ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 511.36 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-419-431

# Оценки линейных форм от значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами

Е. Ю. Юденкова

**Юденкова Екатерина Юрьевна** — Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (г. Москва).
*e-mail: ey@eyudenkova.ru*

**Аннотация**

Доказаны теоремы об оценках линейных форм от значений обобщённых гипергеометрических рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n \, z^n$, среди параметров которых трансцендентные полиадические числа Лиувилля

*Ключевые слова:* бесконечная линейная независимость, полиадические числа Лиувилля, оценки линейных форм.

*Библиография:* 21 название.

**Для цитирования:**
Юденкова Е. Ю. Оценки линейных форм от значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 419–431.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 511.36 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-419-431

# Estimates of linear forms in values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameters

E. Yu. Yudenkova

**Yudenkova Ekaterina Yurjevna** — Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
*e-mail: ey@eyudenkova.ru*

**Abstract**

Theorems are proved concerning estimates of linear forms in values of generalized hypergeometric series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n \, z^n$, among the parameters of which are transcendental $p$-adic Liouville numbers

*Keywords:* infinite linear independence, p-adic Liouville numbers, estimates of linear forms.

*Bibliography:* 21 titles.

**For citation:**
Yudenkova, E. Yu. 2025, "Estimates of linear forms in values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameters", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 419–431.

## 1. Введение

В статье доказываются теоремы, уточняющие результаты статьи [1], и продолжающая работы в направлении, рассмотренном в работах Чирского В.Г. [4], [5], [6], [7]. В этих теоремах установлены оценки линейных форм от значений обобщенных гипергеометрических рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \ldots (\alpha_{m-1})_n \, z^n, \tag{1.1}$$

где символ Похгаммера $\gamma_n$ определяется равенствами $\gamma_0 = 1$ и $\gamma_n = \gamma\,(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)$ при $n\geq 1$.

Дадим необходимые для дальнейшего определения. Они повторяют приведённые в [1] сведения и даны здесь для полноты изложения. Символ $ord_p a$ обозначает степень, в которой простое число $p$ входит в разложение рационального числа $a$ на множители.

$p$-адическая норма рационального числа $a$ определяется равенством $|a|_p = p^{-ord_p a}$. Поле $p$-адических чисел $Q_p$ представляет собой пополнение поля рациональных чисел по $p$-адической норме. Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых $p$-адических чисел по всем простым числам $p$. Элементы $\theta$ кольца целых полиадических чисел можно рассматривать, как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем поле $p$-адических чисел $Q_p$ обозначаем $\theta^{(p)}$.

Бесконечная линейная независимость полиадических чисел $\theta_1, \ldots, \theta_m$ означает, что для любой ненулевой линейной формы $h_1 x_1 + \ldots + h_m x_m$ с целыми коэффициентами $h_1, \ldots, h_m$ существует бесконечное множество простых чисел $p$ таких, что в поле $Q_p$ выполняется неравенство $h_1 \theta_1^{(p)} + \ldots + h_m \theta_m^{(p)} \neq 0$.

Будем говорить о бесконечной линейной независимости с ограничениями на указанное подмножество простых чисел. Ограничения на подмножества простых чисел обычно получаются при рассмотрении простых чисел из совокупностей арифметических прогрессий. Этот подход был использован в работах В.В. Зудилина, Т. Матала-ахо, А.-М. Эрнвалл-Хитонен, Т. Сеппала [11], [12], относящихся к так называемому ряду Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n!(-z)^n$.

Каноническое представление элемента $\theta$ кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in Z, 0 \leq a_n \leq n.$$

Полиадическое число $\theta$ называют полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел $n$ и $P$ существует натуральное число $A$ такое, что для всех простых чисел $p$, удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство $|\theta - A|_p < |A|^{-n}$. Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля $p$-адических чисел.

## 2. Основной текст статьи

Значения рассматриваемых рядов вычисляются в точке $\xi$, являющейся натуральным числом, либо в точке $\Xi$, которая представляет собой полиадическое число Лиувилля.

Используем (и повторим здесь) обозначения из работы [1]. Пусть $\lambda_0$ произвольное натуральное число. Положим

$$s_0 = [\exp \lambda_0] + 1$$

Здесь и далее символ $[\,a]$ обозначает целую часть числа $a$. Пусть $ord_p a$ обозначает степень, в которой простое число $p$ входит в разложение целого числа $a$ на простые множители.

Пусть $\lambda_1-$ произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leq s_0 + C_1\lambda_0^2$ выполняется неравенство $ord_p\lambda_1 \geq m s_0 \ln s_0$ и пусть $s_1 = [\exp\lambda_1]+1$. Здесь и всюду далее символами $C_r$, $r = 1, 2, ...$ обозначены некоторые положительные абсолютные постоянные.

При $k \geq 2$ пусть $\lambda_k-$ произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leq s_{k-1} + C_1\lambda_{k-1}^2$ выполняется неравенство

$$ord_p\lambda_k \geq m s_{k-1} \ln s_{k-1} \tag{2.1}$$

и пусть

$$s_k = [\exp\lambda_k] + 1. \tag{2.2}$$

Пусть $\mu_{i,0}, i = 1, \dots, m-1-$ натуральные числа. Пусть для любых $i = 1, \dots, m-1, k \geq 1$ числа $\mu_{i,k}-$ неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству

$$\mu_{i,k} \leq \lambda_k. \tag{2.3}$$

Пусть

$$\alpha_{i,k} = \sum_{l=0}^{k} \mu_{i,l}\lambda_l, i = 1, \dots, m-1, \tag{2.4}$$

$$\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{i,l}\lambda_l, i = 1, \dots, m-1. \tag{2.5}$$

Далее числа $K_i, i = 1, 2, \dots -$ натуральные. Для всех $k \geq K_1$ ввиду (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) выполняется неравенство

$$1 \leq \alpha_{i,k} = \sum_{l=0}^{k} \mu_{i,l}\lambda_l \leq 1,1\lambda_k^2, i = 1, \dots, m-1. \tag{2.6}$$

Если для всех $l \geq K_2$ выполняются равенства $\mu_{i,l} = 0$ ,то $\alpha_i-$ натуральное число.

При всех $k$ положим

$$f_{0,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n z^n, f_{m-1,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{1,k}+1)_n \dots (\alpha_{m-1,k}+1)_n z^n, \tag{2.7}$$

а при $i = 1, ..., m-2$

$$f_{i,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{1,k}+1)_n \dots (\alpha_{i,k}+1)_n (\alpha_{i+1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n z^n. \tag{2.8}$$

Кроме того, будем рассматривать (имеющие вид (1.1)) ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n, f_{m-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1+1)_n \dots (\alpha_{m-1}+1)_n z^n, \tag{2.9}$$

а при $i = 1, ..., m-2$

$$f_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1+1)_n\dots(\alpha_i+1)_n(\alpha_{i+1})_n\dots(\alpha_{m-1})_n z^n. \tag{2.10}$$

Все ряды (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) в любом поле $Q_p$ сходятся при $|z|_p<p^{\frac{m-1}{p-1}}$.

Отметим важное для дальнейшего тождество, которое легко следует из определений (2.7):

$$f_{0,k}(z)=1+\alpha_{1,k}\dots\alpha_{m-1,k}zf_{m-1,k}(z). \tag{2.11}$$

Сформулируем основной результат работы. Пусть $M-$ натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по $mod(M)$. Число элементов этой системы обозначается $\varphi(M)$, где $\varphi(M)$ – функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны $\rho$ различных элементов $a_1,\dots,a_\rho$ этой приведенной системы вычетов. Обозначим $a_1,\dots,a_\rho$ множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями $a_i+Mk, k\in\mathbb{Z}$. Используя стандартное обозначение $\mathbb{P}$ для множества простых чисел, будем обозначать $\mathbb{P}(\ a_1,\dots,a_\rho\ )$ множество простых чисел, входящих в объединение множеств $a_1,\dots,a_\rho$.

Теорема 1. *Пусть $m\geq3, M,\rho-$ натуральные числа. Пусть $k\geq K_0$, где $K_0-$ эффективная постоянная,*

$$\varphi(M)>m,\quad \rho m>\varphi(M)(m-1).$$

*Тогда для любых целых чисел $h_0,\dots,h_{m-1}$, не равных нулю одновременно таких, что их абсолютные величины не превосходят*

$$\exp(C_0 s_k\sqrt{\ln s_k})$$

*и любого натурального числа $\xi$ существует простое число $p_k=p$ ,*

$$\exp\sqrt{\ln s_k}\leq p\leq s_k+C_1(\ln s_k)^2$$

*из множества $\mathbb{P}(\ a_1,\dots,a_\rho\ )$ такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство*

$$|L(\xi)|_p=|h_0f_0(\xi)+\dots+h_{m-1}f_{m-1}(\xi)|_p>(\exp((m-1)s_k\ln s_k+C_2s_k\ln\ln s_k))^{-1} \tag{2.12}$$

Пусть натуральные числа $\vartheta_k$ удовлетворяют при любом $k$ неравенству

$$\vartheta_k\leq\lambda_k. \tag{2.13}$$

Пусть

$$\Xi=\sum_{l=0}^{\infty}\vartheta_l\lambda_l. \tag{2.14}$$

Теорема 2. *Пусть $m\geq3, M,\rho$ – натуральные числа. Пусть $k\geq K_0$, где $K_0-$ эффективная постоянная,*

$$\varphi(M)>m,\quad \rho m>\varphi(M)(m-1).$$

*Тогда для любых целых чисел $h_0,\dots,h_{m-1}$, не равных нулю одновременно таких, что их абсолютные величины не превосходят*

$$\exp(C_0 s_k\sqrt{\ln s_k})$$

*и числа $\Xi$, определённого равенством (2.14) и условиями (2.13), существует простое число $p_k=p$,*

$$\sqrt{\ln s_k}\leq p\leq s_k+C_1(\ln s_k)^2$$

*из множества $\mathbb{P}(\ a_1,\dots,a_\rho)$ такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство*

$$|L(\Xi)|_p=|h_0f_0(\Xi)+\dots+h_{m-1}f_{m-1}(\Xi)|_p>(\exp((m-1)s_k\ln s_k+C_3s_k\ln\ln s_k))^{-1}. \tag{2.15}$$

Отметим, что в неравенствах (2.12) и (2.15) символы $f_0(\xi)$,..., $f_{m-1}(\xi)$ , $f_0(\Xi)$,..., $f_{m-1}(\Xi)$ означают суммы этих рядов в поле $\mathbb{Q}_p$.

## 3. Доказательство теорем

При каждом натуральном $k$ рассмотрим числа (2.4) и обозначим $\alpha_{m,k}=1$. Для любого $N=ms+r$, где $1\le r\le m$, полагаем

$$\alpha_{N,k}=\alpha_{r,k}+s. \tag{3.1}$$

Число $t$ определим равенством $t=\left[\frac{N-1}{m-1}\right]$. Используя обычное обозначение

$${}_mF_0\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_m)_n}{n!}z^n,$$

положим

$$f_{N,k}\left(z\right)={}_mF_0\left(\alpha_{N+1,k},\ldots,\alpha_{N+m,k},z\right). \tag{3.2}$$

Обозначим

$$u_{N,k}\left(z\right)=\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k}z^tf_{N,k}\left(z\right). \tag{3.3}$$

Лемма 1. *(Лемма 1 из [1])*

*Для любого $N$ существуют многочлены $P_{N,i,k}\left(z\right),i=0,1,\ldots,m-1$ такие, что выполняется равенство*

$$u_{N,k}\left(z\right)=P_{N,0,k}\left(z\right)u_{0,k}\left(z\right)+\ldots+P_{N,m-1,k}\left(z\right)u_{m-1,k}\left(z\right). \tag{3.4}$$

*При этом степени многочленов $P_{N,i,k}\left(z\right),i=0,1,\ldots,m-1$ не превосходят числа $t-s$, ряды $f_{0,k}\left(z\right),\ldots,f_{m-1,k}\left(z\right)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ и выполняются рекуррентные соотношения:*

$$u_{N+m,k}\left(z\right)=u_{N+1,k}\left(z\right)-\alpha_{N+1,k}u_{N,k}\left(z\right), \tag{3.5}$$

*если $N=0$ или $N\ge 1$ и число $N$ не делится на число $m-1$,*

$$u_{N+m,k}\left(z\right)=u_{N+1,k}\left(z\right)-\alpha_{N+1,k}zu_{N,k}\left(z\right), \tag{3.6}$$

*если $N\ge 1$ и число $N$ делится на число $m-1$, и для любого $i=0,1,...,m-1$*

$$P_{N+m,i,k}\left(z\right)=P_{N+1,i,k}\left(z\right)-\alpha_{N+1,k}P_{N,k}\left(z\right), \tag{3.7}$$

*если $N=0$ или $N\ge 1$ и число $N$ не делится на число $m-1$,*

$$P_{N+m,i,k}\left(z\right)=P_{N+1,i,k}\left(z\right)-\alpha_{N+1,k}zP_{N,k}\left(z\right), \tag{3.8}$$

*если $N\ge 1$ и число $N$ делится на число $m-1$.*

*При этом для всех неотрицательных целых значений $N$ имеет место равенство*

$$\Delta_{N,k}\left(z\right)=(-1)^{mN}\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k}z^t, \tag{3.9}$$

*где*

$$\Delta_{N,k}\left(z\right)=\left|P_{N+j,i,k}\left(z\right)\right|_{i,j=0,1,\ldots,m-1}. \tag{3.10}$$

Отметим, что из равенства (3.4) следуют равенства

$$\begin{aligned} P_{0,0,k}(z)=1, P_{0,1,k}(z)=0,\ldots,P_{0,m-1,k}(z)=0,\\ P_{1,0,k}(z)=0, P_{1,1,k}(z)=1,\ldots,P_{1,m-1,k}(z)=0\\ \ldots\\ P_{m-1,0,k}(z)=0, P_{m-1,1,k}(z)=0,\ldots,P_{m-1,m-1,k}(z)=1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Рассмотрим при каждом $k$ величину $max\,(\alpha_{1,k},\ldots,\alpha_{m,k})$. Из (2.2) и (2.6) следует, что

$$2\leq max\,(\alpha_{1,k},\ldots,\alpha_{m,k})+1\leq c_0\,(k)=C_4\,(\ln s_k)^2 \tag{3.12}$$

с независящей от числа $k$ постоянной $C_4$.

По определению, высотой $H\,(P\,(z))$ многочлена $P(z)$ с целыми коэффициентами называется максимум абсолютных величин его коэффициентов.

Лемма 2. *(Лемма 2 из [1])*

*Пусть $k\in\mathbb{N}, k\geq K_4, s\in\mathbb{N}, s=s_k$, где число $s_k$ определено равенством (2.2). Пусть $N = ms_k+r, 1\leq r\leq m$. Тогда высота $H(P_{N,i,k}\,(z))$ многочлена $P_{N,i,k}\,(z), i=0,1,\ldots,m-1$ не превосходит числа*

$$\exp\,(s_k\ln s_k+C_3 s_k\ln\ln s_k) \tag{3.13}$$

Следствие 1. *Пусть $\xi\in N$. При условиях леммы при всех $k\geq K_5$ выполняется неравенство*

$$|P_{N,i,k}\,(\xi)|\leq\exp\,(s_k\ln s_k+C_5 s_k\ln\ln s_k)\,. \tag{3.14}$$

Следствие 2. *Пусть $\Xi$ определено равенством (2.14). Пусть $\Xi_k=\sum_{l=0}^{k}\vartheta_l\lambda_l$. При условиях леммы при всех $k\geq K_6$ выполняется неравенство*

$$|P_{N,i,k}\,(\Xi_k)|\leq\exp\,(s_k\ln s_k+C_6 s_k\ln\ln s_k)\,. \tag{3.15}$$

Вместе с формой $L\,(\xi)$, определенной формулой (2.12), рассмотрим форму

$$L_k\,(\xi)=h_0 f_{0,k}\,(\xi)+\ldots+h_{m-1}f_{m-1,k}\,(\xi) \tag{3.16}$$

и связанную с ней форму

$$l_k\,(\xi)=\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{m-1,k}L_k\,(\xi)=H_0u_{0,k}\,(\xi)+\ldots+H_{m-1}u_{m-1,k}\,(\xi)\,, \tag{3.17}$$

где функции $u_{N,k}\,(z)$ определены равенством (3.3). По условию, не все из целых чисел $h_0,\ldots,h_{m-1}$ равны нулю. Пусть $h=max\,(h_0,\ldots,h_{m-1})$. Тогда

$$H=max\,(H_0,\ldots,H_{m-1})\leq\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{m-1,k}h.$$

Ввиду неравенств (3.12),

$$H\leq C_2^{m-1}\,(\ln s_k)^{2m-2}\,. \tag{3.18}$$

По лемме 1 , равенство (3.9) означает, что определитель (3.10), составленный из вычисленных в точке $\xi$ коэффициентов линейных форм $u_{N,k}\,(\xi)\,,\ldots,u_{N+m,k}\,(\xi)$, определенных равенством (3.3), отличен от 0. Поэтому среди этих форм найдутся $m-1$ форм, линейно независимых с формой $l_k\,(\xi)$, определенной в (3.17). Пусть это - формы

$$u_{N_1,k}\left(\xi\right),\ldots,u_{N_{m-1},k}\left(\xi\right),$$

где

$$\left\{N_1,\ldots,N_{m-1}\right\}\subset\left\{N,N+1,\ldots,N+m-1\right\}. \tag{3.19}$$

Рассмотрим определитель полученной системы форм

$$\Delta_{l,N,k}\left(\xi\right)=\begin{vmatrix} H_0 & \ldots & H_{m-1} \\ P_{N_1,0,k}\left(\xi\right) & \ldots & P_{N_1,m-1,k}\left(\xi\right) \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ P_{N_{m-1},0,k}\left(\xi\right) & \ldots & P_{N_{m-1},m-1,k}\left(\xi\right) \end{vmatrix} \tag{3.20}$$

представляющий собой, согласно сказанному выше, отличное от 0 целое число.

Рассмотрим формы (3.16) и (3.17) в точке $\Xi_k=\sum_{l=0}^{k}\vartheta_l\lambda_l$. Для формы $l_k\left(\Xi_k\right)$ тоже существуют $m-1$ линейных форм среди форм $u_{N,k}\left(\Xi_k\right),\ldots,u_{N+m,k}\left(\Xi_k\right)$ линейно независимых с ней. Пусть это - формы

$$u_{N_1,k}\left(\Xi_k\right),\ldots,u_{N_{m-1},k}\left(\Xi_k\right)$$

где

$$\left\{N_1,\ldots,N_{m-1}\right\}\subset\left\{N,N+1,\ldots,N+m-1\right\}.$$

Отметим, что теперь выбор чисел $N_1,\ldots,N_{m-1}$ может быть отличен от того выбора (3.19), что ранее соответствовал определителю (3.20). Тем не менее, мы сохраним для определителя вновь полученной системы из $m$ линейно независимых форм прежнее обозначение $\Delta_{l,N,k}\left(\Xi_k\right)$.

Далее числа $K_i$ зависят от числа $h$, постоянного для рассматриваемой формы $L_k\left(\xi\right)$.

Лемма 3. *Для любого $k\geq K_7$ выполняются неравенства*

$$\left|\Delta_{l,N,k}\left(\xi\right)\right|\leq h\exp((m-1)\,s_k\ln s_k+C_7 s_k\ln\ln s_k), \tag{3.21}$$

$$\left|\Delta_{l,N,k}\left(\Xi_k\right)\right|\leq h\exp((m-1)\,s_k\ln s_k+C_8 s_k\ln\ln s_k) \tag{3.22}$$

Лемма 4. *Пусть $k\in\mathbb{N},k\geq K_8$, где $K_8$ – эффективная постоянная, $s\in\mathbb{N}$, причем $s=s_k$. Пусть $M$, $\rho$ – натуральные числа. Пусть $\rho>\frac{\varphi(M)(m-1)}{m}$. Тогда для любого $N_i\in\left\{N,N+1<\ldots,N+m-1\right\}$ справедливы неравенства.*

$$\prod_p \max_i\left|u_{N_i,k}\left(\xi\right)\right|_p\leq\exp\left(\frac{-\rho m}{\varphi\left(M\right)}s_k\ln s_k+C_9 s_k\sqrt{\ln s_k}\right), \tag{3.23}$$

*где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам $p$ из множества $\mathbb{P}$ ( $a_1,\ldots,a_\rho$), удовлетворяющим неравенствам*

$$exp\sqrt{\ln s_k}\leq p\leq s_k+C_1\left(\ln s_k\right)^2. \tag{3.24}$$

Лемма 5. *Пусть $k\in\mathbb{N}$, $k\geq K_9$, где $K_9$ – эффективная постоянная, $s\in\mathbb{N}$, причем $s=s_k$. Пусть $M$, $\rho$ – натуральные числа. Пусть $\rho>\frac{\varphi(M)(m-1)}{m}$. Тогда для любого $N_i\in\left\{N,N+1<\ldots,N+m-1\right\}$ справедливы неравенства*

$$\prod_p \max_i\left|u_{N_i,k}\left(\Xi_k\right)\right|_p\leq\exp\left(\frac{-\rho m}{\varphi\left(M\right)}s_k\ln s_k+C_{10} s_k\sqrt{\ln s_k}\right), \tag{3.25}$$

*где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам $p$ из множества $\mathbb{P}$ ( $a_1,\ldots,a_\rho$), удовлетворяющим неравенствам (3.24).*

Проделаем с определителем (3.20) такие преобразования: умножим его первый столбец на величину $u_{0,k}(\xi)$ и прибавим к полученному первому столбцу остальные столбцы определителя, умноженные на соответствующие $u_{j,k}(\xi), j = 1, \ldots, m-1$. С учетом равенств (3.4) и (3.17) получаем

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)\, u_{0,k}(\xi) = \begin{vmatrix} l_k(\xi) & \ldots & H_{m-1} \\ u_{N_1,k}(\xi) & \ldots & P_{N_1,m-1,k}(\xi) \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ u_{N_{m-1},k}(\xi) & \ldots & P_{N_{m-1},m-1,k}(\xi) \end{vmatrix}. \tag{3.26}$$

Аналогично, умножим последний столбец определителя (36) на величину $u_{m-1,k}(\xi)$ и прибавим к полученному последнему столбцу остальные столбцы определителя, умноженные на соответствующие $u_{j,k}(\xi), j = 0, \ldots, m-2$. С учетом равенств (20) и (33), получаем

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)\, u_{m-1,k}(\xi) = \begin{vmatrix} H_0 & \ldots & l_k(\xi) \\ P_{N_1,0,k}(\xi) & \ldots & u_{N_1,k}(\xi) \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ P_{N_{m-1},0,k}(\xi) & \ldots & u_{N_{m-1},k}(\xi) \end{vmatrix}. \tag{3.27}$$

Из равенств (2.11) и (3.3) следует, что

$$u_{0,k}(\xi) = 1 + \xi u_{m-1,k}(\xi). \tag{3.28}$$

Обозначая $\delta_{0,i,j}$ алгебраическое дополнения элемента, стоящего на пересечении строки с номером $i$ и столбца с номером $j$ определителя (3.26) и $\delta_{m-1,i,j}$ алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя (3.27), соответственно, получаем

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)\, u_{0,k}(\xi) = l_k(\xi)\, \delta_{0,1,1} + \sum_{i=2}^{m} \delta_{0,i,1} u_{N_{i-1},k}(\xi), \tag{3.29}$$

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)\, u_{m-1,k}(\xi) = l_k(\xi)\, \delta_{m-1,1,m} + \sum_{i=2}^{m} \delta_{m-1,i,m} u_{N_{i-1},k}(\xi). \tag{3.30}$$

Из равенств (3.28), (3.29), (3.30) следует

$$\Delta_{l,N,k}(\xi) = l_k(\xi)\left(\delta_{0,1,1} + \xi\delta_{m-1,1,m}\right) + \sum_{i=2}^{m} \left(\delta_{0,i,1} + \xi\delta_{m-1,i,m}\right) u_{N_{i-1},k}(\xi). \tag{3.31}$$

Лемма 6. *Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq K_{10}$. Тогда существует простое число $p_k$, удовлетворяющее неравенствам (3.25), для которого справедливы оценки*

$$|l_k(\xi)|_{p_k} \geq \exp\left(-(m-1)\, s_k \ln s_k - C_{11} s_k \sqrt{\ln s_k}\right), \tag{3.32}$$

$$|L_k(\xi)|_{p_k} \geq h^{-1} \exp\left(-(m-1)\, s_k \ln s_k - C_{12} s_k \sqrt{\ln s_k}\right). \tag{3.33}$$

Доказательство. Докажем сначала, что существует простое число $p_k$, удовлетворяющее неравенствам (3.24), для которого выполнено неравенство (3.31). Предположим противное, т.е. что для всех простых чисел $p$, удовлетворяющее неравенствам (3.24), имеем неравенство

$$|l_k(\xi)|_p < \exp\left(-(m-1)\, s_k \ln s_k - C_{11} s_k \sqrt{\ln s_k}\right). \tag{3.34}$$

В равенстве (3.32) коэффициент при форме $l_k(\xi)-$ целое число. Определитель (3.20) отличен от нуля. Для отличных от нуля целых чисел $A$ выполнено неравенство

$$|A|_p \geq \frac{1}{|A|},$$

из которого, с учетом (3.21) следует, что для всех рассматриваемых простых чисел $p$ выполнено неравенство

$$\left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p \geq h^{-1}\exp\left(-(m-1)s_k\ln s_k - C_7 s_k\ln\ln s_k\right),$$

что, вместе с (3.34) при $k\geq K_{11}$ дает

$$\left|l_k(\xi)\right|_p < \left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p. \tag{3.35}$$

Тогда равенства (3.31) и неравенство (3.35) означают, согласно известным свойствам $p-$адического нормирования, что для всех рассматриваемых простых чисел $p$ выполнено равенство

$$\left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p = \left|\sum_{i=2}^{m}\left(\delta_{0,i,1}+\xi\delta_{m-1,i,m}\right)u_{N_{i-1},k}(\xi)\right|_p. \tag{3.36}$$

Так как числа $(\delta_{0,j,1}+\xi\delta_{m-1,j,m-1})-?$ целые, получаем справедливые для всех рассматриваемых простых чисел $p$ неравенства

$$\left|\delta_{0,j,1}+\xi\delta_{m-1,j,m-1}\right|_p \leq 1$$

и из равенства (3.36) следует

$$\left|\sum_{i=2}^{m}\left(\delta_{0,i,1}+\xi\delta_{m-1,i,m}\right)u_{N_{i-1},k}(\xi)\right|_p \leq \max_j \left|u_{N_j,k}(\xi)\right|_p.$$

Поэтому

$$\left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p \leq \max_j \left|u_{N_j,k}(\xi)\right|_p. \tag{3.37}$$

Из (3.37) следует, что для любого подмножества $P_0$ множества простых чисел $\mathbb{P}$ имеет место неравенство

$$\prod_{p\in P_0}\left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p \leq \prod_{p\in P_0}\max_j \left|u_{N_j,k}(\xi)\right|_p. \tag{3.38}$$

По лемме 4, неравенство (3.23),

$$\prod_p \max_i \left|u_{N_i,k}(\xi)\right|_p \leq \exp\left(\frac{-\rho m}{\varphi(M)}s_k\ln s_k + C_9 s_k\sqrt{\ln s_k}\right),$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам $p$ из множества $\mathbb{P}$ ( $a_1,\ldots,a_\rho$), удовлетворяющим неравенствам (3.24).

Известна формула произведения: для рационального числа $A\neq 0$

$$\prod_p |A|_p = \frac{1}{|A|}.$$

Поэтому из неравенства (3.21) следует неравенство

$$\prod_p |\Delta_{l,N,k}(\xi)|_p \geq \exp\left(-(m-1)\, s_k \ln s_k - C_7 s_k \ln\ln s_k\right), \tag{3.39}$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам $p$ из множества $\mathbb{P}(\ a_1,\ldots,a_\rho)$, удовлетворяющим неравенствам (3.25).

Полученные оценки (3.38), (3.23), (3.39) противоречат друг другу при $k \geq K_{12}$ ввиду неравенства $\frac{\rho m}{\varphi(M)} > m-1$. При $K_{10} = max(K_{11}, K_{12})$ это опровергает сделанное предположение и доказывает справедливость неравенства (3.32) при некотором $p_k$, удовлетворяющем неравенствам (3.24). Поскольку $l_k(\xi)$, определенная равенством (3.17), отличается от $L_k(\xi)$, определенной равенством (3.16), лишь множителем $\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{m-1,k}$, из неравенств (3.32), (3.18) следует неравенство (3.27) и лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть $k \in N, k \geq K_{13}$. Тогда существует простое число $p_k$, удовлетворяющее неравенствам (3.24), для которого справедливы оценки*

$$|l_k(\Xi_k)|_{p_k} \geq \exp\left(-(m-1)\, s_k \ln s_k - C_{13} s_k \sqrt{\ln s_k}\right), \tag{3.40}$$

$$|L_k(\Xi_k)|_{p_k} \geq h^{-1} \exp\left(-(m-1)\, s_k \ln s_k - C_{14} s_k \sqrt{\ln s_k}\right). \tag{3.41}$$

Доказательство неравенств (3.40), (3.41) дословно повторяет доказательство леммы 6. Единственное отличие состоит в использовании неравенства (3.25) вместо неравенства (3.23) и неравенства (3.21) вместо неравенства (3.20).

Рассматриваем простое число $p_k$, удовлетворяющее неравенствам (3.24).

Рассмотрим линейную форму

$$L(\xi) = h_0 f_0(\xi) + \ldots + h_{m-1} f_{m-1}(\xi).$$

Как отмечено выше, она представляет собой целое $p_k-$ адическое число, поэтому разность форм

$$L(\xi) - L_k(\xi) = h_0 f_0(\xi) + \ldots + h_{m-1} f_{m-1}(\xi) - \left(h_0 f_{0,k}(\xi) + \ldots + h_{m-1} f_{m-1,k}(\xi)\right) \tag{3.42}$$

тоже представляет собой целое $p_k-$ адическое число. В [1] доказано

$$|L(\xi) - L_k(\xi)|_{p_k} \leq p_k^{-m s_k \ln s_k}. \tag{3.43}$$

В лемме 6 доказано, что для любого $k \geq K_{10}$ выполнено неравенство (3.33), т.е.

$$|L_k(\xi)|_{p_k} \geq h^{-1} \exp\left(-(m-1)\, s_k \ln s_k - C_{15} s_k \sqrt{\ln s_k}\right)$$

Вместе с неравенством (3.43) это дает

$$|L(\xi)|_{p_k} = |L_k(\xi)|_{p_k} \geq h^{-1} \exp\left(-(m-1)\, s_k \ln s_k - C_{15} s_k \sqrt{\ln s_k}\right). \tag{3.44}$$

Неравенство (3.44) и является доказываемым неравенством (2.12).

Рассмотрим линейную форму

$$L(\Xi) = h_0 f_0(\Xi) + \ldots + h_{m-1} f_{m-1}(\Xi).$$

Как отмечено выше, она представляет собой целое $p_k-$ адическое число. В работе [1] доказано

$$|L(\Xi) - L_k(\Xi_k)|_{p_k} \leq p_k^{-m s_k \ln s_k}. \tag{3.45}$$

Неравенства (3.42) леммы 7 и (3.45) показывают, что при $k \geq K_{14}$ выполняются соотношения

$$|L(\Xi)|_{p_k} = |L_k(\Xi_k)|_{p_k} > h^{-1} \exp\left(-(m-1)\, s_k \ln s_k - C_{15} s_k \sqrt{\ln s_k}\right),$$

иными словами, доказано неравенство (2.15).

## 4. Заключение

Следует отметить, что полученные оценки выражены не только через $h = max(h_0, \dots, h_{m-1})$, но и через $s_k$– величину, зависящую от рассматриваемого $k$. Это связано с тем, что одна и та же линейная форма рассматривается в бесконечном множестве полей $Q_p, p = p_k$. При этом с ростом $k$ величина $h$ очень мала по сравнению с $s_k$. В дальнейшем планируется продолжение исследований количественных оценок, связанных со значениями рядов с трансцендентными параметрами. Задачи, связанные с этим направлением, рассматриваются в работах [1], [2], [3], [4], [7], [8].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами // ДАН. 2022. Т.506.С.95-107. DOI:10.31857/S2686954322050071.

2. Чирский В. Г. Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // ДАН. 2022. Т.505.С.63-65. DOI:10.31857/S2686954322040075.

3. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // ДАН. 2020. Т.494. №2. С.69-70. DOI:10.31857/S268695432005032X.

4. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter / /Russ.J.Math.Phys.2021.V.28. P. 294-302. DOI:10.1134/S1061920819030051.

5. Chirskii V. G. Polyadic Estimates for F-Series // Doklady Mathematics. 2022. V.106. Suppl.2 P. 134-136

6. Chirskii V. G. Estimates of Linear Forms and Polinomials in Polyadic Numbers // Doklady Mathematics. 2022. V.106. Suppl.2 P. 131-133

7. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Values at Polyadic Liouville Point of Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter // Doklady Mathematics. 2022. V.106. Suppl.2 P. 150-153

8. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 2. С.156-167. DOI:10.22405/2226-8383-2021-22-2-304-312.

9. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций // Матем. сб. 1994. Т.185. №3. С.39-72.

10. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел // М.: Наука.1971. 416с.

11. Ernvall-Hytonen A.-M., Matala-aho T.,Seppela L. Euler's divergent series in arithmetic progressions// J.Integer Sequences. 2019. V.22. Article 19.2.2. 10p.

12. Matala-aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations// J. Number Theory. 2018. V. 186. P. 202-210. DOI:10.1016/j.jnt.2017.09.026.

13. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // М. Наука. 1987. 448 с.

14. Салихов В. Х. Критерий алгебраической независимости одного класса гипергеометрических $E$-функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. 2.С.189-211.

15. Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений $E$-функций // Acta Arithm.1990. V. 53. P.453-471.

16. Bombieri E. $G$-functions// Recent Progress in Analytic Number Theory.V.2. London: Academic Press. 1981.P.1-68.

17. Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений $E$ – функций в некоторых трансцендентных точках // Вестн. Московского университета. Сер. 1, Математика, механика. 1970. № 5. С. 58-63

18. Bertrand D., Chiskii V., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. V.13.2. P. 241-260.

19. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019. V.26. P. 286-305. DOI:10.1134/S1061920821030031.

20. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Сер.матем.2014. Т.78.6. С. 193-210. DOI: https://doi.org/10.4213/im8169.

21. Прахар К. Распределение простых чисел // М.: Мир. 1967. 512 с.

## REFERENCES

1. Chirskii, V. G. 2022, “Arithmetic properties of values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameters”, *Reports of the Russian Academy of Sciences*, vol.506.pp.95-107. DOI:10.31857/S2686954322050071.

2. Chirskii, V. G. 2022, “New problems in the theory of transcendental polyadic numbers”, *Reports of the Russian Academy of Sciences*, vol.505, pp.63-65. DOI:10.31857/S2686954322040075.

3. Chirskii, V. G. 2020, “Arithmetic properties of Euler-type series with polyadic Liouville parameter”, *Reports of the Russian Academy of Sciences*, vol.494, pp.69-70. DOI:10.31857/S268695432005032X.

4. Chirskii, V. G. 2021, “Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter”, *Russ.J.Math.Phys.*, vol.28, pp.294-302. DOI:10.1134/S1061920819030051.

5. Chirskii, V. G. 2022, “Polyadic Estimates for F-Series”, *Doklady Mathematics*, vol.106, pp.134-136.

6. Chirskii, V. G. 2022, “Estimates of Linear Forms and Polinomials in Polyadic Numbers”, *Doklady Mathematics*, vol.106, pp.131-133.

7. Chirskii, V. G. 2022, “Arithmetic Properties of Values at Polyadic Liouville Point of Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter”, *Doklady Mathematics*, vol.106, pp.150-153.

8. Chirskii, V. G. 2021, “Arithmetic properties of values at polyadic Liouville points of series with a polyadic Liouville parameter”, *Chebyshevskiy Sbornik*, vol.22, pp.156-167. DOI:10.22405/2226-8383-2021-22-2-304-312

9. Nesterenko, Yu. V. 1994, “Hermite-Padé approximations of generalized hypergeometric functions”, *Mathematical Collection*, vol.185, pp.39-72.

10. Postnikov, A. G. 1971, “Introduction to Analytic Number Theory”, *Nauka*, pp.416.

11. Ernvall-Hytonen, A -M., Matala-aho, T., Seppela, L. 2019, "Euler's divergent series in arithmetic progressions", *J.Integer Sequences*, V.22, Article 19.2.2, p.10.

12. Matala-aho, T., Zudilin, W. 2018, "Euler factorial series and global relations", *J. Number Theory*, vol.186, pp.202-210. DOI:10.1016/j.jnt.2017.09.026

13. Shidlovskiy, A. B. 1987, "Transcendental number", *Nauka*, pp.448.

14. Salikhov, V. H. 1990, "A criterion for algebraic independence of one class of hypergeometric $E$-functions", *Mathematical Collection*, vol.181, pp.189-211.

15. Salikhov, V. H. 1990, "Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of values of $E$-functions ", *Acta Arithm*, vol.53, pp.453-471.

16. Bombieri, E. 1990, "$G$-functions", *Recent Progress in Analytic Number Theory, London: Academic Press*, vol.2, pp.1-68.

17. Galochkin, A. I. 1970, "On the algebraic independence of values of $E$ -functions at certain transcendental points", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, vol.5, pp.58-63.

18. Bertrand, D., Chiskii, V., Yebbou, J. 2004, "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol.13, num.2, pp.241-260.

19. Chirskii, V. G. 2019, "Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers", *Russ. J. Math. Phys.*, vol.26, pp.286-305. DOI:10.1134/S1061920821030031

20. Chirskii, V. G. 2014, "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters", *Izvestiya Russian Academy of Sciences*, vol.78, num.6, pp.286-305. DOI: https://doi.org/10.4213/im8169

21. Prakhar, K. 1967, "Distribution of Prime Numbers", *Mir*.


Получено: 14.05.2025
Принято в печать: 17.10.2025