ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 517.9 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-438-446

О средних тригонометрических сумм по решениям квадратичных сравнений

В. А. Быковский, И. Ю. Реброва

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: bykovskyva@tolstovsky.ru
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: rebrova@tolstovsky.ru

Аннотация

В 1963 году Хоули [1] (см. также [2]), опираясь на оценки средних тригонометрических сумм по решениям квадратичных сравнений, впервые доказал асимптотическую формулу для средних числа делителей квадратичного полинома со степенным понижением в остаточном члене. Позднее эти результаты были усилены в работах [3] и [4]. В настоящей работе мы доказываем более сильные результаты на эту тему.

Ключевые слова: тригонометрические суммы, квадратичные сравнения.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Быковский В. А., Реброва И. Ю. О средних тригонометрических сумм по решениям квадратичных сравнений // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 438–446.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 517.9 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-438-446

On the average trigonometric sums for solutions of quadratic comparisons

V. A. Bykovskii, I. Yu. Rebrova

Bykovskii Viktor Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: bykovskyva@tolstovsky.ru
Rebrova Irina Yur'evna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: rebrova@tolstovsky.ru

Abstract

In 1963, Hawley [1] (see also [2]), based on estimates of average trigonometric sums from solutions of quadratic comparisons, proved for the first time an asymptotic formula for the average number of divisors of a quadratic polynomial with a power-law decrease in the residual term. These results were later reinforced in [3] and [4]. In the present paper, we prove stronger results on this topic.

Keywords: trigonometric sums, quadratic comparisons.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
Bykovskii, V. A., Rebrova, I. Yu. 2025, "On the average trigonometric sums for solutions of quadratic comparisons" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 438–446.

Пусть d и q — натуральные числа. Для целого a

$$\delta_q(a) = \frac{1}{q} \sum_{b(\mathrm{mod}\, q)} e^{2\pi i \frac{ab}{q}} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \equiv 0(\mathrm{mod}\, q), \\ 0, & \text{если} \quad a \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, q) \end{cases}$$

— символ Коробова. Далее, для целого m

$$\rho_d(m;q) = \sum_{b(\mathrm{mod}\, 2q)} \delta_{4q}(b^2+d) e^{2\pi i \frac{mb}{2q}}$$

— тригонометрическая сумма по решениям сравнения

$$b^2 + d \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4q).$$

Так как $b^2 \equiv 0, 1(\mathrm{mod}\ 4)$ для любого целого b, то сравнение

$$b^2 + d \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$$

разрешимо только для

$$d \equiv 0, -1(\mathrm{mod}\ 4).$$

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только такие d.

Для доказательства асимптотической формулы Хоули использовал оценку ($m \neq 0$)

$$\sum_{0<q\leq P} \rho_d(m;q) \underset{\varepsilon,d}{\ll} P^{\frac{3}{4}+\varepsilon} + |m|^{\frac{4}{5}+\varepsilon}.$$

При этом он опирался на оценки А. Вейля сумм Клостермана. Позднее, в работе [3] метод Хоули был усовершенствован и показатель степени $\frac{7}{8}+\varepsilon$ в асимптотической формуле для среднего числа делителей квадратичного полинома был заменен на $\frac{5}{6}+\varepsilon$.

В работе [4] был предложен новый метод исследования рассматриваемого круга задач, опирающийся на спектральную теорию автоморфных функций. В ней и последующих публикациях автора и других специалистов были получены принципиально новые результаты на вышеупомянутые темы, а также в других задачах аналитической теории чисел.

Через $GL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ обычно обозначают мультипликативную группу матриц

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}; \quad \det(M) > 0.$$

Ее подгруппа $SL_2(\mathbb{R})$ состоит из матриц с $\det(M) = 1$. Соответственно, $SL_2(\mathbb{Z})$ — подгруппа $GL_2^{(+)}(\mathbb{R})$, состоящая из матриц с целочисленными элементами, для которых $\det(M) = 1$. Группа $GL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ действует на верхней полуплоскости

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R};\ y > 0\}$$

посредством дробно-линейных преобразований

$$z \ \to \ M(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Это левое действие по причине того, что

$$(M_1M_2)(z) = M_1(M_2(z)).$$

Функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ называется автоморфной относительно $SL_2(\mathbb{Z})$, если при всех z из $\mathbb{H}$ и для любого элемента M из $SL_2(\mathbb{Z})$ выполняется равенство

$$(f|M)(z) = f(M(z)) = f(z).$$

Обозначение $f|M$ удобно тем, что

$$f(M_1M_2(z)) = f(M_1(M_2(z))) = f|M_1(M_2(z)) = f(f|M_1)|M_2(z).$$

При этом говорят, что $GL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ действует справа на пространстве функций $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, имея в виду равенство

$$f|(M_1M_2) = (f|M_1)|M_2.$$

Инвариантный относительно $GL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ оператор Лапласа-Бельтрами имеет вид

$$\triangle = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Это означает, что для любой матрицы M выполняется равенство

$$\triangle(f|M) = (\triangle f)|M.$$

Также инвариантные относительно действия $GL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ метрика ds^2 и мера $d\mu$ на $\mathbb{H}$ определяются по формулам

$$ds^2(z) = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad d\mu(z) = \frac{dxdy}{y^2}.$$

Четверка

$$(\mathbb{H}, SL_2(\mathbb{R}), ds^2, d\mu)$$

определяет модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Так как матрицы M и $-M$ действуют на $\mathbb{H}$ одинаково, то удобно работать с фактор-группой

$$PSL_2(\mathbb{R}) = \{\pm M;\ M \in SL_2(\mathbb{R}\} = SL_2(\mathbb{R})/\left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

и, соответственно с

$$\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Обозначим через $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d)$ множество всех положительно определенных квадратичных форм

$$Q(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

отрицательного дискриминанта

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = -d$$

с вещественными коэффициентами α, β, γ. Положительность означает, что $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$. Группа $PGL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ действует на $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d)$ по правилу $Q \to MQ$, где

$$M(Q)(x,y) = (x,y)M^t \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix} M(x,y)^t$$

— обычное произведение матриц, а знак t означает операцию транспонирования. При этом действие левое, поскольку

$$(M_1M_2)(Q)(x,y) = (x,y)(M_1M_2)^t \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix} (M_1M_2)(x,y)^t$$

и оно соответствует линейной замене переменных для квадратичной формы

$$Q(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \;\to$$

$$\to (MQ)(x,y) = Q(ax+by, cx+dy) = \alpha(M)x^2 + \beta(M)xy + \gamma(M)y^2.$$

При этом

$$(\alpha,\beta,\gamma) \;\to\; M(\alpha,\beta,\gamma) =$$

$$= (\alpha a^2 + \beta ab + \gamma b^2, 2\alpha ab + \beta(ad+bc) + 2\gamma cd, \alpha c^2 + \beta cd + \gamma d^2).$$

П. Лежен Дирихле в своих лекциях по теории чисел (см. [5]) построил взаимно однозначное соответствие между точками из $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d)$ и точками из $\mathbb{H}$ по формуле

$$\mathscr{P}_d(Q) = \mathscr{P}_d(\alpha,\beta,\gamma) = z(Q) = \frac{\beta}{2\gamma} + \frac{\sqrt{d}}{2\gamma} i.$$

При этом, в обратную сторону, каждой точке z из $\mathbb{H}$ соответствует форма

$$Q = <\alpha,\beta,\gamma> = Q(z) = \mathscr{P}_d^{-1}(z) = \left\langle \frac{\sqrt{|d|}}{2}\frac{|z|^2}{Im\, z}, \sqrt{|d|}\frac{Re\, z}{Imz}, \frac{\sqrt{|d|}}{2}\frac{1}{Im\, z} \right\rangle$$

из $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d)$. При этом диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{M} & \mathbb{H} \\ \mathscr{P}_d^{-1}\downarrow & & \downarrow\mathscr{P}_d \\ \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) & \xrightarrow{M} & \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) \end{array}$$

коммутативна относительно действия $PSL_2(\mathbb{R})$ на $\mathbb{H}$ и $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d)$.

Обозначим через $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ фундаментальное множество точек в $\mathbb{H}$, состоящее из объединения двух непересекающихся множеств

$$\left\{ z \in \mathbb{H} \,|\, -\frac{1}{2} < Re\, z < 0,\ |z| > 1 \right\}, \left\{ z \in \mathbb{H} \,|\, 0 \le Re\, z \le \frac{1}{2},\ |z| \ge 1 \right\} \qquad (0.1)$$

Пусть

$$\Gamma_z = \{M \in \Gamma \mid M(z) = z\}$$

— стабилизатор точки $z \in \mathbb{H}$, который всегда конечная подгруппа в Γ. При этом

$$\Gamma_i = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

и для $\rho = \exp(\pi i/3) = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$

$$\Gamma_\rho = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для остальных $z \in \Gamma \setminus \mathbb{H}$ Γ_z состоит из единичной матрицы.

Фундаментальность $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ заключается в том, что

$$\bigcup_{M \in \Gamma} M(\Gamma \setminus \mathbb{H}) = \mathbb{H}$$

и подмножества из левой части попарно не пересекаются.

Множествам из (0.1) соответствует подмножество $\Gamma \setminus \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d)$, выделяемое парой условий:

$$-\gamma < \beta < 0 \quad \text{и} \quad \gamma < \alpha, \quad 0 \le \beta \le \gamma \quad \text{и} \quad \gamma \le \alpha.$$

В таком случае говорят, что форма

$$Q(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

приведена. Множество $\Gamma \setminus \mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$ конечно. Обозначим через $\mathbb{H}(d)$ множество точек из $\mathbb{H}$, которые соответствуют квадратичным формам из $\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$. Далее, множества

$$\Gamma \setminus \mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d),\ \Gamma \setminus \mathbb{H}(d)$$

конечны и количество элементов в первом и втором совпадает с числом классов дискриминанта $-d$.

Определим на линейном пространстве Γ–автоморфных функций $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ линейный функционал

$$\Omega_d(f) = \left(\frac{4}{|d|}\right)^{1/4} \cdot \sum_{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H}(d)} \frac{1}{|\Gamma_z|} f(z).$$

На этом пространстве для любого натурального n действуют операторы Гекке

$$T(n)f(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{n_1 n_2 = n} \sum_{0 \le m < n_2} f\left(\frac{n_1 z + m}{n_2}\right).$$

Они удовлетворяют соотношению мультипликативности

$$T(n_1)T(n_2) = \sum_{l \setminus \text{НОД}(n_1, n_2)} T\left(\frac{n_1 n_2}{l^2}\right),$$

из которого следует, что они коммутируют между собой. Хорошо известно, что

$$\mu(\Gamma \setminus \mathbb{H}) = \iint\limits_{\Gamma \setminus \mathbb{H}} y^{-2} dx dy = \frac{\pi}{3}.$$

Пусть $L_2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ — гильбертово пространство автоморфных функций $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, для которых

$$\iint\limits_{\Gamma\setminus\mathbb{H}} |f(z)|^2 \frac{dxdy}{y^2} < \infty$$

с эрмитовым произведением

$$\langle f, g\rangle = \iint\limits_{\Gamma\setminus\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}\frac{dxdy}{y^2}.$$

Обозначим через $L_2^{(0)}(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ линейное подпространство в $L_2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$, состоящее из функций f с

$$\int\limits_0^1 f(x+iy)dx = 0$$

для почти всех $y \in (0, \infty)$. Из собственных функций оператора $\triangle$ в $L_2^{(0)}(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ можно выбрать ортонормированный базис

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_j(z), \ldots$$

с

$$\triangle f_j = \lambda_j f_j, \quad \frac{1}{4} < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_j \le \ldots$$

При этом

$$\lambda_j = 12j + o(j), \quad j \to \infty.$$

Оператор отражения

$$T_{-1}f(z) = f(-\overline{z})$$

коммутирует с $\triangle$ и операторами Гекке. Поэтому мы можем выбрать такой базис в $L_2^{(0)}(\Gamma \setminus \mathbb{H})$, для которого

$$T_{-1}f_j = \eta_j f_j, \quad \eta_j \in \{-1, 1\} \tag{0.2}$$

и для любого натурального n

$$T(n)f_j = \lambda_j(n) f_j, \quad \lambda_j(n) \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right), \tag{0.3}$$

поскольку операторы Гекке также эрмитовы. Гипотеза Рамануджана-Петерссона утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lambda_j(n) \underset{\varepsilon}{\ll} n^{\varepsilon}.$$

Она не доказана и известна лишь оценка

$$\lambda_j(n) \underset{\varepsilon}{\ll} n^{\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+\varepsilon}.$$

В соответствии со стандартными обозначениями (см. [6])

$$K_s(y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{y}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) t^{s-1}dt$$

— функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя второго рода), экспоненциально убывающая при $y \to \infty$. Принимая во внимание равенство

$$f_j(z+1) = f_j \Big| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (z) = f_j(z),$$

а также (0.2) и (0.3), получим разложение в ряд Фурье

$$f_j(z) = {\sum_{m\in\mathbb{Z}}}' \rho_j(m)\sqrt{y}\, K_{i\chi_j}(2\pi|m|y)\exp^{2\pi imx},$$

с

$$\chi_j = \sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}}.$$

Для натурального m

$$\rho_j(m) = \rho_j(1)\lambda_j(m), \quad \rho_j(-m) = \eta_j\rho_j(m) = \eta_j\rho_j(1)\lambda_j(m).$$

Автоморфная по z функция

$$E(z;s) = \sum_{M\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma} \mathrm{Im}^s(M(z))$$

— ряд Эйзенштейна относительно параболической подгруппы (стабилизатор ∞ в Γ)

$$\Gamma_\infty = \left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1\end{pmatrix} \,|n\in\mathbb{Z}\right\}$$

разлагается в ряд Фурье

$$E(z;s) = y^s + \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)}y^{1-s} +$$

$$+\frac{2\pi^s}{\Gamma(s)\zeta(2s)}{\sum_{m\in\mathbb{Z}}}'\tau_s(|m|)\sqrt{y}\,K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)e^{2\pi imx},$$

где

$$\tau_s(n) = \sum_{n_1n_2=n}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{s-\frac{1}{2}},$$

а $\zeta(s)$ — обычная дзета-функция Римана. Ряд $E(z;s)$ голоморфен по s в полосе $Re\, s\geq\frac{1}{2}$, за исключением точки $s=1$, в которой имеет полюс первого порядка с вычетом

$$Res_1\, E(z;s) = \frac{3}{\pi}.$$

из разложения в ряд Фурье следует, что

$$T_{-1}(E(z;s)) = E(-x+iy;s) = E(x+iy;s) = E(z;s).$$

Так как

$$\triangle(y^s) = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)y^s = s(1-s)y^s,$$

то

$$\triangle E(z;s) = \triangle\left(\sum_{M\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma}\mathrm{Im}^s(M(z))\right) =$$

$$= \sum_{M\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma}\triangle(y^s|M)(z) = s(1-s)E(z;s).$$

То есть, ряд Эйзенштейна — собственная функция оператора $\triangle$ с собственным значением

$$\lambda\left(\frac{1}{2}+it\right) = \frac{1}{4}+t^2\geq\frac{1}{4}.$$

Разложение f из $L_2(\Gamma\setminus\mathbb{H})$ по спектру $\triangle$ (дискретному и нерерывному) имеет вид

$$f(z)=\frac{3}{\pi}\iint\limits_{\Gamma\setminus\mathbb{H}} f(z)\frac{dxdy}{y^2}+\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,f_j\rangle f_j(z)+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\langle f,E\left(\ldots,\frac{1}{2}+it\right)\right\rangle E\left(z,\frac{1}{2}+it\right)dt.$$

Пусть $\psi:\,(0,\infty)\to\mathbb{C}$ — непрерывная функция такая, что для некоторого $\delta>0$

$$\psi(y)\ll y^{\frac{1}{2}+\delta}\,(y\to 0),\quad \psi(y)\ll y^{-\delta}\,(y\to\infty),$$

и для любого вещественного t

$$v(t)=\mathrm{ch}\,\frac{\pi t}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\psi(y)K_{it}(y)\frac{dy}{y}\ll(1+|t|)^{-2-\delta}.$$

Тогда для любого целого $m\neq 0$ и любого $z\in\mathbb{H}$ из формулы разложения по спектру $\triangle$ следует равенство

$$\sum_{M\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma}\mathrm{Im}^{\frac{1}{2}}M(z)\,\psi(2\pi|m|\mathrm{Im}\,M(z))e^{2\pi imReM(z)}=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{v(\chi_j)}{ch\frac{\pi\chi_j}{2}}\overline{\rho_j(m)}\,f_j(z)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{\mathrm{ch}\,\frac{\pi t}{2}}\overline{\left(\frac{\pi^{it}\tau_{\frac{1}{2}+it}(|m|)}{\Gamma(\frac{1}{2}+it)\zeta(1+2it)}\right)}E\left(z;\frac{1}{2}+it\right)dt.$$

Положив

$$\theta(y)=\sqrt{y}\,\psi(y),$$

с помощью функционала Ω_d получаем тождество

$$\sum_{q=1}^{\infty}\theta\left(\frac{\pi|m|\sqrt{d}}{q}\right)\rho_d(m;q)=\sqrt{\pi|m|\sqrt{d}}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{v(\chi_j)}{ch\frac{\pi\chi_j}{2}}\overline{\rho_j(m)}\,\Omega_d(f_j)+$$

$$+\sqrt{\pi|m|\sqrt{d}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{\mathrm{ch}\,\frac{\pi t}{2}}\overline{\left(\frac{\pi^{it}\tau_{\frac{1}{2}+it}(|m|)}{\Gamma(\frac{1}{2}+it)\zeta(1+2it)}\right)}\Omega_d\left(E\left(\ldots,\frac{1}{2}+it\right)\right)dt.$$

Опираясь на результаты работ [7], [8] и действуя стандартным способом, получим усиление ранее полученных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hooley C. On the number of divisors of quadratic polinomials. Acta Math., 1963, V.110, № 1–2, p. 97–114.

2. Hooley C. On the number of divisors of quadratic polinomials. Acta Math., 1963, V.110, № 1–2, p. 97–114 (Русский перевод: сб. Математика, 1968, 12:5, с. 3–18).

3. Быковский В. А. Ассимптотические свойства целых точек (a_1,a_2), удовлетворяющих сравнению $a_1a_2\equiv l(\mathrm{mod}\ q)$. В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1981, т. 112, с. 5–25.

4. Быковский В. А. Об одной формуле суммирования в спектральной теории автоморфных функций и ее применения в аналитической теории чисел. Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 2, с. 275–277.

5. Дирихле П. Лекции по теории чисел. М., Л., 1936, 404 с.

6. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol. 1, 2, McGraw–Hill, — 1953. (Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т. 1 (1973), т. 2 (1974), М., Наука).

7. Conroy B., Iwaniec H. The cubic moment of central values of automorphic L–functions. Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 3, p. 1175–1216.

8. Liu S. and Hasri R. The average of the divisor function over values of quadratic polynomial. Proc. Amer. Math. Soc., 143, 2015, p. 4143–4160.

REFERENCES

1. Hooley, C. 1963, “On the number of divisors of quadratic polynomials”, *Acta Math.*, 110(1–2), 97–114.

2. Hooley, C. 1963, “On the number of divisors of quadratic polynomials”, *Acta Math.*, 110(1–2), 97–114. (Russian translation: collection Mathematics, 1968, 12:5, pp. 3–18.)

3. Bykovsky, V. A. 1981, “Asymptotic properties of integer points (a_1, a_2) satisfying the relation $a_1a_2 \equiv l (\mathrm{mod}\ q)$”, In *Notes of Scientific Seminars of LOMI*, *L.: Nauka*, 112, pp. 5–25.

4. Bykovsky, V. A. 1982, “On a summation formula in the spectral theory of automorphic functions and its applications in analytic number theory”, *Dokl. AN USSR*, 264(2), pp. 275–277.

5. Dirichlet, P. 1936, “Lectures on number theory”, *M*: *Leningrad*, 404 p.

6. Bateman, H., & Erdelyi, A. 1953, “Higher Transcendental Functions”, *McGraw-Hill Book Company*, Vol. 1, 2.

7. Conroy B., Iwaniec H. 2000, “The cubic moment of central values of automorphic L–functions”, *Ann. of Math.* (2) 151, no. 3, pp. 1175-1216.

8. Liu, S., & Hasri, R. 2015, “The average of the divisor function over values of quadratic polynomial”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143, pp. 4143–4160.

Получено: 13.06.2025
Принято в печать: 17.10.2025