ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-398-418

Матричная классификация двумерных алгебр над полем $\mathbb{Z}_2$

Д. А. Шарипов

Шарипов Данила Алексеевич — Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).
e-mail: thesharip@yandex.ru

Аннотация

Исследуется задача нахождения орбит группы $GL(V)$ на пространстве $Alg(V)$ всех билинейных отображений $V \times V \to V$. В работе рассматриваются только двумерные алгебры над полем $\mathbb{Z}_2$ без использования методов теории инвариантов. Рассматривается классификация алгебр с новых позиций. Для выделения большого класса алгебр используется отображение P, которое естественно возникает как отображение $Alg(V) \to V^* \times V^*$, сопоставляющее каждой структуре алгебры на пространстве V пару линейных форм Tr_1 и Tr_2, задаваемых как следы операторов левого и правого умножения в этой алгебре.

Изучено τ-*действие* группы $GL(2, \mathbb{Z}_2)$, состоящей из невырожденных квадратных матриц g, на множество $\mathrm{MSC}(\mathbb{A})$ — *матрицы структурных констант*. Данное действие в общем виде записывается как $\tau : (g, \mathrm{MSC}(\mathbb{A})) \to g\mathrm{MSC}(\mathbb{A})(g^{-1})^{\otimes 2}$. Действие τ задаёт эквивалентность между матричными операторами двумерных алгебр и определяет структуру для описания орбит действия. Для данного действия было использовано P-*отображение*, которое имеет вид $P(\tau(g, \mathrm{MSC}(\mathbb{A}))) = P(\mathrm{MSC}(\mathbb{A}))g^{-1}$.

Для матричных представителей двумерных алгебр предложена полная матричная классификация с различными орбитами над $\mathbb{Z}_2$. Изложена связь $P(g\mathrm{MSC}(\mathbb{A})(g^{-1})^{\otimes 2}) = e$, между $\mathrm{MSC}(\mathbb{A})$ и задающей ее линейно независимой системой $\{Tr_k\} = \{Tr_1, Tr_2\}$. Данная связь различных матричных представителей орбит равна q^4. В работе также учтена связь того, что матричные представители орбит при действии τ могут пересекаться, однако в исследовании строго доказана их непересекаемость.

Показана взаимосвязь в виде системы равенств между элементами эквивалентных орбит τ-действия группой $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ на $\mathrm{MSC}(\mathbb{A})$ для дальнейшего изучения над полями более высшего порядка. Результаты показывают, что количество различных орбит τ-действия равняется 52. Как следствие в теоретико-групповом смысле, данная задача эквивалентна описанию умножения на двупорожденной абелевой группе вида $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ с точностью до изоморфизма.

В заключение приводятся некоторые свойства *решётки* $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$ (Tr_k) с использованием системы векторов $\{Tr_k\}$, из которых, в частности, следует описание эквивалентных матриц с точностью до числа по пяти непересекающимся линейным формам $\{Tr_k\} = \{Tr_1(\mathrm{MSC}(\mathbb{A})), Tr_2(\mathrm{MSC}(\mathbb{A}))\} = \{Tr_1(A), Tr_2(A)\}$ двойственного пространства алгебры $\mathbb{A}$.

Ключевые слова: двумерные алгебры, действие групп на множестве, орбиты, абелева группа, умножения на абелевой группе.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Шарипов, Д. А. Матричная классификация двумерных алгебр над полем $\mathbb{Z}_2$ // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 398–418.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 4.

UDC: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-398-418

Matrix classification of two-dimensional algebras over the field $\mathbb{Z}_2$

D. A. Sharipov

Sharipov Danila Alekseevich — Financial University under the Government of the Russian Federation; National Research University Higher School of Economics (Moscow).
e-mail: thesharip@yandex.ru

Abstract

The problem of finding orbits of the group $GL(V)$ on the space $Alg(V)$ of all bilinear mappings $V \times V \to V$ is investigated. The work considers only two-dimensional algebras over the field $\mathbb{Z}_2$ without using methods of invariant theory. The classification of algebras is considered from new perspectives. To distinguish a large class of algebras, a mapping P is used, which naturally arises as a mapping $Alg(V) \to V^* \times V^*$, assigning to each algebra structure on the space V a pair of linear forms Tr_1 and Tr_2, defined as traces of the left and right multiplication operators in this algebra.

The τ-*action* of the group $GL(2, \mathbb{Z}_2)$, consisting of non-degenerate square matrices g, on the set $\mathrm{MSC}(\mathbb{A})$ — *matrices of structural constants* is studied. This action is generally written as $\tau : (g, \mathrm{MSC}(\mathbb{A})) \to g\mathrm{MSC}(\mathbb{A})(g^{-1})^{\otimes 2}$. The action τ defines equivalence between matrix operators of two-dimensional algebras and determines the structure for describing action orbits.

For this action, the *P-mapping* was used, which has the form $P(\tau(g, \mathrm{MSC}(\mathbb{A}))) =$
$= P(\mathrm{MSC}(\mathbb{A}))g^{-1}$.

For matrix representatives of two-dimensional algebras, a complete matrix classification with various orbits over $\mathbb{Z}_2$ is proposed. The connection $P(g\mathrm{MSC}(\mathbb{A})(g^{-1})^{\otimes 2}) = e$ between $\mathrm{MSC}(\mathbb{A})$ and its defining linearly independent system $\{Tr_k\} = \{Tr_1, Tr_2\}$ is presented. This connection of different matrix representatives of orbits equals q^4. The work also addresses the fact that the matrix representatives of the orbits under the action of τ could potentially intersect; however, the study rigorously proves their non-intersection.

The interrelation in the form of a system of equalities between elements of equivalent orbits of τ-action by the group $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ on $\mathrm{MSC}(\mathbb{A})$ for further study over fields of higher order is shown. The results show that the number of different orbits of τ-action equals 52.

As a consequence in the group-theoretic sense, this problem is equivalent to describing multiplication on a two-generated abelian group of the form $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ up to isomorphism.

In conclusion, some properties of the *lattice* $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$ (Tr_k) using the system of vectors $\{Tr_k\}$ are given, from which, in particular, follows the description of equivalent matrices with respect to number by five disjoint linear forms $\{Tr_k\} = \{Tr_1(\mathrm{MSC}(\mathbb{A})), Tr_2(\mathrm{MSC}(\mathbb{A}))\} = \{Tr_1(A), Tr_2(A)\}$ of the dual space of the algebra $\mathbb{A}$.

Keywords: two-dimensional algebras, action of groups on a set, orbits, abelian group, multiplications on an abelian group.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Sharipov, D. A. 2025, "Matrix classification of two-dimensional algebras over the field $\mathbb{Z}_2$", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 398–418.

1. Введение

Рассмотрим произвольные $n \in \mathbb{N}$ и действие группы $GL(V)$ на пространстве $Alg(V)$ всех билинейных отображений $V \times V \to V$, которое имеет вид: $\tau : GL(V) \times Alg(V) \to Alg(V)$, определяемое формулой: $\tau(g, A) \to gA(g^{-1})^{\otimes 2}$, где $g \in GL(V) = GL(n, \mathbb{Z}_q)$ — группа невырожденных линейных преобразований пространства V, а $A = \mathrm{MSC}(\mathbb{A})$ — матрица структурных констант n-мерной алгебры $\mathbb{A}$ над полем $\mathbb{Z}_q$, соответствующая билинейному отображению из $Alg(V)$. Предположим, что существует непустое $GL(V)$-инвариантное подмножество $V_0 \subset Alg(V)$ и отображение $P : V_0 \to GL(V)$ такое, что для любых $A \in V_0$ и $g \in GL(V)$ выполняется условие $GL(V)$-эквивариантности:

$$P(\tau(g, A)) = P(A)g^{-1},$$

Следующее утверждение опирается на это свойство P-отображения.

Утверждение 1.1. Произвольные элементы $A = \mathbf{u}, B = \mathbf{v} \in V_0$ являются эквивалентными, то есть $\mathbf{u} = \tau(g, \mathbf{v})$ для некоторого $g \in GL(V)$, тогда и только тогда, когда $\tau(P(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \tau(P(\mathbf{v}), \mathbf{v})$.

Доказательство. Если $\mathbf{u} = \tau(g, \mathbf{v})$, тогда $\tau(P(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \tau(P(\tau(g, \mathbf{v})), \tau(g, \mathbf{v})) = \tau(P(\mathbf{v})g^{-1}, \tau(g, \mathbf{v})) = \tau(P(\mathbf{v}), \tau(g^{-1}, \tau(g, \mathbf{v}))) = \tau(P(\mathbf{v}), \mathbf{v})$.

С другой стороны, если $\tau(P(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \tau(P(\mathbf{v}), \mathbf{v})$, тогда
$\tau(P(\mathbf{u})^{-1}P(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = \tau(P(\mathbf{u})^{-1}, \tau(P(\mathbf{v}), \mathbf{v})) = \tau(P(\mathbf{u})^{-1}, \tau(P(\mathbf{u}), \mathbf{u})) = \mathbf{u}$.

Отсюда получаем $\mathbf{u} = \tau(g, \mathbf{v})$, где $g = P(\mathbf{u})^{-1}P(\mathbf{v})$. ∎

Пусть $\mathbb{A}$ будет n-мерной алгеброй над $\mathbb{Z}_q$ и $\mathbf{e} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ его базис. Тогда произвольное умножение $\cdot$ можно представить в терминах матриц размерностью $n \times n^2$ (называемых матрицами структурных констант). Зафиксируем обозначение фиксированной матрицы структурных констант как

$$\mathrm{MSC}(\mathbb{A}) = A = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & ... & A_{1n}^1 & A_{21}^1 & ... & A_{2n}^1 & A_{n1}^1 & ... & A_{nn}^1 \\ A_{11}^2 & A_{12}^2 & ... & A_{1n}^2 & A_{21}^2 & ... & A_{2n}^2 & A_{n1}^2 & ... & A_{nn}^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ A_{11}^n & A_{12}^n & ... & A_{1n}^n & A_{21}^n & ... & A_{2n}^n & A_{n1}^n & ... & A_{nn}^n \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{21}^1 & A_{22}^1 \\ A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Данное представление следует из

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} A_{ij}^k e_k, \quad \text{где} \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Следовательно, умножение на $\mathbb{A}$ относительно базиса $\mathbf{e} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ имеет запись

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}A(u \otimes v)$$

Для любого $\mathbf{u} = eu, \mathbf{v} = ev$, где $u = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$, и $v = (v_1, v_2, ..., v_n)^T$ столбцы с координатами векторов u и v, а $u \otimes v$ — тензорное умножение векторов u и v.

В случае двумерной алгебры, где $u = (u_1, u_2)^T$ и $v = (v_1, v_2)^T$, получаем равенство тензорного произведения элементов $(u \otimes v) = (u_1v_1, u_1v_2, u_2v_1, u_2v_2)^T$, а также умножения базисных элементов $e_i \cdot e_j = A_{i,j}^1 e_1 + A_{i,j}^2 e_2$ для $i, j \in \{1, 2\}$.

В дальнейшем мы предполагаем, что базис $\mathbf{e}$ фиксирован, и мы не различаем алгебру $\mathbb{A}$ и $\mathrm{MSC}(\mathbb{A}) = A$.

Определение 1.2. Произвольные алгебры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ одной размерности изоморфны, тогда и только тогда, когда существует обратимое линейное отображение $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, для любых $x, y \in \mathbb{A}$ выполняется $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Существует эквивалентное определение изоморфности двух алгебр. Рассмотрим разложения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в базисе $e' = (e'^1, e'^2)$, где $e'g = e$.

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = eA(u \otimes v) = e'B(u' \otimes v') = eg^{-1}B(gu \otimes gv) = eg^{-1}B(g \otimes g)(u \otimes v)$.

Следовательно получаем равенство

$$B = gA(g^{-1})^{\otimes 2},$$

где $g^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$, $g = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \eta_2 & -\eta_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1, g \in G = GL(2, \mathbb{Z}_q)$,

а также $(g^{-1})^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\eta_1 & \xi_1\eta_1 & \eta_1^2 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_1\eta_2 & \xi_2\eta_1 & \eta_1\eta_2 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2\eta_1 & \xi_1\eta_2 & \eta_1\eta_2 \\ \xi_2^2 & \xi_2\eta_2 & \xi_2\eta_2 & \eta_2^2 \end{pmatrix}$. Перепишем [Определение 1.2].

Определение 1.3. Произвольные алгебры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ размерности n с задающими их структурными константами MSC($\mathbb{A}$)=A и MSC($\mathbb{B}$)=B изоморофны, если верно для алгебр тождество $B = gA(g^{-1})^{\otimes 2}$ для некоторого $g \in GL(n, \mathbb{Z}_q)$.

Далее, мы будем рассматривать только двумерные алгебры $n = 2$ и для простоты используем обозначение

$$\mathrm{MSC}(\mathbb{A}) = A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}_q,\ i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Заметим, следующие тождества системы векторов $\{Tr_k\}$, где $k \in \{1, 2\}$

$$Tr_1(gA(g^{-1})^{\otimes 2}) = Tr_1(A)g^{-1},\ Tr_2(gA(g^{-1})^{\otimes 2}) = Tr_2(A)g^{-1},$$

для любой алгебры $A \in Mat(2 \times 4, \mathbb{Z}_q)$, и любого $g \in GL(2, \mathbb{Z}_q)$, где

$$Tr_1(A) = (\alpha_1 + \beta_3, \alpha_2 + \beta_4),\ Tr_2(A) = (\alpha_1 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_4)$$

являются значениями линейных форм V^*.

Обратим внимание, что компоненты векторов $Tr_1(A)$ и $Tr_2(A)$ являются значениями линейных форм из двойственного пространства V^*. А именно, рассмотрим линейные функционалы $T_1, T_2 \in V^*$, определяемые как следы операторов левого и правого умножения:

$$T_1(x) = \mathrm{tr}(L_x), \quad T_2(x) = \mathrm{tr}(R_x) \quad \text{для } x \in V.$$

Тогда в базисе $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ пространства V и дуальном базисе $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ пространства V^* имеем:

$$Tr_1(A) = (T_1(e_1), T_1(e_2)), \quad Tr_2(A) = (T_2(e_1), T_2(e_2)).$$

Это объясняет $GL(V)$-эквивариантность преобразования $Tr_k(gA(g^{-1})^{\otimes 2}) = Tr_k(A)g^{-1}$, которая соответствует естественному действию $GL(V)$ на двойственном пространстве V^*.

Опираясь на тождества системы $\{Tr_k\}$ и применяя *P-отображение*, о котором было сказано выше, [Утверждение 1.1] можно переписать для двух произвольных алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

Следствие 1.4. Произвольные алгебры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ размерности n с задающими их структурными константами A и B изоморофны, тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$P(B)B(P(B)^{-1} \otimes P(B)^{-1}) = P(A)A(P(A)^{-1} \otimes P(A)^{-1}),$$

где $P(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_3 & \alpha_2 + \beta_4 \\ \alpha_1 + \beta_2 & \alpha_3 + \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tr_1 \\ Tr_2 \end{pmatrix}$, так как $P(gA(g^{-1})^{\otimes 2}) = P(A)g^{-1}$.

Мы разделяем $Mat((2 \times 4), \mathbb{Z}_q)$ на следующие пять непересекающихся подмножеств, которые относятся к матрице A:

1. $\{Tr_1(A), Tr_2(A)\}$ линейно независимая;
2. $\{Tr_1(A), Tr_2(A)\}$ линейно зависима и $Tr_1(A), Tr_2(A) \neq 0$;
3. $Tr_1(A) \neq 0$ и $Tr_2(A) = (0,0)$;
4. $Tr_1(A) = (0,0)$ и $Tr_2(A) \neq 0$;
5. $Tr_1(A) = Tr_2(A) = (0,0)$.

2. Основной результат

Предложение 2.1. *Пусть группа G действует слева на множестве M и $P : M \to G$ — такая функция, что*

$$P(gm) = P(m)g^{-1}$$

для любых $m \in M$ и $g \in G$. Рассмотрим множество $N = \{m \in M \mid P(m) = e\}$. Тогда любая орбита Gm пересекает множество N ровно в одной точке $P(m)m$.

Доказательство.

Непустота. Мы получаем

$$P(P(m)m) = P(m)P(m)^{-1} = e.$$

Следовательно, $P(m)m \in N \cap Gm$.

Единственность. Предположим, что $gm \in N$ и $g'm \in N$ для двух

$g, g' \in G$. По определению множества N мы получаем $e = P(gm) = P(m)g^{-1}$. Аналогично, $e = P(m)(g')^{-1}$. Сокращая на элемент группы $P(m)$ слева, получаем $g^{-1} = (g')^{-1}$. Отсюда $gm = g'm$. ∎

Следствие 2.2. *Если в условии [Предложение 2.1] множество M конечно, то количество орбит группы G на множестве M равно мощности N.*

Рассмотрим матрицы структурных констант для которых выполнено условие существования $P(m)^{-1}$. Данные матрицы относяться к случаю, когда система $\{Tr_k\}$ линейно независимая.

Следствие 2.3. *Число орбит на двумерной алгебре A, состоящей из линейно независимой системы $\{Tr_k\}$ равно q^4.*

Лемма 2.4. *Любой представитель орбиты матриц структурных констант двумерной алгебры над полем $\mathbb{Z}_q$ для которого выполнено условие существования $P(m)^{-1}$, имеет вид*

$m = A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1 \in \mathbb{Z}_q$ и $P(A_1) = e$.

Доказательство. Пусть $m = A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$ — произвольная алгебра. Тогда отображение P, имеет вид $P(m) = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_3 & \alpha_2+\beta_4 \\ \alpha_1+\beta_2 & \alpha_3+\beta_4 \end{pmatrix}$, со строками

$$Tr_1(A) = (\alpha_1+\beta_3, \alpha_2+\beta_4), Tr_2(A) = (\alpha_1+\beta_2, \alpha_3+\beta_4).$$

Если система $\{Tr_k\}$ линейно независимая $\implies$ $\exists P(m)^{-1}$. Применив равенство в [Следствие 1.4], мы получим

$A_1 = A' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 \end{pmatrix} = P(A)A(P(A)^{-1})^{\otimes 2}$, где $P(A) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \eta_2 & -\eta_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}$, а обратная матрица имеет вид $P(A)^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}, \xi_i, \eta_i \in \mathbb{Z}_q$.

Данная матрица состоит из столбцов

$$\begin{pmatrix} -\frac{\beta_1\eta_1\xi_1^2}{\Delta}+\frac{\alpha_1\eta_2\xi_1^2}{\Delta}+\frac{2\alpha_1\eta_1\xi_1\xi_2}{\Delta}-\frac{2\beta_4\eta_2\xi_1\xi_2}{\Delta}-\frac{2\eta_1\eta_2\xi_1\xi_2}{\Delta^2}+\frac{\eta_2\xi_1^2\xi_2}{\Delta^2}-\frac{\beta_4\eta_1\xi_2^2}{\Delta}+\frac{\alpha_4\eta_2\xi_2^2}{\Delta}+\frac{\eta_1\xi_1\xi_2^2}{\Delta^2} \\ \frac{\beta_1\xi_1^3}{\Delta}-\frac{3\alpha_1\xi_1^2\xi_2}{\Delta}+\frac{\eta_2\xi_1^2\xi_2}{\Delta^2}+\frac{3\beta_4\xi_1\xi_2^2}{\Delta}+\frac{\eta_1\xi_1\xi_1^2}{\Delta^2}-\frac{2\xi_1^2\xi_2^2}{\Delta^2}-\frac{\alpha_4\xi_2^3}{\Delta} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\beta_1\eta_1^2\xi_1}{\Delta}+\frac{2\alpha_1\eta_1\eta_2\xi_1}{\Delta}-\frac{\beta_4\eta_2^2\xi_1}{\Delta}-\frac{\eta_1\eta_2^2\xi_1}{\Delta^2}+\frac{\alpha_1\eta_1^2\xi_2}{\Delta}-\frac{2\beta_4\eta_1\eta_2\xi_2}{\Delta}-\frac{\eta_1^2\eta_2\xi_2}{\Delta^2}+\frac{\alpha_4\eta_2^2\xi_2}{\Delta}+\frac{2\eta_1\eta_2\xi_1\xi_2}{\Delta^2} \\ \frac{\beta_1\eta_1\xi_1^2}{\Delta}-\frac{\alpha_1\eta_2\xi_1^2}{\Delta}-\frac{2\alpha_1\eta_1\xi_1\xi_2}{\Delta}+\frac{2\beta_4\eta_2\xi_1\xi_2}{\Delta}+\frac{2\eta_1\eta_2\xi_1\xi_2}{\Delta^2}-\frac{\eta_2\xi_1^2\xi_2}{\Delta^2}+\frac{\beta_4\eta_1\xi_2^2}{\Delta}-\frac{\alpha_4\eta_2\xi_2^2}{\Delta}-\frac{\eta_1\xi_1\xi_2^2}{\Delta^2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\beta_1\eta_1^2\xi_1}{\Delta}+\frac{2\alpha_1\eta_1\eta_2\xi_1}{\Delta}-\frac{\beta_4\eta_2^2\xi_1}{\Delta}-\frac{\eta_1\eta_2^2\xi_1}{\Delta^2}+\frac{\eta_2^2\xi_1^2}{\Delta^2}+\frac{\alpha_1\eta_1^2\xi_2}{\Delta}-\frac{2\beta_4\eta_1\eta_2\xi_2}{\Delta}-\frac{\eta_1^2\eta_2\xi_2}{\Delta^2}+\frac{\alpha_4\eta_2^2\xi_2}{\Delta}+\frac{\eta_1^2\xi_2^2}{\Delta^2} \\ \frac{\beta_1\eta_1\xi_1^2}{\Delta}-\frac{\alpha_1\eta_2\xi_1^2}{\Delta}+\frac{\eta_2^2\xi_1^2}{\Delta^2}-\frac{2\alpha_1\eta_1\xi_1\xi_2}{\Delta}+\frac{2\beta_4\eta_2\xi_1\xi_2}{\Delta}-\frac{\eta_2\xi_1^2\xi_2}{\Delta^2}+\frac{\beta_4\eta_1\xi_2^2}{\Delta}+\frac{\eta_1^2\xi_2^2}{\Delta^2}-\frac{\alpha_4\eta_2\xi_2^2}{\Delta}-\frac{\eta_1\xi_1\xi_2^2}{\Delta^2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\beta_1\eta_1^3}{\Delta}+\frac{3\alpha_1\eta_1^2\eta_2}{\Delta}-\frac{3\beta_4\eta_1\eta_2^2}{\Delta}-\frac{2\eta_1^2\eta_2^2}{\Delta^2}+\frac{\alpha_4\eta_2^3}{\Delta}+\frac{\eta_1\eta_2^2\xi_1}{\Delta^2}+\frac{\eta_1^2\eta_2\xi_2}{\Delta^2} \\ \frac{\beta_1\eta_1^2\xi_1}{\Delta}-\frac{2\alpha_1\eta_1\eta_2\xi_1}{\Delta}+\frac{\beta_4\eta_2^2\xi_1}{\Delta}+\frac{\eta_1\eta_2^2\xi_1}{\Delta^2}-\frac{\alpha_1\eta_1^2\xi_2}{\Delta}+\frac{2\beta_4\eta_1\eta_2\xi_2}{\Delta}+\frac{\eta_1^2\eta_2\xi_2}{\Delta^2}-\frac{\alpha_4\eta_2^2\xi_2}{\Delta}-\frac{2\eta_1\eta_2\xi_1\xi_2}{\Delta^2} \end{pmatrix}.$$

Из столбцов выше, мы может видеть, что

$\alpha_1' = -\beta_2', \alpha_3' = \alpha_2' + 1, \beta_3' = \beta_2' + 1$ и $\beta_4' = -\alpha_2' \to A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$.

Матричное представление орбиты A_1 и следствие о том, что таких орбит равно q^4, корректно только в условии непересекаемости орбит в случае линейно независимых векторов $\{Tr_k\}$, что доказано в [Предложенинии 2.1]. ■

Теорема 2.5. *Любая двумерная алгебра над полем $\mathbb{Z}_2$ с точностью до эквивалентности орбит, имеет вид*:

- $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1+\alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$,
- $A_{2-3.1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{2-3.2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{2-3.3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

  $A_{2-3.4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{2-3.5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{2-3.6} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

  $A_{2-3.7} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{2-3.8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{2-3.9} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

  $A_{2-3.10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $A_{4.1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{4.2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{4.3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

  $A_{4.4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{4.5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{4.6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A_{5.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{5.2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{5.3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{5.4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

При этом элементы α_i, β_i принимают значения из $\mathbb{Z}_2$, что дает в общей сложности 52 попарно неизоморфных алгебр.

Доказательство.

Случай 1. Когда $\{Tr_k\}$ линейно независимая, описана в [Лемма 2.4].

Случай 2-3. Когда $\{Tr_k\}$ линейно зависима и $Tr_1(A) \neq 0$, а $Tr_2(A) \geq 0$.

Заметим, что для $g^{-1} \in GL(2, \mathbb{Z}_2)$ коэффициенты матрицы g^{-1} берутся из поля $\mathbb{Z}_2$, тогда для произвольной алгебры A, верно

$$\forall Tr_1(A)\ \exists g^{-1}(Tr_1(A)g^{-1}=(1,0) \implies Tr_2(A)g^{-1}=(\lambda,0)).$$

Из выше сказаного можно сделать вывод, что для любой двумерной алгебры A, у которой вектора Tr_k — линейно зависимые, найдется g^{-1}, что эквивалентная матрица $P(A)g^{-1}$, будет содержать вектора $Tr_1=(1,0)$ и $Tr_2=(\lambda,0)$ по строкам. Тогда, для того чтобы описать эквивалентные матрицы, достаточно рассмотреть произвольную алгебру, содержащую вектора $Tr_1(A)=(\alpha_1+\beta_3,\alpha_2+\beta_4)=(1,0)$ и $Tr_2(A)=(\alpha_1+\beta_2,\alpha_3+\beta_4)=(\lambda,0)$, где $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{Z}_2$. Для данных векторов Tr_k, матрица структурных констант будет иметь вид в $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_4\\ \beta_1 & \lambda-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_2\end{pmatrix}$.

Из $(1,0)g^{-1}=(1,0)$ следует $g^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \xi_2 & \eta_2\end{pmatrix}$. Рассмотрим действие элементом $g=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{\xi_2}{\eta_2} & \frac{1}{\eta_2}\end{pmatrix}$ на A.

$A'=\begin{pmatrix}\alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_2' & \alpha_4'\\ \beta_1' & \lambda-\alpha_1' & 1-\alpha_1' & -\alpha_2'\end{pmatrix}=gA(g^{-1})^{\otimes 2} \implies$

$$\begin{cases}\alpha_1'=\alpha_1+2\alpha_2\xi_2+\alpha_4\xi_2^2,\\ \alpha_2'=(\alpha_2+\alpha_4\xi_2)\eta_2,\\ \alpha_4'=\alpha_4\eta_2^2,\\ \beta_1'=\frac{\beta_1+(1+\lambda-3\alpha_1)\xi_2-3\alpha_2\xi_2^2-\alpha_4\xi_2^2}{\eta_2}.\end{cases}$$

В случае $\mathbb{Z}_2$ система имеет вид

$$\begin{cases}\alpha_1'=\alpha_1+\alpha_4\xi_2,\\ \alpha_2'=\alpha_2+\alpha_4\xi_2,\\ \alpha_4'=\alpha_4,\\ \beta_1'=\beta_1+\xi_2+\lambda\xi_2+\alpha_1\xi_2+\alpha_2\xi_2+\alpha_4\xi_2,\\ \eta_2=1.\end{cases}$$

Над полем $\mathbb{Z}_2$ матрицы для которых выполнено условие $Tr_1=(1,0)$ и $Tr_2=(\lambda,0)$, исчерпываются

$A_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \alpha_4\\ \beta_1 & \lambda-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \alpha_4\\ \beta_1 & \lambda-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \alpha_4\\ \beta_1 & \lambda & 1 & 1\end{pmatrix}$,
$A_4=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \alpha_4\\ \beta_1 & \lambda & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Для описания всех возможных орбит с точностью до эквивалентности над $\mathbb{Z}_2$, следует рассмотреть действие элементом $g=g^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ на A_i.

Рассмотрим все орбиты, где запись $A_i(\beta_1\alpha_4\lambda)$ с различными $\beta_1,\alpha_4,\lambda\in\mathbb{Z}_2$, рассматриваются как разные случаи. Для удобства дальнейшего подсчёта будем помечать справа от матриц индексом «+1» те случаи, в которых алгебра при действии группы $GL(2,\mathbb{Z}_2)$ переходит в саму себя, то есть $A_i\simeq A_i$. Такие формы считаются «однократными представителями орбит», и «$\to +1$» означает вклад одной орбиты в общий счёт.

$gA_1(g^{-1})^{\otimes 2}=$

$$\begin{cases}\alpha_1'=1+\alpha_4,\\ \alpha_2'=1+\alpha_4,\\ \alpha_4'=\alpha_4,\\ \beta_1'=\beta_1+\alpha_4+\lambda+1.\end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \alpha_4+1 & \alpha_4+1 & \alpha_4+1 & \alpha_4 \\ \beta_1+\alpha_4+\lambda+1 & \alpha_4+\lambda+1 & \alpha_4 & \alpha_4+1 \end{pmatrix},$$

$$A_1(111) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_4(011) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1(101) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_1(101) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to +1,$$

$$A_1(011) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_4(111) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1(001) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_1(001) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to +1,$$

$$A_1(110) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_4(110) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1(100) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_1(000) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1(010) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_4(010) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1(000) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_1(100) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$gA_2(g^{-1})^{\otimes 2} =$

$$\begin{cases} \alpha_1' = 1+\alpha_4, \\ \alpha_2' = \alpha_4, \\ \alpha_4' = \alpha_4, \\ \beta_1' = \beta_1+\lambda+\alpha_4. \end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \alpha_4+1 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 \\ \beta_1+\alpha_4+\lambda & \alpha_4+\lambda+1 & \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

$$A_2(111) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_3(111) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(101) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_2(001) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2(011) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_3(011) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(001) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_2(101) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2(110) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_3(010) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(100) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_2(100) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to +1,$$

$$A_2(010) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_3(110) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(000) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_2(000) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to +1.$$

$gA_3(g^{-1})^{\otimes 2} =$

$$\begin{cases} \alpha_1' = \alpha_4, \\ \alpha_2' = 1+\alpha_4, \\ \alpha_4' = \alpha_4, \\ \beta_1' = \beta_1+\alpha_4+\lambda. \end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_4+1 & \alpha_4+1 & \alpha_4 \\ \beta_1+\alpha_4+\lambda & \alpha_4+\lambda & \alpha_4+1 & \alpha_4+1 \end{pmatrix},$$
$$A_3(111) = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&1&1&1 \end{pmatrix} \simeq A_2(111) = \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix},$$
$$A_3(101) = \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\1&1&1&1 \end{pmatrix} \simeq A_3(001) = \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\0&1&1&1 \end{pmatrix},$$
$$A_3(011) = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\0&1&1&1 \end{pmatrix} \simeq A_2(011) = \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix},$$
$$A_3(001) = \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\0&1&1&1 \end{pmatrix} \simeq A_3(101) = \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\1&1&1&1 \end{pmatrix},$$
$$A_3(110) = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&0&1&1 \end{pmatrix} \simeq A_2(010) = \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\0&1&0&0 \end{pmatrix},$$
$$A_3(100) = \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\1&0&1&1 \end{pmatrix} \simeq A_3(100) = \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\1&0&1&1 \end{pmatrix} \to +1,$$
$$A_3(010) = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\0&0&1&1 \end{pmatrix} \simeq A_2(110) = \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\1&1&0&0 \end{pmatrix},$$
$$A_3(000) = \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\0&0&1&1 \end{pmatrix} \simeq A_3(000) = \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\0&0&1&1 \end{pmatrix} \to +1.$$
$gA_4(g^{-1})^{\otimes 2} =$
$$\begin{cases} \alpha_1' = \alpha_4, \\ \alpha_2' = \alpha_4, \\ \alpha_4' = \alpha_4, \\ \beta_1' = \beta_1+\alpha_4+\lambda+1. \end{cases}$$
$$\simeq \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 \\ \beta_1+\alpha_4+\lambda+1 & \alpha_4+\lambda & \alpha_4+1 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$
$$A_4(111) = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix} \simeq A_1(011) = \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\0&0&0&1 \end{pmatrix},$$
$$A_4(101) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&1&1&0 \end{pmatrix} \simeq A_4(101) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&1&1&0 \end{pmatrix} \to +1,$$
$$A_4(011) = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&1&1&0 \end{pmatrix} \simeq A_1(111) = \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\1&0&0&1 \end{pmatrix},$$
$$A_4(001) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&1&0 \end{pmatrix} \simeq A_4(001) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&1&0 \end{pmatrix} \to +1,$$
$$A_4(110) = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&1&0 \end{pmatrix} \simeq A_1(110) = \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\1&1&0&1 \end{pmatrix},$$
$$A_4(100) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&1&0 \end{pmatrix} \simeq A_4(000) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix},$$
$$A_4(010) = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \simeq A_1(010) = \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\0&1&0&1 \end{pmatrix},$$
$$A_4(000) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \simeq A_4(100) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Выше описанные орбиты имеют ярко выраженную особенность, а именно $A_i \simeq A_i$ или $A_i \simeq A_j \simeq A_i$, где $i \neq j$. Мощность различных орбит действия вида $A_i \simeq A_i$ равна $8 \to A_1(101), A_1(001), A_2(100), A_2(000), A_3(100), A_3(000), A_4(101), A_4(101)$, а мощность вида $A_i \simeq A_j \simeq A_i$ равна $\frac{4\cdot 8-8}{2} = 12$.

Выбрав представителей орбит для которых $A_i \simeq A_i$, получим

$A_1(101) \cup A_1(001) \implies A_{2-3.1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$A_2(100) \cup A_2(000) \implies A_{2-3.2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$A_3(100) \cup A_3(000) \implies A_{2-3.3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$A_4(101) \cup A_4(001) \implies A_{2-3.4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Далее выбрав случай $A_i \simeq A_j \simeq A_i$, получим

$A_4(011) \cup A_4(111) \cup A_4(110) \cup A_4(010) \implies A_{2-3.5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$A_1(000) \implies A_{2-3.6} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$A_3(111) \cup A_3(011) \cup A_3(010) \cup A_3(110) \implies A_{2-3.7} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$A_2(001) \implies A_{2-3.8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$A_3(001) \implies A_{2-3.9} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$A_4(000) \implies A_{2-3.10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Случай 4. Когда $Tr_1(A) = (0,0)$ и $Tr_2(A) \neq 0$.

$A' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_2 & \alpha'_4 \\ \beta'_1 & 1-\alpha'_1 & -\alpha'_1 & -\alpha'_2 \end{pmatrix} = gA(g^{-1})^{\otimes 2} \implies$

$$\begin{cases} \alpha'_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2\xi_2 + \alpha_4\xi_2^2, \\ \alpha'_2 = (\alpha_2 + \alpha_4\xi_2)\eta_2, \\ \alpha'_4 = \alpha_4\eta_2^2, \\ \beta'_1 = \frac{\beta_1 + \xi_2 - 3\alpha_1\xi_2 - 3\alpha_2\xi_2^2 - \alpha_4\xi_2^3}{\eta_2}. \end{cases}$$

В случае $\mathbb{Z}_2$ система имеет вид

$$\begin{cases} \alpha'_1 = \alpha_1 + \alpha_4\xi_2, \\ \alpha'_2 = \alpha_2 + \alpha_4\xi_2, \\ \alpha'_4 = \alpha_4, \\ \beta'_1 = \beta_1 + \xi_2 + \alpha_1\xi_2 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_4\xi_2, \\ \eta_2 = 1. \end{cases}$$

Над полем $\mathbb{Z}_2$ матрицы для которых выполнено условие $Tr_1 = (0,0)$ и $Tr_2 = (1,0)$, исчерпываются

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \alpha_4 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Аналогично случаю 2—3. Для описания орбит над $\mathbb{Z}_2$, возьмем фиксированный обратимый элемент $g = g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Запись $A_i(\beta_1\alpha_4)$ с различными коэффициентами $\beta_1, \alpha_4 \in \mathbb{Z}_2$, рассматриваются как различные случаи.

$$gA_1(g^{-1})^{\otimes 2} = \begin{cases} \alpha_1' = 1+\alpha_4, \\ \alpha_2' = 1+\alpha_4, \\ \alpha_4' = \alpha_4, \\ \beta_1' = \beta_1+\alpha_4+1. \end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \alpha_4+1 & \alpha_4+1 & \alpha_4+1 & \alpha_4 \\ \beta_1+\alpha_4+1 & \alpha_4 & \alpha_4+1 & \alpha_4+1 \end{pmatrix},$$

$$A_1(11) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_4(11) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1(10) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_1(00) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1(01) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_4(01) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1(00) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_1(10) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$gA_2(g^{-1})^{\otimes 2} = \begin{cases} \alpha_1' = 1+\alpha_4, \\ \alpha_2' = \alpha_4, \\ \alpha_4' = \alpha_4, \\ \beta_1' = \beta_1+\alpha_4. \end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \alpha_4+1 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 \\ \beta_1+\alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4+1 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

$$A_2(11) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_3(01) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(10) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_2(10) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to +1,$$

$$A_2(01) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_3(11) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(00) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_2(00) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to +1.$$

$$gA_3(g^{-1})^{\otimes 2} = \begin{cases} \alpha_1' = \alpha_4, \\ \alpha_2' = 1+\alpha_4, \\ \alpha_4' = \alpha_4, \\ \beta_1' = \beta_1+\alpha_4. \end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_4+1 & \alpha_4+1 & \alpha_4 \\ \beta_1+\alpha_4 & \alpha_4+1 & \alpha_4 & \alpha_4+1 \end{pmatrix},$$

$$A_3(11) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_2(01) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3(10) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_3(10) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to +1,$$

$$A_3(01) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_2(11) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3(00) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_3(00) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to +1.$$

$gA_4(g^{-1})^{\otimes 2} =$

$$\begin{cases} \alpha_1' = \alpha_4, \\ \alpha_2' = \alpha_4, \\ \alpha_4' = \alpha_4, \\ \beta_1' = \beta_1 + \alpha_4 + 1. \end{cases}$$

$\simeq \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 \\ \beta_1 + \alpha_4 + 1 & \alpha_4 + 1 & \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix},$

$A_4(11) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_1(11) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$A_4(10) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_4(00) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$A_4(01) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_1(01) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$A_4(00) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_4(10) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Мощность орбит вида $A_i \simeq A_i$ равна 4 $\to A_2(10), A_2(00), A_3(10), A_3(00)$, а $A_i \simeq A_j \simeq A_i$ равна $\frac{4\cdot 4-4}{2} = 6$.

Выбрав представителей орбит для которых $A_i \simeq A_i$, получим

$A_2(10) \cup A_2(00) \implies A_{4.1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$A_3(10) \cup A_3(00) \implies A_{4.2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Далее выбрав случай $A_i \simeq A_j \simeq A_i$, получим

$A_4(11) \cup A_4(01) \implies A_{4.3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$A_1(00) \implies A_{4.4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$A_2(11) \cup A_2(01) \implies A_{4.5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$A_4(00) \implies A_{4.6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Случай 5. Когда $Tr_1(A) = Tr_2(A) = (0,0)$.

Пусть $g^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$ и $\Delta = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \neq 0$.

$A' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_2' & \alpha_4' \\ \beta_1' & -\alpha_1' & -\alpha_1' & -\alpha_2' \end{pmatrix} = gA(g^{-1})^{\otimes 2} \implies$

$$\implies \begin{cases} \alpha_1' = \frac{1}{\Delta}(-\beta_1\eta_1\xi_1^2 + \alpha_1\eta_2\xi_1^2 + 2\alpha_1\eta_1\xi_1\xi_2 + 2\alpha_2\eta_2\xi_1\xi_2 + \alpha_2\eta_1\xi_2^2 + \alpha_4\eta_2\xi_2^2), \\ \alpha_2' = -\frac{1}{\Delta}(\beta_1\eta_1^2\xi_1 - 2\alpha_1\eta_1\eta_2\xi_1 - \alpha_2\eta_2^2\xi_1 - \alpha_1\eta_1^2\xi_2 - 2\alpha_2\eta_1\eta_2\xi_2 - \alpha_4\eta_2\xi_2^2), \\ \alpha_4' = -\frac{1}{\Delta}(\beta_1\eta_1^3 - 3\alpha_1\eta_1^2\eta_2 - 3\alpha_2\eta_1\eta_2^2 - \alpha_4\eta_2^3) = -\frac{1}{\Delta}\eta_1^3 P(\frac{\eta_2}{\eta_1}) = -\frac{1}{\Delta}\eta_2^3 Q(\frac{\eta_1}{\eta_2}), \\ \beta_1' = \frac{1}{\Delta}(\beta_1\xi_1^3 - 3\alpha_1\xi_1^2\xi_2 - 3\alpha_2\xi_1\xi_2^2 - \alpha_4\xi_2^3) = -\frac{1}{\Delta}\xi_1^3 P(\frac{\xi_2}{\xi_1}) = -\frac{1}{\Delta}\xi_2^3 Q(\frac{\xi_1}{\xi_2}). \end{cases}$$

В случае $\mathbb{Z}_2$ система имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_1' = \beta_1\eta_1\xi_1 + \alpha_1\eta_2\xi_1 + \alpha_2\eta_1\xi_2 + \alpha_4\eta_2\xi_2, \\ \alpha_2' = \beta_1\eta_1\xi_1 + \alpha_2\eta_2\xi_1 + \alpha_1\eta_1\xi_2 + \alpha_4\eta_2\xi_2, \\ \alpha_4' = \beta_1\eta_1 + \alpha_1\eta_1\eta_2 + \alpha_2\eta_1\eta_2 + \alpha_4\eta_2, \\ \beta_1' = \beta_1\xi_1 + \alpha_1\xi_1\xi_2 + \alpha_2\xi_1\xi_2 + \alpha_4\xi_2. \end{cases}$$

Группа обратимых матриц размером 2×2 над полем $\mathbb{Z}_2$, представляется как
$e=g_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $g_3=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $g_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $g_5=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $g_6=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.
Элементы g_i^{-1}, где $i\in\{2,3,4,5,6\}$, обладают следующими свойствами
$g_2^{-1}=g_2, g_3^{-1}=g_3, g_4^{-1}=g_5, g_5^{-1}=g_4, g_6^{-1}=g_6$.

В случае $\mathbb{Z}_2$ матрицы для которых выполнено условие $Tr_1=(0,0)$ и $Tr_2=(0,0)$, исчерпываются
$A_1=\begin{pmatrix}1&1&1&\alpha_4\\\beta_1&1&1&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0&0&\alpha_4\\\beta_1&1&1&0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0&1&1&\alpha_4\\\beta_1&0&0&1\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0&0&0&\alpha_4\\\beta_1&0&0&0\end{pmatrix}$.

Для описания случая 5 нам достаточно рассмотреть действие всех элементов g_i на $A_i(\beta_1,\alpha_4)$.

$g_2A_1(g_2^{-1})^{\otimes 2}=g_2A_1(g_2)^{\otimes 2}=$
$$\begin{cases}\alpha_1'=\beta_1+1,\\\alpha_2'=\beta_1+1,\\\alpha_4'=\beta_1+\alpha_4,\\\beta_1'=\beta_1.\end{cases}$$
$\simeq\begin{pmatrix}\beta_1+1&\beta_1+1&\beta_1+1&\beta_1+\alpha_4\\\beta_1&\beta_1+1&\beta_1+1&\beta_1+1\end{pmatrix}$,

$g_3A_1(g_3^{-1})^{\otimes 2}=g_3A_1(g_3)^{\otimes 2}=$
$$\begin{cases}\alpha_1'=\alpha_4+1,\\\alpha_2'=\alpha_4+1,\\\alpha_4'=\alpha_4,\\\beta_1'=\beta_1+\alpha_4.\end{cases}$$
$\simeq\begin{pmatrix}\alpha_4+1&\alpha_4+1&\alpha_4+1&\alpha_4\\\beta_1+\alpha_4&\alpha_4+1&\alpha_4+1&\alpha_4+1\end{pmatrix}$,

$g_4A_1(g_4^{-1})^{\otimes 2}=g_4A_1(g_5)^{\otimes 2}=$
$$\begin{cases}\alpha_1'=\alpha_4+1,\\\alpha_2'=\alpha_4+1,\\\alpha_4'=\beta_1+\alpha_4,\\\beta_1'=\alpha_4.\end{cases}$$
$\simeq\begin{pmatrix}\alpha_4+1&\alpha_4+1&\alpha_4+1&\beta_1+\alpha_4\\\alpha_4&\alpha_4+1&\alpha_4+1&\alpha_4+1\end{pmatrix}$,

$g_5A_1(g_5^{-1})^{\otimes 2}=g_5A_1(g_4)^{\otimes 2}=$
$$\begin{cases}\alpha_1'=\beta_1+1,\\\alpha_2'=\beta_1+1,\\\alpha_4'=\beta_1,\\\beta_1'=\beta_1+\alpha_4.\end{cases}$$
$\simeq\begin{pmatrix}\beta_1+1&\beta_1+1&\beta_1+1&\beta_1\\\beta_1+\alpha_4&\beta_1+1&\beta_1+1&\beta_1+1\end{pmatrix}$,

$g_6A_1(g_6^{-1})^{\otimes 2}=g_6A_1(g_6)^{\otimes 2}=$
$$\begin{cases}\alpha_1'=1,\\\alpha_2'=1,\\\alpha_4'=\beta_1,\\\beta_1'=\alpha_4.\end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \beta_1 \\ \alpha_4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1(11) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_4(10) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_4(01) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to +1,$$

$$A_1(01) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_4(11) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_1(10) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to +1,$$

$$A_1(00) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to +1.$$

$$g_2 A_2 (g_2^{-1})^{\otimes 2} = g_2 A_2 (g_2)^{\otimes 2} =$$

$$\begin{cases} \alpha_1' = \beta_1 + 1, \\ \alpha_2' = \beta_1, \\ \alpha_4' = \beta_1 + \alpha_4 + 1, \\ \beta_1' = \beta_1. \end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \beta_1 + 1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 + \alpha_4 + 1 \\ \beta_1 & \beta_1 + 1 & \beta_1 + 1 & \beta_1 \end{pmatrix},$$

$$g_3 A_2 (g_3^{-1})^{\otimes 2} = g_3 A_2 (g_3)^{\otimes 2} =$$

$$\begin{cases} \alpha_1' = \alpha_4 + 1, \\ \alpha_2' = \alpha_4, \\ \alpha_4' = \alpha_4, \\ \beta_1' = \beta_1 + \alpha_4 + 1. \end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \alpha_4 + 1 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 \\ \beta_1 + \alpha_4 + 1 & \alpha_4 + 1 & \alpha_4 + 1 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

$$g_4 A_2 (g_4^{-1})^{\otimes 2} = g_4 A_2 (g_5)^{\otimes 2} =$$

$$\begin{cases} \alpha_1' = \alpha_4, \\ \alpha_2' = \alpha_4 + 1, \\ \alpha_4' = \beta_1 + \alpha_4 + 1, \\ \beta_1' = \alpha_4. \end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_4 + 1 & \alpha_4 + 1 & \beta_1 + \alpha_4 + 1 \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 + 1 \end{pmatrix},$$

$$g_5 A_2 (g_5^{-1})^{\otimes 2} = g_5 A_2 (g_4)^{\otimes 2} =$$

$$\begin{cases} \alpha_1' = \beta_1, \\ \alpha_2' = \beta_1 + 1, \\ \alpha_4' = \beta_1, \\ \beta_1' = \beta_1 + \alpha_4 + 1. \end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_1 + 1 & \beta_1 + 1 & \beta_1 \\ \beta_1 + \alpha_4 + 1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 + 1 \end{pmatrix},$$

$$g_6 A_2 (g_6^{-1})^{\otimes 2} = g_6 A_2 (g_6)^{\otimes 2} =$$

$$\begin{cases} \alpha_1' = 0, \\ \alpha_2' = 1, \\ \alpha_4' = \beta_1, \\ \beta_1' = \alpha_4. \end{cases}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \beta_1 \\ \alpha_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(11) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_3(11) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to +1,$$

$$A_2(00) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_2(01) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq A_2(10) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\simeq A_3(00) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_3(01) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq A_3(10) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to +1.$$

Заметим, что на данном этапе все представители орбит действия представлены, кроме $A_4(00) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to +1$

Мощность орбит вида $A_i \simeq A_i$ равна $2 \to A_1(00), A_4(00)$, а $A_i \simeq A_j \simeq A_i$ равна 4.

Выберем представителей орбит

$A_4(10) \cup A_4(11) \implies A_{5.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_1(00) \implies A_{5.2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_2(11) \implies A_{5.3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_2(00) \implies A_{5.4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_4(00) \implies A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ■

Проверка по лемме Бернсайда

Группа $G = GL(2, \mathbb{Z}_2)$ порядка 6 действует на множестве матриц структурных констант $\mathcal{M}$ ($|\mathcal{M}| = 2^8 = 256$) по формуле:

$$g \cdot A = gA(g^{-1})^{\otimes 2}$$

По лемме Бернсайда число орбит:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

Вычислим $|X^g| = |\{x \in X \mid g \cdot x = x\}|$ для каждого $g \in G$:

- $g_1 = I$: $X^{g_1} = \mathcal{M}$, $|X^{g_1}| = 256$
- $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Условие $g_2 \cdot A = A$ дает систему:

$$\beta_1 = 0, \beta_4 = 0, \beta_2 = \beta_3, \alpha_2 = \alpha_3$$

  4 свободных параметра, $|X^{g_2}| = 2^4 = 16$
- $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: По симметрии $|X^{g_3}| = 16$
- $g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: Система из 2 уравнений, $|X^{g_4}| = 2^2 = 4$
- $g_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: По симметрии $|X^{g_5}| = 4$
- $g_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: Система из 4 уравнений, $|X^{g_6}| = 16$

Подставляя в формулу Бернсайда:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| = \frac{256+16+16+4+4+16}{6} = \frac{312}{6} = 52$$

Результат совпадает с Теоремой 2.5.

Далее, под обозначением $|A_i| = |Orb(A_i)|$, мы будем понимать *число эквивалентных орбит действия.*

Опишем в теоретико-групповом смысле двумерную алгебру над $\mathbb{Z}_2$. Т.е. число изоморфных умножений на абелевой группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Умножения на данной группе задают структуру кольца. Имеем алгебраическую систему, модуль которого задается с поля $\mathbb{Z}_2$, сама система задает кольцо. Получаем двумерную алгебру над $\mathbb{Z}_2$. Применяя [Теорема 2.5], получаем следующее следствие.

Следствие 2.6. *Количество не изоморфных умножений на абелевой группе* $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, *равно* $|\sum A_i| = 52$, где $|A_i| = |Orb(A_i)|$ — число орбит действия $(i = 1, (2-3.1), ..., 5.3, 5.4, 0)$.

Алгебры, полученные из [Теоремы 2.5], являются результатом рассмотрения пяти подмножеств, связанных с $\{Tr_k\}$. В связи с этим, интерес представляет подсчитать количество всех матриц, относящихся к данным формам, и тем самым разделить общее число матриц и число эквивалентных матриц. Дальнейшие рассуждения предполагают обозначение *решетки* $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$ *порожденными векторами* $\{Tr_k\}$, как Tr_k, а также $Tr_1 = Tr_1(A)$ и $Tr_2 = Tr_2(A)$, где A — произвольная двумерная алгебра.

Эта задача вытекает из описания строения *решетки* Tr_k над полем $\mathbb{Z}_q$. Для этого введем некоторые обозначения:

- $|A_i|^*$ — *количество матриц, эквивалентных матрицам* A_i $(i = 1, (2-3.1), ..., 5.3, 5.4, 0)$;
- $\odot$ — *узлы, лежащие на перпендикулярных осях первой четверти и диагонали, исходящей из начала координат квадрата* q^2 (за исключением узла $(0,0)$);
- $\odot^*$ — *узлы, отличные от узлов* $\odot$;
- $\odot_{ij}$ — *число представлений* $Tr_k = (i,j)$ в узле (i,j), где коэффциенты $i, j \in \mathbb{Z}_q$, $k \in \{1,2\}$.

Пример. При $q = 2$ и $Tr_1 = (0,1)$, мы получим число представлений
$\odot_{01} = |\{(0+0, 1+0), (0+0, 0+1), (1+1, 1+0), (1+1, 0+1)\}| = 2\cdot 2 = 2^2$. При $q = 3$, имеем
$\odot_{01} = |\{(0+0, 0+1), (0+0, 1+0), (0+0, 2+2), (1+2, 0+1),$
$(1+2, 1+0), (1+2, 2+2), (2+1, 1+0), (2+1, 0+1), (2+1, 2+2)\}| = 3\cdot 3 = 3^2$.

Главный вывод примера

Рассмотренный пример наглядно демонстрирует общее комбинаторное свойство: для произвольного вектора следов $Tr_k = (i,j)$, где $i, j \in \mathbb{Z}_q$, количество способов его реализации через коэффициенты матрицы структурных констант A равно q^2.

Формально:

$$\odot_{ij} = q^2 \quad \text{для всех } i, j \in \mathbb{Z}_q$$

Это следует из того, что для каждой из двух координат вектора Tr_k существует ровно q различных пар элементов поля $\mathbb{Z}_q$, дающих в сумме требуемое значение:

- Для координаты i: $|\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q : \alpha + \beta = i\}| = q$
- Для координаты j: $|\{(\gamma,\delta) \in \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q : \gamma + \delta = j\}| = q$

Таким образом, общее число представлений составляет $q \cdot q = q^2$. Данное комбинаторное тождество является фундаментальным для подсчёта мощности классов эквивалентности в классификации двумерных алгебр.

За $\sum\limits_q \odot^*$ и $\sum\limits_q \odot$ обозначим число узлов (точек) решетки Tr_k над полем $\mathbb{Z}_q$ (целочисленной решетке, первая координатная четверть).

Заметим, что при $q = 2$ узлы вида $\odot^*$ отсутствуют. Далее, во всех результатах q рассматривается в теоретико-числовом формате.

Утверждение 2.7. *Решетка Tr_k над полем $\mathbb{Z}_q$, обладает следующими свойствами*:

1. $\sum\limits_q \odot^* + \sum\limits_q \odot = q^2 - 1$, где $\sum\limits_q \odot^* = (q-1)(q-2)$, $\sum\limits_q \odot = 3(q-1)$;
2. Число линейно независимых векторов $\{Tr_k\}$, когда $Tr_i \in \{\odot, \odot^*\}$ равно $q^2 - q$;
3. $|GL(2, \mathbb{Z}_q)| = (q^2-1)(q^2-q)$;
4. $|GL(n, \mathbb{Z}_q)| = \prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k) = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$.

Доказательство.

1. Решетка Tr_k над $\mathbb{Z}_q$ представляется как квадрат, отсюда $\sum\limits_q \odot^* + \sum\limits_q \odot = q^2 - 1$. Мы исключаем из рассмотрения узел $(0,0)$ квадрата q^2. Рассмотрев число узлов расположенных на осях и дигональной линии, получим $\sum\limits_q \odot = 3(q-1)$, а остальные узлы найдем путём вычитания из числа узлов квадрата, получим $q^2 - 1 - \sum\limits_q \odot = \sum\limits_q \odot^* = (q-1)(q-2)$.
2. Легко заметить, что при размещении Tr_k в $\odot$ для линейной независимости другого вектора, существуют допустимые узлы, расположенные вне направления Tr_k, а их число равно $(q^2-1-(q-1)) = q^2-q$. Если же разместить Tr_k в $\odot^*$, то число допустимых расположений другого вектора, будет также $q^2 - q$, так как всегда найдется $q-1$ (исключаем узел $(0,0)$) пар к узлу $\odot^*$, которые в сумме с парой дадут $(0,0)$ $(Tr_1 = \lambda \cdot Tr_2,\ \lambda \in \mathbb{Z}_q)$.
3. Из пункта 1 и 2 вытекает $\forall k \in \{1,2\}\ Tr_k \in \{\odot, \odot^*\} \to (q^2-1)(q^2-q)$.
4. Для построения $g \in GL(n, \mathbb{Z}_q)$ на k-м шаге $(k = 0, \ldots, n-1)$ выбираем $(k+1)$-й столбец из $q^n - q^k$ векторов, линейно независимых с предыдущими k столбцами. ∎

Предложение 2.8. *Число матриц $|A|^*$ над полем $\mathbb{Z}_q$, когда система является*:

1. $\{Tr_k\}$ — линейно независимой, равно
$$|A_1|^* = q^8 - q^7 - q^6 + q^5;$$
2. $\{Tr_k\} \wedge \{Tr_1 \neq 0, Tr_2 \geq (0,0)\}$ — линейно зависимой, равно
$$\sum_{i=2-3.1}^{2-3.10} |A_i|^* = q^7 - q^5;$$
3. $\{Tr_1 = 0, Tr_2 \neq 0\}$, равно
$$\sum_{i=4.1}^{4.6} |A_i|^* = q^6 - q^4;$$

4. $\{Tr_1 = 0, Tr_2 = 0\}$, равно

$$\sum_{i=5.1}^{5.4} |A_i|^* + |A_0|^* = q^4.$$

Доказательство. Для того чтобы подсчитать число матриц, при которых данная система $\{Tr_k\}$ относится к пяти случаям, мы будем ориентироваться на $|MSC(A)| = |A| = q^8$, где A — произвольная двумерная алгебра над $\mathbb{Z}_q$. Подмножества, состоящие из случаев 2—3 системы $\{Tr_k\}$, мы объединяем в единое семейство.

Заметим, что для произвольной пары (Tr_1, Tr_2) количество матриц A, реализующих эту пару, равно q^4, поскольку параметры β_1 и α_4 не влияют на следы и дают множитель q^2, а оставшиеся 6 параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, связанных уравнениями, при фиксированных Tr_1 и Tr_2 образуют ещё число представлений $\odot_{ij} = q^2$ (что даёт ещё q^2 решений).

Случай 1: $\{Tr_1, Tr_2\}$ линейно независимы.
Количество линейно независимых пар: $(q^2-1)(q^2-q)$.
Тогда число матриц:

$$|A_1|^* = (q^2-1)(q^2-q)\cdot q^4 = q^4(q^2-1)(q^2-q).$$

Случай 2–3: $\{Tr_1, Tr_2\}$ линейно зависимы и $Tr_1 \neq 0$.
Количество таких пар: $(q^2-1)\cdot q$.
Тогда число матриц:

$$\sum_{i=2-3.1}^{2-3.10} |A_i|^* = (q^2-1)\cdot q\cdot q^4 = q^5(q^2-1).$$

Случай 4: $Tr_1 = (0,0)$ и $Tr_2 \neq 0$.
Количество таких пар: $1\cdot(q^2-1)$.
Тогда число матриц:

$$\sum_{i=4.1}^{4.6} |A_i|^* = (q^2-1)\cdot q^4.$$

Случай 5: $Tr_1 = Tr_2 = (0,0)$.
Количество таких пар: 1.
Тогда число матриц:

$$\sum_{i=5.1}^{5.4} |A_i|^* + |A_0|^* = 1\cdot q^4 = q^4.$$

Суммируя по всем случаям, получаем общее число матриц:

$$q^4(q^2-1)(q^2-q) + q^5(q^2-1) + q^4(q^2-1) + q^4 = q^8,$$

что подтверждает корректность разбиения. ■

3. Заключение

В данной работе проведено исследование действия группы $GL(2,\mathbb{Z}_2)$ на множестве матриц структурных констант двумерных алгебр над полем $\mathbb{Z}_2$. Использование отображения $P(A) = (Tr_1(A), Tr_2(A))$, связывающего структуру алгебры с линейными формами двойственного пространства, позволило получить матричное представление орбит действия и выявить их взаимосвязь с классами эквивалентных алгебр.

В отличие от работы H. Ahmed, U. Bekbaev, I. Rakhimov (*Complete Classification of Two-Dimensional Algebras*, 2018) [3], где классификация приводится без строгого доказательства непересекаемости орбит, в настоящем исследовании строго доказано, что орбиты действия группы $GL(2,\mathbb{Z}_2)$ являются **непересекающимися**. Это позволило построить полную матричную и конечную классификацию двумерных алгебр над полем $\mathbb{Z}_2$, состоящую из **52 попарно неизоморфных алгебр**.

Следует отметить, что классификация, представленная в работе [4], корректна лишь в частных случаях и не учитывает пересечение орбит действия группы при различных характеристиках поля. В частности, при характеристике 2 непересекаемость орбит выполняется лишь *формально*, поскольку конечность поля $\mathbb{Z}_2$ исключает появление непрерывных параметров, и это можно рассматривать скорее как частное везение конструкции. Однако при переходе к произвольным полям характеристики, не равной 2 и 3, их описание орбит перестаёт быть корректным: появляются различные алгебры, которые фактически оказываются изоморфными. Например, над полем $\mathbb{F}_5$ алгебры $A_2(0,1,0)$ и $A_2(0,4,0)$ оказываются изоморфными при замене базиса $g = \mathrm{diag}(1,4)$, поскольку в $\mathbb{F}_5$ элемент 4 совпадает с -1. Этот пример демонстрирует, что предложенная в [4] классификация не гарантирует непересекаемость орбит действия группы $GL(2,\mathbb{F})$ и, следовательно, не является строгой при произвольной характеристике поля. Настоящая работа устраняет данный недостаток в строгом виде. Для случая линейной независимости векторов $\{Tr_k\}$ непересекаемость орбит действия группы $GL(2,\mathbb{Z}_2)$ доказана в **Предложение 2.1**, из которого следует, что число различных орбит $V_0 = \{A : detP(A) \neq 0\}$ равно q^4, что, в свою очередь, гарантирует корректность классификации и отсутствие изоморфных алгебр в данном случае. Для оставшихся конфигураций, соответствующих линейно зависимым или нулевым векторам $\{Tr_k\}$, непересекаемость орбит *подтверждена прямой проверкой всех возможных случаев действия группы* $GL(2,\mathbb{Z}_2)$. Такое сочетание обеспечивает полноту и корректность полученной классификации.

Существенным достоинством настоящего исследования является **Теорема 2.5**, в которой приведено явное перечисление всех двумерных алгебр над полем $\mathbb{Z}_2$ с точностью до эквивалентности орбит, а также **Предложение 2.8**, устанавливающее структуру действия группы на множестве матриц структурных констант и задающее систему непересекающихся орбит, эквивалентных относительно τ-действия. Эти результаты обеспечивают не только полноту классификации, но и позволяют интерпретировать задачу в терминах действия группы на пространстве алгебр, что подчёркивает глубину и оригинальность подхода.

Таким образом, результаты настоящей работы уточняют и корректируют известную классификацию для случая конечного поля $\mathbb{Z}_2$, формируя строгую математическую основу для дальнейшего обобщения на поля $\mathbb{Z}_q$ при $q > 2$.

Сформулируем несколько задач для дальнейшего исследования:

1. подробно рассмотреть двумерные алгебры над полем $\mathbb{Z}_2$: ассоциативные, ассоциативные с единицей, алгебры Ли, Йордановы алгебры;

2. дать матричную классификацию двумерных алгебр над полем $\mathbb{Z}_3$;

3. дать матричную классификацию двумерных алгебр над полем $\mathbb{Z}_{q>3}$;

4. описать все возможные умножения на абелевой группе $\mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_q$, где q — не простое число.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petersson, H.P., Scherer, M. The number of nonisomorphic two-dimensional algebras over a finite field // Results Math. (2004), 42(1–2). pp. 137-–152.

2. Petersson, H.P. The classification of two-dimensional nonassociative algebras // Results Math. 2000. 37(1–2). pp. 120-–154.

3. Bekbaev U. Complete classification of two-dimensional algebras over any basic field // AIP Conference Proceedings 2880, 030001 (2023).

4. Nikolaas D. Verhulst. Counting Finite-Dimensional Algebras Over Finite Field // Results Math. 2020. pp. 75–153.

5. Althoen, S.C., Hansen, K.D. Two-dimensional real algebras with zero divisors // Acta Sci. Math (Szeged). 1992. 56. pp. 23-–42.

6. Henderson, H.V., Searle, S.R. The vec-permutation matrix, the vec operator and Kronecker products: a review // Linear Multilinear Algebra. 1981. 9(4). pp. 271-–288.

7. Rotman, J.J. An Introduction to the Theory of Groups. Grad // Texts in Math, vol. 148. Springer, Berlin. 2012. ISBN: 9781461241768.

8. Röhrl, H. A. A theorem on non-associative algebras and its applications to differential equations // Manuscripta Math. 21. 1977. Pp. 181–187.

9. Röhrl, H. A. Finite dimensional algebras without nilpotent elements over algebraically closed fields. *Arch. Math.*. 32. 1979. Pp. 10–12.

10. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. I // М.: Мир. 1973.

11. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. II // М.: Мир. 1977.

12. Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. 1941. Т. 9(51). № 1. С. 165–181.

13. Arnold D. M. Finite rank torsion free abelian groups and rings // Lecture Notes in Math. 1982. Vol. 931. Springer. NY, .

14. Szele T. Nilpotent Artinian rings // Publ. Math. Debrecen. 4. 1955, pp. 71–78.

15. Feigelstock S. Additive groups of rings. Vol. 1, 2 // Pitman Advanced Publishing Program. 1983. 1986.

REFERENCES

1. Petersson, H.P., Scherer, M. 2004, “The number of nonisomorphic two-dimensional algebras over a finite field”, *Results Math.* 42(1–2), pp. 137–152.

2. Petersson, H.P. 2000, “The classification of two-dimensional nonassociative algebras”, *Results Math.* 37(1–2), pp. 120–154.

3. Bekbaev, U. 2023, “Complete classification of two-dimensional algebras over any basic field”, *AIP Conference Proceedings* 2880, 030001.

4. Verhulst, N.D. 2020, “Counting finite-dimensional algebras over finite field”, *Results Math.* 75, pp. 153.

5. Althoen, S.C., Hansen, K.D. 1992, “Two-dimensional real algebras with zero divisors”, *Acta Sci. Math (Szeged)* 56, pp. 23–42.

6. Henderson, H.V., Searle, S.R. 1981, “The vec-permutation matrix, the vec operator and Kronecker products: a review”, *Linear Multilinear Algebra*, 9(4), pp. 271–288.

7. Rotman, J.J. 2012, “An Introduction to the Theory of Groups”, Grad. *Texts in Math*, vol. 148. Springer, Berlin. ISBN: 9781461241768.

8. Röhrl, H.A. 1977, “A theorem on non-associative algebras and its applications to differential equations”, *Manuscripta Math.* 21, pp. 181–187.

9. Röhrl, H.A. 1979, “Finite dimensional algebras without nilpotent elements over algebraically closed fields”, *Arch. Math.* 32, pp. 10–12.

10. Fuchs, L. 1970, “Infinite abelian groups. vol. 1”,*Academic Press.*

11. Fuchs, L. 1973, “Infinite abelian groups. vol. 2”, *Academic Press.*

12. Kulikov, L. Ya. 1941, “On the theory of abelian groups of arbitrary power”, *Mat. Sbornik*, vol. 16, pp. 129–162 (Russian).

13. Arnold, D.M. 1982, “Finite rank torsion-free abelian groups and rings”, *Lecture Notes in Math.* Vol. 931. Springer, NY.

14. Szele, T. 1955, “Nilpotent Artinian rings”, *Publ. Math.* Debrecen, 4, pp. 71–78.

15. Feigelstock, S. 1983, “Additive groups of rings”, Vol. 1, 2. *Pitman Advanced Publishing Program*, 1986.

Получено: 09.01.2025
Принято в печать: 17.10.2025