nacher. K. Gas. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klassen, 6, 687–771.
4. Hardy G., Littlewood J. 1922, "The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz", Proc. London Maht. Soc. 2, 21, 39–74.
5. D.R. Heath-Brown. 1981, "Recent Progress in Analytic Number Theory", Symposium Durham, v.1 London: Academic Press.
6. Карацуба А.А. 1972, "Uniform approximation of the remainder term in the Dirichlet divisor problem", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 36:3, 475-483
7. Gelfond, A.O. 1968, "Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données" *Acta Arith.* vol. XII. pp. 259-265.
8. Eminyan, K. M. 1991, "On the Dirichlet divisor problem in some sequences of natural numbers", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 55:3, pp. 680-686
9. Eminyan, K. M. 2014, "The Goldbach problem with primes having binary expansions of a special form", *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 78:1, pp. 215-224
10. Eminyan, K. M. 2011, "On the Mean Values of the Function $\tau_k(n)$ in Sequences of Natural Numbers", Mat. Zametki, 90:3, 454-463
11. Mauduit, C. et Rivat, J. 2010, "Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers", *Annals of Mathematics.* Second Series. vol. 171. No 3, pp. 1591-1646.
12. Green, B. 2009, "Three topics in additive prime number theory", *Current Developments in Mathematics*, vol. 2007, pp.1-41.
13. Karatsuba, A. A. 1983, Osnovy analiticheskoi teorii chisel (Russian), [Fundamentals of the analytical number theory]. Second edition. Nauka, Moscow. 240 p.
14. Voronin, S. M.; Karatsuba, A. A. 1994, *Dzeta-funktsiya Rimana.* (Russian) [The Riemann zeta function] Fiziko-Matematicheskaya Literatura, Moscow,. 376 p.
15. Montgomery, H.L. 1971, *Topics in multiplicative nunmber theory.* Springer.

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана.
Финансовый университет при Правительстве РФ.
Получено 18.12.2015
Принято в печать 11.03.2016