ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 511.174 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-383-397

Сумма произведений мультипликативных функций по числам, простые делители которых лежат в заданных интервалах

У. Ч. Чариев

Чариев Умидилла Чариевич — кандидат физико-математических наук, Таджикский государственный педагогический университет им. Садриддина Айни (г. Душанбе, Таджикистан).
e-mail: umidchoriyev@mail.ru

Аннотация

Суммирование мультипликативных функций встречается едва ли не в половине задач аналитической теории чисел. Центральное место в вопросе суммирования значений мультипликативных функций занимают вопросы об асимптотическом поведении сумм вида

$$m(X) = \sum_{n \leq X} f(n),$$

при $X \to \infty$, где $f(n)$ — мультипликативная функция натурального аргумента. Настоящая статья посвящена исследованию суммированием мультипликативных функций по числам, простые делители которых лежат в заданных интервалах. Получена асимптотическая формула для сумм произведения мультипликативных функций, простые делители которых лежат в заданных интервалах.

Ключевые слова: асимптотика, сумма произведений мультипликативных функций, простые делители, заданные интервалы, натуральный аргумент, интегральные уравнения, обобщённая функция Мангольдта, простые числа, комплексные числа, метод решета.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
Чариев У. Ч. Сумма произведений мультипликативных функций по числам, простые делители которых, лежат в заданных интервалах // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 383–397.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 511.174 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-383-397

The sum of the products of multiplicative functions over numbers whose prime divisors lie in the specified intervals

U. Ch. Chariyev

Chariyev Umidilla Charievich — candidate of physical and mathematical sciences, Tajik State Pedagogical University (Dushanbe) named after Sadriddin Ayni (Dushanbe, Tadjikistan).
e-mail: umidchoriyev@mail.ru

Abstract

Summation of multiplicative functions is found in almost half of the problems of analytical number theory. The central place in the question of summing the values of multiplicative functions is occupied by questions about the asymptotic behavior of sums of the form

$$m(X) = \sum_{n \le X} f(n),$$

for $X \to \infty$, where $f(n)$ is a multiplicative function of a natural argument. This article is devoted to the study of summation of multiplicative functions over numbers whose prime divisors lie in specified intervals. An asymptotic formula is obtained for the sums of the product of multiplicative functions whose prime divisors lie in specified intervals.

Keywords: asymptotics, sum of products of multiplicative functions, prime divisors, given intervals, natural argument, integral equations, generalized Mangoldt function, prime numbers, complex numbers, sieve method.

Bibliography: 11 titles.

For citation:
Chariyev, U. Ch. 2025, "The sum of the products of multiplicative functions over numbers whose prime divisors lie in the specified intervals" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 383–397.

1. Введение

В теории суммирования значений мультипликативных функций широкое применение имеет следующая идея: по поведению суммы

$$\sum_{p \le X} f(p), \tag{1.1}$$

восстанавливается асимптотическое поведение суммы

$$m(X) = \sum_{n \le X} f(n), \tag{1.2}$$

при $X \to \infty$, где $f(n)$ - мультипликативная функция натурального аргумента. Оценка суммы (1.1) может быть произведена на основе асимптотических законов распределения простых чисел. Таким образом, асимптотические законы распределения простых чисел находят применение в вопросе о суммировании значений мультипликативных функций.

Основной результат настоящей статьи получен методом, который состоит в систематическом применении специальных интегральных уравнений. Сведение задачи к интегральному уравнению проводится по следующей схеме. Для произвольной мультипликативной функции $f(n)$ вводится аналог функции Мангольдта $\Lambda_f(n)$, которая определяется равенством

$$f(n)\ln n = \sum_{d/n} f/(d) \cdot \Lambda_f\left(\frac{n}{d}\right). \tag{1.3}$$

Асимптотика

$$\sum_{n \le X} \Lambda_f(n)$$

обычно является следствием закона распределения простых чисел. Суммирование (1.3) по всем $n \le X$, приводит к соотношению, которое можно рассматривать как интегральное уравнение относительно суммы (1.2).

В методе решета, в задачах о наименьшем невычете, задаче о разности последовательных простых чисел и в других задачах теории чисел возникает необходимость оценки сумм вида

$$\sum_{\substack{n\le X^t\\ n\in M}} f(n),$$

где $f(n)$ – мультипликативная функция, удовлетворяющая некоторым условиям, а $n\in M$ означает ограничение на простые делители n. Особенно важны оценки такого рода сумм, когда $t\to\infty$.

Эти оценки содержатся, например, в работах [1] – [3], [4], [5], [6], [7], [8].

В некоторых из них рассматривается и случай t, растущий вместе с X.

В работе [9] решается задача об асимптотике сумм вида

$$m_f(X^t)=\sum_{n_1\cdots n_k\le X^t}\frac{f_1(n_1)\cdots f_k(n_k)}{n_1\cdots n_k}$$

и

$$M_f(X^t)=\sum_{n_1\cdots n_k\le X^t} f_1(n_1)\cdots f_k(n_k),$$

где n_i – та часть n, все простые делители которой заключены в промежутке $(X^{\beta_{i-1}},X^{\beta_i}]$,

$$0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_{k-1}<\beta_k=t,$$

β_i – фиксированы ($i=\overline{1,k}$) (зависимость от $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k$ не изучалась).

В работе [10] изучена сумма вида

$$M(X,Y_1,Y_2)=\sum_{\substack{n\le X\\ p/n\to Y_1<p\le Y_2}} 1$$

равномерно по Y_1, Y_2. Для $M(X,Y_1,Y_2)$ получена асимптотика

$$M(X,Y_1,Y_2)=\sigma(t_1,t_2)\frac{X}{\ln Y_1}+O\left(\frac{X}{\ln^2 Y_1}\right)$$

в областях

$$I.\quad \{(t_1,t_2)|\quad \varepsilon\le t_1\le 1,\quad 0<t_2<t_1\},$$

$$II.\quad \{(t_1,t_2)|\quad 0<t_2<1,\quad 1+\varepsilon\le t_1\},$$

$$III.\quad \{(t_1,t_2)|\quad 1+\varepsilon\le t_2<t_1\le M\},$$

где $M>1+\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ и $t_1=\frac{\ln X}{\ln Y_1}$, $t_2=\frac{\ln X}{\ln Y_2}$ причем $\sigma(t_1,t_2)$ удовлетворяет уравнению

$$t_2\frac{\partial}{\partial t_2}\sigma(t_1,t_2)=-\sigma\left(t_1\left(1-\frac{1}{t_2}\right),t_2-1\right)$$

для $t_2>1$, $t_2\ne\frac{t_1}{t_1-1}$, $t_2\ne 2$.

В обозначениях [9] в [10] изучается случай, когда $\beta_1=\frac{t}{t_1}$, $\beta_2=\frac{t}{t_2}$ уже не предполагаются фиксированными и даже ограниченными, но $k=3$ и $f_1(n)=\varepsilon(n)$, $f_2(n)=1$, $f_3(n)=\varepsilon(n)$, где

$$\varepsilon(n)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad n_1=1,\\ 0, & \text{если}\quad n_1\ne 1.\end{cases}$$

Настоящая работа является обобщением работ [9] и [10].

Получена асимптотика для сумм

$$\sum_{n_1\cdots n_k\le X}\frac{f_1(n_1)\cdots f_k(n_k)}{n_1\cdots n_k},$$

где $f_1(n_1)\cdots f_k(n_k)$ – мультипликативные функции, n_i – та часть n, все простые делители которой заключены в промежутке

$$\left(X^{\frac{1}{t_{i-1}}},X^{\frac{1}{t_i}}\right],\quad t_i=\frac{\ln X}{\ln Y_i},\quad 1=Y_0<Y_1<\cdots<Y_k=X,\quad i=\overline{1,k}.$$

2.

Предположим, что $f_1(n_1),f_2(n_2),\ldots,f_k(n_k)$ мультипликативные функции, $n=n_1\cdots n_k$ – однозначное разложение на множители числа n, причем

$$p/n_\nu\Rightarrow X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p\le X^{\frac{1}{t_\nu}},\qquad \nu=\overline{1,k},\qquad f(n)=f_1(n_1)\cdot f_2(n_2)\cdot\ldots\cdot f_k(n_k),$$

$1=t_k<t_{k-1}<\cdots<t_1<t_0=\infty$, $\Lambda_{f_\nu}(n)$ – обобщённая функция Мангольдта определяется соотношением

$$f_\nu(n)\ln n=\sum_{d/n}f_\nu(d)\Lambda_{f_\nu}\left(\frac{n}{d}\right).$$

Если $f(1)\ne 0$, то $\Lambda_f(n)$ определяется однозначно, а если $f(n)$ мультипликативна и $n\ne p^r$, p – простое число, то $\Lambda_f(n)=0$. Если

$$\varepsilon(n)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad n=1,\\ 0, & \text{если}\quad n\ne 1,\end{cases}$$

то $\Lambda_\varepsilon(n)=0$.

Определение 1. *Мультипликативная функция $f_\nu(n)$ принадлежит классу W, если существуют комплексные числа τ_ν, B_ν, A_ν такие, что для любых X и Y*

$$\sum_{\substack{p^r\le X\\ p\le Y}}\frac{\Lambda_{f_\nu}(p^r)}{p^r}=\tau_\nu\ln\min(X,Y)+B_\nu+O(\rho(\min(X,Y))),$$

и

$$\prod_{Y<p\le X}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f_\nu(p^r)|}{p^r}\right)=O\left(\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{A_\nu}\right),$$

где $A_\nu>0$, $\rho(X)\to 0$ при $X\to\infty$.

Будем изучать сумму вида

$$m_f\left(X,X^{\frac{1}{t_1}},\ldots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)=\sum_{\substack{n=n_1\cdots n_k\le X\\ p/n_1\Rightarrow X^{\frac{1}{t_0}}<p\le X^{\frac{1}{t_1}}\\ p/n_2\Rightarrow X^{\frac{1}{t_1}}<p\le X^{\frac{1}{t_2}}\\ -------------\\ -------------\\ p/n_k\Rightarrow X^{\frac{1}{t_{k-1}}}<p\le X}}\frac{f_1(n_1)\ldots f_k(n_k)}{n_1\cdots n_k}.$$

Сначала рассмотрим случай $f_1(n_1)=\varepsilon(n_1)$, то есть суммы по числам с большими простыми делителями.

Теорема 1. *Если $f_\nu(n)$, $(\nu=\overline{1,k})$ принадлежит классу W и $f_1(n_1)=\varepsilon(n_1)$, то имеет место интегральное уравнение*

$$t_1 m_f\left(X, X^{\frac{1}{t_1}},\ldots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)-\int_0^{t_1} m_f\left(X^{\frac{u}{t_1}},X^{\frac{1}{t_1}},\ldots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)du-$$
$$-\sum_{\nu=2}^{k}\tau_\nu\int_{t_1\left(1-\frac{1}{t_\nu}\right)}^{t_1\left(1-\frac{1}{t_{\nu-1}}\right)} m_f\left(X^{\frac{u}{t_1}},X^{\frac{1}{t_1}},\ldots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)du=$$
$$=O\left(\frac{\rho\left(X^{\frac{1}{t_1}}\right)}{\ln X^{\frac{1}{t_1}}}t_1^{A_2}\cdot t_2^{A_3-A_2}\cdots t_{k-1}^{A_k-A_{k-1}}\right). \qquad (2.1)$$

Доказательство. С одной стороны

$$\sum_{n\le X}\frac{f(n)}{n}\ln n=\sum_{n\le X}\frac{f(n)}{n}\left(\ln n-\ln X+\ln X\right)=$$
$$=\ln X\sum_{n\le X}\frac{f(n)}{n}-\sum_{1\le n\le X}\frac{f(n)}{n}\int_n^X\frac{du}{u}=\ln X\sum_{n\le X}\frac{f(n)}{n}-\int_1^X\sum_{n\le u}\frac{f(n)}{n}\cdot\frac{du}{u}=$$
$$=\ln X m_f\left(X,X^{\frac{1}{t_1}},\ldots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)-\int_1^X m_f\left(u,X^{\frac{1}{t_1}},\ldots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)\frac{du}{u}.$$

С другой стороны, так как $f_1(n)=\varepsilon(n)$ и по определению $\Lambda_f(n)$ находим:

$$\sum_{n\le X}\frac{f(n)\ln n}{n}=\sum_{n\le X}\frac{f(n)}{n}\sum_{X^{\frac{1}{t_1}}<m\le\frac{X}{n}}\frac{\Lambda_f(m)}{m}=\sum_{n\le X^{1-\frac{1}{t_1}}}\frac{f(n)}{n}\sum_{X^{\frac{1}{t_1}}<m\le\frac{X}{n}}\frac{\Lambda_f(m)}{m}.$$

Но

$$\sum_{X^{\frac{1}{t_1}}<m\le\frac{X}{n}}\frac{\Lambda_f(m)}{m}=\sum_{\nu=2}^{k}\sum_{\substack{X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p^r\le\frac{X}{n}\\ X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p<X^{\frac{1}{t_1}}}}\frac{\Lambda_{f_\nu(p^r)}}{p^r}=$$
$$=\sum_{\nu=2}^{k}\left\{\sum_{\substack{p^r\le\frac{X}{n}\\ X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p<X^{\frac{1}{t_\nu}}}}\frac{\Lambda_{f_\nu}(p^r)}{p^r}-\sum_{\substack{p^r\le X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}\\ X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p<X^{\frac{1}{t_\nu}}}}\frac{\Lambda_{f_\nu}(p^r)}{p^r}\right\}=$$
$$=\sum_{\nu=2}^{k}\left\{\tau_\nu\ln\min\left(\frac{X}{n},X^{\frac{1}{t_\nu}}\right)+B_{f_\nu}+O\left(\rho\left(\min\left(\frac{X}{n},X^{\frac{1}{t_\nu}}\right)\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\tau_\nu\ln\min\left(X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}},X^{\frac{1}{t_\nu}}\right)-B_{f_\nu}+O\left(\rho\left(\min\left(X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}},X^{\frac{1}{t_\nu}}\right)\right)\right)\right\}=$$
$$=\sum_{\nu=2}^{k}\left\{\tau_\nu\ln\frac{\min\left(\frac{X}{n},X^{\frac{1}{t_\nu}}\right)}{X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}}+O\left(\rho\left(\min\left(\frac{X}{n},X^{\frac{1}{t_\nu}}\right)\right)\rho\left(X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}\right)\right)\right\}=$$
$$=\sum_{\nu=2}^{k}\tau_\nu\ln\min\left(\frac{X^{1-\frac{1}{t_{\nu-1}}}}{n},X^{\frac{1}{t_\nu}-\frac{1}{t_{\nu-1}}}\right)+O\left(\sum_{\nu=1}^{k}\rho\left(X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}\right)\right).$$

Поэтому

$$\sum_{n\le X}\frac{f(n)\ln n}{n}=\sum_{n\le X}\frac{f(n)}{n}\sum_{X^{\frac{1}{t_1}}<m\le\frac{X}{n}}\frac{\Lambda_f(m)}{m}=\sum_{n\le X}\frac{f(n)}{n}\sum_{\nu=2}^{k}\sum_{\substack{X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p^r\le\frac{X}{n}\\ X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p<X^{\frac{1}{t_\nu}}}}\frac{\Lambda_{f_\nu(p^r)}}{p^r}=$$

$$=\sum_{\nu=2}^{k}\sum_{n\le X^{1-\frac{1}{t_{\nu-1}}}}\frac{f(n)}{n}\sum_{\substack{X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p^r\le\frac{X}{n}\\ X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p<X^{\frac{1}{t_\nu}}}}\frac{\Lambda_{f_\nu(p^r)}}{p^r}=$$

$$=\sum_{\nu=2}^{k}\tau_\nu\sum_{n\le X^{1-\frac{1}{t_{\nu-1}}}}\frac{f(n)}{n}\ln\min\left(\frac{X^{1-\frac{1}{t_{\nu-1}}}}{n},X^{\frac{1}{t_\nu}-\frac{1}{t_{\nu-1}}}\right)+O\left(\rho\left(X^{\frac{1}{t_1}}\right)\sum_{n\le X}\frac{|f(n)|}{n}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=2}^{k}\tau_\nu\sum_{X^{1-\frac{1}{t_\nu}}<n<X^{1-\frac{1}{t_{\nu-1}}}}\frac{f(n)}{n}\cdot\ln\frac{X^{1-\frac{1}{t_{\nu-1}}}}{n}+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{k}\tau_\nu\sum_{n\le X^{1-\frac{1}{t_{\nu-1}}}}\frac{f(n)}{n}\cdot\ln X^{\frac{1}{t_\nu}-\frac{1}{t_{\nu-1}}}+O\left(\prod_{\rho\le X}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f(p^r)|}{p^r}\right)\rho\left(X^{\frac{1}{t_1}}\right)\right)=$$

$$=\sum_{\nu=2}^{k}\tau_\nu\left\{\int_{X^{1-\frac{1}{t_\nu}}}^{X^{1-\frac{1}{t_{\nu-1}}}}\left(\sum_{n\le u}\frac{f(n)}{n}-\sum_{n\le X^{1-\frac{1}{t_\nu}}}\frac{f(n)}{n}\right)\frac{du}{u}+\sum_{n\le X^{1-\frac{1}{t_\nu}}}\frac{f(n)}{n}\cdot\ln X^{\frac{1}{t_\nu}-\frac{1}{t_{\nu-1}}}\right\}+$$

$$+O\left(\rho\left(X^{\frac{1}{t_1}}\right)\prod_{\nu=2}^{k}\prod_{X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p\le X^{\frac{1}{t_\nu}}}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f_\nu(p^r)|}{p^r}\right)\right)=$$

$$=\sum_{\nu=2}^{k}\tau_\nu\int_{X^{1-\frac{1}{t_\nu}}}^{X^{1-\frac{1}{t_{\nu-1}}}}m_f\left(u,X^{\frac{1}{t_1}},\dots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)\frac{du}{u}+$$

$$+O\left(\rho\left(X^{\frac{1}{t_1}}\right)\cdot t_1^{A_2}\cdot t_2^{A_3-A_2}\cdots t_{k-2}^{A_{k-1}-A_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{A_k-A_{k-1}}\right).$$

Сравнивая эти два выражения для

$$\sum_{n\le X}\frac{f(n)}{n}\cdot\ln X,$$

получаем

$$m_f\left(X,X^{\frac{1}{t_1}},\dots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)\ln X-\int_1^X m_f\left(u,X^{\frac{1}{t_1}},\dots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)\frac{du}{u}-$$

$$-\sum_{\nu=2}^{k}\tau_\nu\int_{X^{1-\frac{1}{t_\nu}}}^{X^{1-\frac{1}{t_{\nu-1}}}}m_f\left(u,X^{\frac{1}{t_1}},\dots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)\frac{du}{u}=$$

$$=O\left(\rho\left(X^{\frac{1}{t_1}}\right)\cdot t_1^{A_2}\cdot t_2^{A_3-A_2}\cdots t_{k-2}^{A_{k-1}-A_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{A_k-A_{k-1}}\right).$$

После замены переменных и деления на $\ln X$, находим

$$t_1 m_f\left(X, X^{\frac{1}{t_1}}, \ldots, X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right) - \int_0^{t_1} m_f\left(X^{\frac{u}{t_1}}, X^{\frac{1}{t_1}}, \ldots, X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right) du -$$

$$-\sum_{\nu=2}^{k} \tau_\nu \int_{t_1\left(1-\frac{1}{t_\nu}\right)}^{t_1\left(1-\frac{1}{t_{\nu-1}}\right)} m_f\left(X^{\frac{u}{t_1}}, X^{\frac{1}{t_1}}, \ldots, X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right) \frac{du}{u} =$$

$$= O\left(\frac{\rho\left(X^{\frac{1}{t_1}}\right)}{\ln X^{\frac{1}{t_1}}} \cdot t_1^{A_2} \cdot t_2^{A_3-A_2} \cdots t_{k-2}^{A_{k-1}-A_{k-2}} \cdot t_{k-1}^{A_k-A_{k-1}}\right).$$

Тем самым теорема доказана.

3.

Будем искать $m_f\left(X, X^{\frac{1}{t_1}}, \ldots, X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)$ в виде

$$m_f\left(X, X^{\frac{1}{t_1}}, \ldots, X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right) = Z_{k-1}(t_1, \ldots, t_{k-1}) + \frac{\rho\left(X^{\frac{1}{t_1}}\right)}{\ln X^{\frac{1}{t_1}}} R_{k-1}(X, t_1, \ldots, t_{k-1}), \tag{3.1}$$

где функция $Z_{k-1}(st_1, \ldots, st_{k-1})$ определена как единственное непрерывное по s при $0 < s \leq 1$ решение уравнения

$$st_1 Z_{k-1}(st_1, \ldots, st_{k-1}) - \int_0^{st_1} Z_{k-1}\left(u, \frac{ut_2}{t_1}, \ldots, \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du -$$

$$-\sum_{\nu=2}^{k} \tau_\nu \int_{t_1\left(s-\frac{1}{t_\nu}\right)}^{t_1\left(s-\frac{1}{t_{\nu-1}}\right)} Z_{k-1}\left(u, \frac{ut_2}{t_1}, \ldots, \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du = 0, \tag{3.2}$$

при $t_{k-1} > 1$, с начальными условиями

$$z_{k-1}(t_1, ..., t_{k-1}) = \begin{cases} z_{k-2}(t_1, ..., t_{k-2}), & \text{если} \quad k \geq 3, t_{k-1} \leq 1, \\ 1, & \text{если} \quad 0 < t_1 \leq 1, \\ 0, & \text{если} \quad t_1 < 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

Существование и единственность непрерывного решения уравнения (3.2) доказаны в [11].

Из (2.1), (3.1) и (3.2) получаем

$$t_1 R_{k-1}(X, t_1, \ldots, t_{k-1}) - \int_0^{t_1} R_{k-1}\left(X, u, \frac{ut_2}{t_1}, \ldots, \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du -$$

$$-\sum_{\nu=2}^{k} \tau_\nu \int_{t_1\left(1-\frac{1}{t_\nu}\right)}^{t_1\left(1-\frac{1}{t_{\nu-1}}\right)} R_{k-1}\left(X, u, \frac{ut_2}{t_1}, \ldots, \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du = O\left(t_1^{A_2} \cdot t_2^{A_3-A_2} \cdots t_{k-1}^{A_k-A_{k-1}}\right) \tag{3.4}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} R_{k-1}(X, t_1, ..., t_{k-2}) = R_{k-2}(X, t_1, ..., t_{k-2}), & \text{если} \quad k \geq 3, t_{k-1} \leq 1, \\ R_{k-1}(t_1, ..., t_{k-1}, \overline{Y}) = 0, & \text{если} \quad 0 < t_1 \leq 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Теорема 2. *Если $F_{k-1}(X,t_1,\dots,t_{k-1})$ решение уравнения*

$$t_1F_{k-1}(X,t_1,\dots,t_{k-1})-\alpha\cdot\int_0^{t_1}F_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\dots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)du=\Phi_{k-1}(X,t_1,\dots,t_{k-1})\quad(3.6)$$

при $t_{k-1}\geq 1$, с начальными условиями

$$F_{k-1}(X,t_1,\dots,t_{k-1})=\begin{cases}F_{k-2}(X,t_1,...,t_{k-2}), & \text{если}\quad k\geq 3, t_{k-1}\leq 1,\\ 0, & \text{если}\quad t_1\leq 1,\end{cases}$$

то

$$F_{k-1}(X,t_1,\dots,t_{k-1})=\frac{\alpha\cdot t_{k-1}^{\alpha}}{t_1}\cdot\int_1^{\frac{t_1}{t_{k-1}}}F_{k-2}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\dots,\frac{ut_{k-2}}{t_1}\right)du+$$
$$+\frac{\alpha}{t_1}\cdot\int_{\frac{1}{t_{k-1}}}^{1}\frac{\Phi_{k-1}(X,st_1,\dots,st_{k-1})}{s^{\alpha+1}}ds+\frac{\Phi_{k-1}(X,t_1,\dots,t_{k-1})}{t_1}.\quad(3.7)$$

Доказательство. Подставим в (3.6) вместо t_ν, $\nu=\overline{1,k-1}$ величину st_ν, разделим на $s^{\alpha+1}$. Тогда при $s\geq\frac{1}{t_{k-1}}$ получим:

$$\frac{t_1F_{k-1}(X,st_1,\dots,st_{k-1})}{s^{\alpha}}-\frac{\alpha}{s^{\alpha+1}}\int_1^{st_1}F_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\dots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)du=\frac{\Phi_{k-1}(X,st_1,\dots,st_{k-1})}{s^{\alpha+1}}.$$

Проинтегрируя последное равенство по s от $\frac{1}{t_{k-1}}$ до 1, меняя порядок интегрирования во втором интеграле, находим:

$$t_1\cdot\int_{\frac{1}{t_{k-1}}}^{1}\frac{F_{k-1}(X,st_1,\dots,st_{k-1})}{s^{\alpha}}ds+\int_1^{t_1}F_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\dots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)du-$$
$$-\int_{\frac{t_1}{t_{k-1}}}^{1}\frac{F_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\dots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)}{\left(\frac{u}{t_1}\right)^{\alpha}}du-\int_1^{\frac{t_1}{t_{k-1}}}\frac{F_{k-2}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\dots,\frac{ut_{k-2}}{t_1}\right)}{\left(\frac{1}{t_{k-1}}\right)^{\alpha}}du=$$
$$=\int_{\frac{t_1}{t_{k-1}}}^{1}\frac{\Phi_{k-1}(X,st_1,\dots,st_{k-1})}{s^{\alpha+1}}ds.$$

Отсюда

$$\int_1^{t_1}F_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\dots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)du=$$
$$=\int_1^{\frac{t_1}{t_{k-1}}}F_{k-2}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\dots,\frac{ut_{k-2}}{t_1}\right)\cdot(t_{k-1})^{\alpha}du+\int_{\frac{t_1}{t_{k-1}}}^{1}\frac{\Phi_{k-1}(X,st_1,\dots,st_{k-1})}{s^{\alpha+1}}ds.$$

Отсюда и из (3.6), получаем (3.7).

Теорема 3. *Пусть $f_\nu(n)$, $\nu=\overline{1,k}$ принадлежит классу W и $f_1(n_1)=\varepsilon(n_1)$. Тогда*

$$m_f\left(X,X^{\frac{1}{t_1}},\dots,X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right)=Z_{k-1}(t_1,\dots,t_{k-1})+O\left(\frac{\rho\left(X^{\frac{1}{t_1}}\right)}{\ln X^{\frac{1}{t_1}}}\cdot t_1^{B_1}\cdot t_2^{B_2}\cdots t_{k-1}^{B_{k-1}}\cdot\ln^{\gamma_k}t_1\right),$$

где $Z_{k-1}(t_1,\dots,t_{k-1})$ определено условиями (3.2) и (3.3).

$$B_1=\max(A_2-1,Re\tau_2),\qquad B_\nu=\max(A_{\nu+1}-A_\nu,Re\tau_{\nu+1}-B_1-\dots-B_{\nu-1})$$

при $\nu = \overline{1, k-1}$, $\gamma_k = const$.

Доказательство. Пусть $r_k = 1 + |\tau_2| + \ldots + |\tau_{k-1}|$. Тогда из (3.4) и (3.5) при $t_{k-1} \geq 1$ находим:

$$t_1|R_{k-1}(X, t_1, \ldots, t_{k-1})| - r_k \int_0^{t_1} \left| R_{k-1}\left(X, u, \frac{ut_2}{t_1}, \ldots, \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)\right| du = O\left(t_1^{A_2} \cdot t_2^{A_3 - A_2} \cdot t_{k-1}^{A_k - A_{k-1}}\right)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} R_{k-1}(X, t_1, ..., t_{k-1}) = R_{k-2}(X, t_1, ..., t_{k-2}), & \text{если} \quad k \geq 3, t_{k-1} \leq 1, \\ R_{k-1}(t_1, ..., t_{k-1}) = 0, & \text{если} \quad 0 < t_1 \leq 1. \end{cases}$$

По теореме 2

$$|R_{k-1}(X, t_1, ..., t_{k-1})| = \frac{r_k t_{k-1}^{r_k}}{t_1} \int_1^{\frac{t_1}{t_{k-1}}} \left| R_{k-2}\left(X, u, \frac{ut_2}{t_1}, \ldots, \frac{ut_{k-2}}{t_1}\right)\right| du +$$

$$+ t_1^{A_2 - 1} t_2^{A_3 - A_2} \cdots t_{k-1}^{A_k - A_{k-1}} \int_{\frac{1}{t_{k-1}}}^{1} s^{A_k - r_k - 1} ds + t_1^{A_2 - 1} \cdot t_2^{A_3 - A_2} \cdots t_{k-1}^{A_k - A_{k-1}}. \tag{3.8}$$

Последние два слагаемых дают

$$t_1^{A_2 - 1} \cdot t_2^{A_3 - A_2} \cdots t_{k-1}^{A_k - A_{k-1}} \left(1 + \left(1 + t_{k-1}^{r_k - A_k}\right)\right) \ln^{\delta_k} t_{k-1} \ll$$

$$\ll t_1^{A_2 - 1} \cdot t_2^{A_3 - A_2} \cdots t_{k-2}^{A_{k-1} - A_{k-2}} \cdot t_{k-1}^{\max(r_k, A_k) - A_{k-1}} \cdot \ln^{\delta_k} t_{k-1},$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad r_k = A_k, \\ 0, & \text{если} \quad r_k \neq A_k. \end{cases}$$

Первое слагаемое справа, пользуясь (3.5), можно переписать так

$$\frac{r_k t_{k-1}^{r_k}}{t_1} \int_1^{\frac{t_1}{t_{k-1}}} \left| R_{k-2}\left(X, u, \frac{ut_2}{t_1}, \ldots, \frac{ut_{k-2}}{t_1}\right)\right| du =$$

$$= \frac{r_k t_{k-1}^{r_k}}{t_1} \sum_{\mu=2}^{k-1} \int_{\frac{t_1}{t_{\mu-1}}}^{\frac{t_1}{t_\mu}} \left| R_{k-2}\left(X, u, \frac{ut_2}{t_1}, \ldots, \frac{ut_{k-2}}{t_1}\right)\right| du =$$

$$= \frac{r_k t_{k-1}^{r_k}}{t_1} \sum_{\mu=2}^{k-1} \int_{\frac{t_1}{t_{\mu-1}}}^{\frac{t_1}{t_\mu}} \left| R_{\mu-1}\left(X, u, \frac{ut_2}{t_1}, \ldots, \frac{ut_{k-2}}{t_1}\right)\right| du.$$

Тогда из (3.8), получаем

$$|R_{k-1}(X, t_1, \ldots t_{k-1})| = r_k t_{k-1}^{r_k} \sum_{\mu=2}^{k-1} \int_{\frac{1}{t_{\mu-1}}}^{\frac{1}{t_\mu}} |R_{\mu-1}(X, ut_1, \ldots, ut_{\mu-1})| du +$$

$$+ O\left(t_1^{A_2 - 1} \cdot t_2^{A_3 - A_2} \cdots t_{k-2}^{A_{k-1} - A_{k-2}} \cdot t_{k-1}^{\max(r_k, A_k) - A_{k-1}} \cdot \ln^{\delta_k} t_{k-1}\right). \tag{3.9}$$

Предположим, что для всех $2 \leq \mu \leq k-1$ и $t_{\mu-1} \geq 1$ уже доказано, что

$$R_{\mu-1}(X, t_1, \ldots, t_{\mu-1}) \ll t_1^{B_1} \cdot t_2^{B_2} \cdots t_{\mu-1}^{B_{\mu-1}} \cdot \ln^{\gamma_\mu} t_1, \tag{3.10}$$

где B_ν определены в формулировке теоремы, $\gamma_\mu = const$.

Для $\mu = 1$ это очевидно. Действительно, в случае $\mu = 1$, $R_0(X) = 0$, так как

$$m_f\left(X, X^{\frac{1}{t_1}}, \dots, X^{\frac{1}{t_{k-1}}}\right) = \sum_{n_1 \le X} \frac{f_1(n_1)}{n_1} = \sum_{n_1 \le X} \frac{\varepsilon(n_1)}{n_1} = 1 = 1 + 0.$$

Докажем, что (3.10) верно при $\mu = k$. Подставим в (3.9) оценку (3.10), тогда

$$|R_{k-1}(X, t_1, \dots, t_{k-1})| \ll t_{k-1}^{r_k} \sum_{\mu=2}^{k-1} t_1^{B_1} \cdot t_2^{B_2} \cdots t_{\mu-1}^{B_{\mu-1}} \cdot \ln^{\gamma_\mu} t_1 \int_{\frac{1}{t_{\mu-1}}}^{\frac{1}{t_\mu}} u^{B_1+\dots+B_{\mu-1}} du +$$

$$+ t_1^{A_2-1} \cdot t_2^{A_3-A_2} \cdots t_{k-2}^{A_{k-1}-A_{k-2}} \cdot t_{k-1}^{\max(r_k, A_k)-A_{k-1}} \cdot \ln^{\delta_k} t_1$$

или

$$|R_{k-1}(X, t_1, \dots, t_{k-1})| \ll$$

$$\ll t_{k-1}^{r_k} \sum_{\mu=2}^{k-1} t_1^{B_1} \cdot t_2^{B_2} \cdots t_{\mu-1}^{B_{\mu-1}} \cdot \left| t_\mu^{-1-B_1-\dots-B_{\mu-1}} - t_{\mu-1}^{-1-B_1-\dots-B_{\mu-1}} \right| \cdot \ln^{\chi_\mu} t_1 +$$

$$+ t_1^{A_2-1} \cdot t_2^{A_3-A_2} \cdots t_{k-2}^{A_{k-1}-A_{k-2}} \cdot t_{k-1}^{\max(r_k, A_k)-A_{k-1}} \cdot \ln^{\delta_k} t_1, \qquad (3.11)$$

где

$$\chi_\mu = \begin{cases} \gamma_\mu + 1, & \text{если} \quad B_1 + \dots + B_{\mu-1} = -1, \\ \gamma_\mu, & \text{в противном случае} \quad . \end{cases}$$

Из определения B_ν, получаем

$$1 + B_1 + \dots + B_{\mu-1} \ge 1 + (A_2 - 1) + (A_3 - A_2) + \dots + (A_\mu - A_{\mu-1}) = A_\mu \ge 0. \qquad (3.12)$$

Поэтому, учитывая что $t_\nu > t_{\nu+1}$ для $\nu = \overline{1, k-1}$, имеем:

$$t_1^{B_1} \cdots t_{\mu-1}^{B_{\mu-1}} \cdot t_\mu^{-1-B_1-\dots-B_{\mu-1}} \ll t_1^{B_1} \cdot t_2^{B_2} \cdots t_{k-2}^{B_{k-2}} \cdot t_{k-1}^{-A_{k-1}}. \qquad (3.13)$$

По определению B_ν

$$t_1^{A_2-1} \cdots t_{k-2}^{A_{k-1}-A_{k-2}} \cdot t_{k-1}^{\max(r_k, A_k)-A_{k-1}} \le t_1^{B_1} \cdots t_{k-2}^{B_{k-2}} \cdot t_{k-1}^{\max(r_k, A_k)-A_{k-1}}. \qquad (3.14)$$

Из (3.11), (3.13), (3.14) при $t_{k-1} \ge 1$ находим

$$R_{k-1}(X, t_1, \dots, t_{k-1}) \ll t_1^{B_1} \cdots t_{k-2}^{B_{k-2}} \cdot t_{k-1}^{c_{k-1}^{(1)}} \cdot \ln^{\beta_k} t_1, \qquad (3.15)$$

где

$$c_{k-1}^{(1)} = \max(r_k, A_k) - A_{k-1}, \qquad \beta_k = \max(\chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \delta_k).$$

Теперь перепишем уравнение (3.4) в виде

$$t_1 R_{k-1}(X, t_1, \dots, t_{k-1}) - (\tau_k + 1) \int_0^{t_1} R_{k-1}\left(X, u, \frac{ut_2}{t_1}, \dots, \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du \ll$$

$$\ll t_1^{A_2} \cdot t_2^{A_3-A_2} \cdots t_{k-1}^{A_k-A_{k-1}} + \sum_{\nu=2}^{k} |\tau_\nu| \int_{t_1\left(1-\frac{1}{t_\nu}\right)}^{t_1\left(1-\frac{1}{t_{\nu-1}}\right)} R_{k-1}\left(X, u, \frac{ut_2}{t_1}, \dots, \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du +$$

$$+ |\tau_k| \int_{t_1\left(1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)}^{t_1} \left| R_{k-1}\left(X, u, \frac{ut_2}{t_1}, \dots, \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) \right| du \ll$$

$$\ll t_1^{A_2}\cdot t_2^{A_3-A_2}\cdots t_{k-1}^{A_k-A_{k-1}}+\int_{t_1\left(1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)}^{t_1}\left|R_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\ldots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)\right|du. \tag{3.16}$$

После замены переменной, последний интеграл равен

$$t_1\cdot\int_{1-\frac{1}{t_{k-1}}}^{1}|R_{k-1}(X,ut_1,\ldots,ut_{k-1})|\,du=$$

$$=t_1\cdot\sum_{\mu=2}^{k}\int_{\max\left(\frac{1}{t_{\mu-1}},1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)}^{\frac{1}{t_\mu}}|R_{k-1}(X,ut_1,\ldots,ut_{k-1})|\,du \tag{3.17}$$

причём интеграл в сумме равен нулю, если верхний предел меньше или равен нижнему. Если μ таково, что $\frac{1}{t_\mu}\le 1-\frac{1}{t_{k-1}}$, то соответствующий интеграл равен нулю.

Пусть $\frac{1}{t_\mu}>1-\frac{1}{t_{k-1}}$, $\mu<k$, тогда, так как $ut_\mu\le 1,\ldots,ut_{k-1}\le 1$, то по (3.5)

$$\int_{\max\left(\frac{1}{t_{\mu-1}},1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)}^{\frac{1}{t_\mu}}|R_{k-1}(X,ut_1,\ldots,ut_{k-1})|\,du\ll$$

$$\ll t_1^{B_1}\cdots t_{\mu-1}^{B_{\mu-1}}\left(t_\mu^{-1-B_1-\ldots-B_{\mu-1}}+\max\left(\frac{1}{t_{\mu-1}},1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)^{1+B_1+\ldots+B_{\mu-1}}\right)\ln^{\Delta_\mu}t_1, \tag{3.18}$$

где

$$\Delta_\mu=\begin{cases}\gamma_\mu+1, & \text{если}\quad B_1+\ldots+B_{\mu-1}=-1,\\ \gamma_\mu, & \text{в противном случае}\quad.\end{cases}$$

Здесь использовано предположение индукции (3.10).

Так как $\frac{1}{t_{k-1}}<\frac{1}{t_\mu}$, то используя (3.12), находим

$$\max\left(\frac{1}{t_{\mu-1}},1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)^{1+B_1+\ldots+B_{\mu-1}}\le t_\mu^{-1-B_1-\ldots-B_{\mu-1}}.$$

Следовательно, при $\mu<k$ из (3.18), получаем

$$\int_{\max\left(\frac{1}{t_{\mu-1}},1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)}^{\frac{1}{t_\mu}}|R_{k-1}(X,ut_1,\ldots,ut_{\mu-1})|\,du\ll$$

$$\ll t_1^{B_1}\cdots t_{\mu-1}^{B_{\mu-1}}t_\mu^{-1-B_1-\ldots-B_{\mu-1}}\cdot\ln^{\Delta_\mu}t_1\ll t_1^{B_1}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{-A_{k-1}}\ln^{\Delta_\mu}t_1.$$

Отсюда и из (3.17), находим

$$\int_{t_1\left(1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)}^{t_1}\left|R_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\ldots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)\right|du\ll t_1^{B_1+1}t_2^{B_2}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{-A_{k-1}}\ln^{\Delta}t_1+$$

$$+\int_{\max\left(\frac{1}{t_{k-1}},1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)}^{\frac{1}{t_\mu}}|R_{k-1}(X,ut_1,\ldots,ut_{k-1})|\,du, \tag{3.19}$$

где $\Delta=\max(\Delta_1,\ldots,\Delta_{k-1})$.

Так как $t_k=1$, то согласно (3.15), имеем

$$t_1\cdot\int_{\max\left(\frac{1}{t_{k-1}},1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)}^{1}|R_{k-1}(X,ut_1,\ldots,ut_{k-1})|\,du\ll t_1^{B_1+1}t_2^{B_2}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{c_{k-1}^{(1)}}.$$

$$\cdot\left|1-\max\left(\frac{1}{t_{k-1}},1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)^{B_1+\ldots+B_{k-2}+c_{k-1}^{(1)}+1}\right|\cdot\ln^{\nabla_k}t_1,\tag{3.20}$$

где

$$\nabla_k=\begin{cases}\beta_k+1, & \text{если}\quad B_1+\ldots+B_{k-2}+c_{k-1}^{(1)}=-1,\\ \beta_k, & \text{в противном случае}\quad.\end{cases}$$

Но

$$1-\max\left(\frac{1}{t_{k-1}},1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)^{B_1+\ldots+B_{k-2}+c_{k-1}^{(1)}+1}\ll\begin{cases}\frac{1}{t_{k-1}}, & \text{если}\quad t_{k-1}\geq 2,\\ 1, & \text{если}\quad t_{k-1}\leq 2\end{cases}\ll\frac{1}{t_{k-1}}.$$

Отсюда и из (3.19)–(3.20), имеем:

$$\int_{t_1\left(1-\frac{1}{t_{k-1}}\right)}^{t_1}\left|R_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\ldots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)\right|du\ll$$

$$\ll\left(t_1^{B_1+1}t_2^{B_2}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{c_{k-1}^{(1)}-1}+t_1^{B_1+1}t_2^{B_2}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{-A_{k-1}}\right)\ln^{\alpha_k}t_1\ll$$

$$\ll t_1^{B_1+1}t_2^{B_2}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{E_{k-1}}\ln^{\alpha_k}t_1,$$

где

$$E_{k-1}=\max\left(A_k-A_{k-1},c_{k-1}^{(1)}-1\right),\qquad \alpha_k=\max(\triangle,\nabla_k).$$

Подставляя последнюю оценку в (3.16), находим, что при $t_{k-1}\geq 1$

$$t_1R_{k-1}(X,t_1,\ldots,t_{k-1})-(\tau_k+1)\int_0^{t_1}R_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\ldots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)du\ll$$

$$\ll t_1^{B_1+1}t_2^{B_2}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{E_{k-1}}\ln^{\alpha_k}t_1,\tag{3.21}$$

где $R_{k-1}(X,t_1,\ldots,t_{k-1})$ удовлетворяет начальным условиям (3.5),

$$E_{k-1}=\max\left(A_k-A_{k-1},c_{k-1}^{(1)}-1\right)=$$

$$=\max(A_k-A_{k-1},\max(A_k,r_k)-A_{k-1}-1)=\max(A_k-A_{k-1},r_k-A_{k-1}-1).$$

Воспользуемся теоремой 2 для решения уравнения (3.21). При $t_{k-1}\geq 1$ имеем:

$$R_{k-1}(X,t_1,\ldots\ldots,t_{k-1})=\frac{(\tau_k+1)t_{k-1}^{\tau_k+1}}{t_1}\int_1^{\frac{t_1}{t_{k-1}}}R_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\ldots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)du+$$

$$+\frac{\tau_k+1}{t_1}\cdot t_1^{B_1+1}t_2^{B_2}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{E_{k-1}}\ln^{\alpha_k}t_1\cdot\int_{\frac{1}{t_{k-1}}}^1 s^{1+B_1+\ldots+B_{k-2}+E_{k-1}-Re\tau_k-2}ds+$$

$$+t_1^{B_1}t_2^{B_2}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{E_{k-1}}\ln^{\alpha_k}t_1.\tag{3.22}$$

Второе слагаемое в (3.22) оценивается так

$$\frac{\tau_k+1}{t_1}\cdot t_1^{B_1+1}t_2^{B_2}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{E_{k-1}}\ln^{\alpha_k}t_1\cdot\int_{\frac{1}{t_{k-1}}}^1 s^{1+B_1+\ldots+B_{k-2}+E_{k-1}-Re\tau_k-2}ds\ll$$

$$\ll t_1^{B_1}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{E_{k-1}}\left(1+t_{k-1}^{Re\tau_k-B_1-\ldots-B_{k-2}-E_{k-1}}\right)\ln^{\varepsilon_k}t_1\ll$$

$$\ll\left(t_1^{B_1}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}\cdot t_{k-1}^{E_{k-1}}+t_1^{B_1}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}t_{k-1}^{Re\tau_k-B_1-\ldots-B_{k-2}}\right)\ln^{\varepsilon_k}t_1\ll$$

$$\ll t_1^{B_1}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}t_{k-1}^{c_{k-1}^{(2)}}\ln^{\varepsilon_k}t_1, \tag{3.23}$$

где

$$c_{k-1}^{(2)}=\max(E_{k-1},Re\tau_k-B_1-\ldots-B_{k-1}),$$

$$\varepsilon_k=\begin{cases}\alpha_k+1, & \text{если}\quad B_1+\ldots+B_{k-2}+E_{k-1}-Re\tau_k=0,\\ \alpha_k, & \text{в противном случае}\quad .\end{cases}$$

Третье слагаемое в (3.22) оценивается сверху той же величиной.

Остаётся оценить первое слагаемое в правой части (3.22). Согласно (3.13) имеем:

$$\frac{t_{k-1}}{t_1}\int_0^{\frac{t_1}{t_{k-1}}}R_{k-1}\left(X,u,\frac{ut_2}{t_1},\ldots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)du=t_{k-1}^{\tau_k+1}\sum_{\mu=2}^{k-1}\int_{\frac{1}{t_{\mu-1}}}^{\frac{1}{t_\mu}}R_{k-1}(X,ut_1,\ldots,ut_{\mu-1})du\ll$$

$$\ll t_{k-1}^{Re\tau_k+1}\sum_{\mu=2}^{k-1}\int_{\frac{1}{t_{\mu-1}}}^{\frac{1}{t_\mu}}|R_{k-1}(X,ut_1,\ldots,ut_{\mu-1})|\,du\ll$$

$$\ll t_{k-1}^{Re\tau_k+1}\sum_{\mu=2}^{k-1}t_1^{B_1}\cdots t_{\mu-1}^{B_{\mu-1}}\int_{\frac{1}{t_{\mu-1}}}^{\frac{1}{t_\mu}}u^{B_1+\ldots+B_{\mu-1}}\ln^{\gamma_\mu}t_1du\ll$$

$$\ll t_{k-1}^{Re\tau_k+1}\sum_{\mu=2}^{k-1}t_1^{B_1}\cdots t_{\mu-1}^{B_{\mu-1}}\left(t_\mu^{-1-B_1-\ldots-B_{\mu-1}}+t_{\mu-1}^{-1-B_1-\ldots-B_{\mu-1}}\right)\ln^{\gamma_\mu}t_1du\ll$$

$$\ll t_1^{B_1}\cdots t_{k-1}^{Re\tau_k-B_1-\ldots-B_{k-1}}\ln^{\beta_k}t_1. \tag{3.24}$$

Собирая оценки (3.23) и (3.24) и подставляя их в (3.23), получаем

$$R_{k-1}(X,t_1,\ldots,t_{k-1})\ll t_1^{B_1}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}t_{k-1}^{c_{k-1}^{(3)}}\ln^{\mu_k}t_1, \tag{3.25}$$

где

$$c_{k-1}^{(3)}=\max\left(A_k-A_{k-1},c_{k-1}^{(1)}-1,Re\tau_k-B_1-\ldots-B_{k-2}\right), \tag{3.26}$$

$\mu_k=\mu(k,A_1,\ldots,A_{k-1},\tau_1,\ldots,\tau_k)$ – не зависит от $t_1,\ldots,t_{k-1}$.

Если $\tau_k=-1$, то из (3.16) следует (3.26), так как

$$E_{k-1}=\max\left(A_k-A_{k-1},c_{k-1}^{(1)}-1\right)=$$

$$=\max\left(A_k-A_{k-1},c_{k-1}^{(1)}-1,Re\tau_k-B_1-\ldots-B_{k-2}\right)=c_{k-1}^{(3)}.$$

Если теперь подставить в (3.16) оценку (3.25) и действовать точно также как раньше, получаем

$$R_{k-1}(X,t_1,\ldots,t_{k-1})\ll t_1^{B_1}\cdots t_{k-2}^{B_{k-2}}t_{k-1}^{c_{k-1}^{(4)}}\ln^{\nu_k}t_1,$$

где

$$c_{k-1}^{(4)}=\max\left(A_k-A_{k-1},c_{k-1}^{(3)}-2,Re\tau_k-B_1-\ldots-B_{k-2}\right).$$

Если проделать такую процедуру r раз, где r таково, что

$$c_{k-1}^{(r)}-1<\max\left(A_k-A_{k-1},Re\tau_k-B_1-\ldots-B_{k-2}\right),$$

тогда на r–том шагу, получаем

$$R_{k-1}(X,t_1,\ldots,t_{k-1})\ll t_1^{B_1}\cdots t_{k-1}^{B_{k-1}}\ln^{\gamma_k}t_1.$$

Таким образом теорема 3 доказано.

4. Заключение

Настоящая работа является обобщением работ [9] и [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А. А. Асимптотическая оценка одной общей теоретико-числовой функции. //А.А. Бухштаб / Матем. сб.2, (44):6, 1937. С. 1239 – 1246.

2. Бухштаб А. А. О числах арифметической прогрессии, у которого все простые множители малы по порядку роста. //А.А. Бухштаб / ДАН СССР, Т. 67, № 1, 1949. С. 5 – 8.

3. Бухштаб А. А. Об асимптотической оценке числа чисел арифметической прогрессии, не делящихся на «относительно» малые простые числа. //А.А. Бухштаб / Матем. сб.28(70):16, 1951. С. 165 – 184.

4. Виноградов И. М. О числах с малыми простыми делителями. //И.М. Виноградов/ ДАН СССР, Т. 109, № 4, 1956. С. 683 – 686.

5. Линник Ю. В. Замечания о наименьшем квадратичном невычете. //Ю.В. Линник/ ДАН СССР, Т. 36, вып.4–5, 1942. С. 131 – 132.

6. Левин Б. В. Об одном классе задач теории чисел, сводящихся к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом. //Б.В.Левин, А.С.Файнлейб// Науч. тр. Ташкентского универс.та, вып.228, 1963. С. 56 – 69.

7. De Bruijn. The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes.//De Bruijn/ Journ. Indian Math.Soc.15, 1951. P. 25 – 32.

8. Rankin R. A. The difference between consecutive prime numbers.//Rankin R. A./ Journ London, Math.Soc., 13, 1938. P. 242 – 247.

9. Левин Б. В. Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел. //Б.В.Левин, А.С.Файнлейб// Успехи математических наук. Т. 22. № 3(135), 1967. С. 119 – 199.

10. Friedldnder John B. Integers free from large and small primes.//John B. Friedlander // Proc. London Math. Soc. 33, № 3, 1976. P. 565 – 575.

11. Чариев У. Асимптотические поведение решений некоторых дифференциально-разностных уравнений. //У.Чариев // ДАН Тадж. ССР, Т. 22. № 8. 1979. С. 463 – 465.

REFERENCES

1. Buhshtab A. A. 1937, “Asymptotic estimation of a general number-theoretic function”, *Matematicheskii Sbornik*, Vol, 2, no. 44:6, pp. 1239–1246.

2. Buhshtab A. A. 1949, “On numbers in arithmetic progression with small prime factors”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, Vol, 67, no. 1, pp. 5–8.

3. Buhshtab A. A. 1951, “On asymptotic estimation of numbers in arithmetic progression not divisible by relatively small primes”, *Matematicheskii Sbornik*, Vol, 28, no. 44:16, pp. 165–184.

4. Vinogradov I. M. 1956, “On numbers with small prime divisors”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, Vol, 109, no. 4, pp. 683–686.

5. Linnik Yu. V. 1942, "Remarks on the least quadratic non-residue", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, Vol, 36, no. 4–5, pp. 131–132.

6. Levin B. V., Fainleib A. S. 1963, "On a class of number theory problems reducible to differential equations with retarded argument", *Nauchnye Trudy Tashkentskogo Universiteta*, Vol, 228, pp. 56–69.

7. de Bruijn N. G. 1951, "The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes", *Journal of the Indian Mathematical Society*, Vol, 15, pp. 25–32.

8. Rankin R. A. 1938, "The difference between consecutive primes", *Journal of the London Mathematical Society*, Vol, 13, pp. 242–247.

9. Levin B. V., Fainleib A. S. 1985, "Application of some integral equations to number theory problems", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, Vol, 22, no. 3(135), pp. 119–199.

10. Friedlander J. B. 1976, "Integers free from large and small primes", *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol, 33, no. 3, pp. 565–575.

11. Chariyev U. 1979, "Asymptotic behavior of solutions of some differential-difference equations", *Doklady Akademii Nauk Tadzhikskoi SSR*, Vol, 22, no. 8, pp. 463–465.

Получено: 18.01.2025
Принято в печать: 17.10.2025