

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 4.

УДК: 517.95

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-344-356

Комбинаторно-аналитический метод решения волнового уравнения с переключениями скорости¹

А. И. Нижников, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко, С. А. Муханов

Нижников Александр Иванович — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru

Яремко Олег Эммануилович — Московский государственный технический университет «Станкин» (г. Москва).

e-mail: yaremki8@gmail.com

Яремко Наталья Николаевна — Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (г. Москва).

e-mail: yaremki@yandex.ru

Муханов Сергей Александрович — Российский технологический университет «МИРЭА» (г. Москва).

e-mail: mtyahob@bk.ru

Аннотация

В работе получено полное аналитическое решение задачи о свободных колебаниях струны с произвольным числом скачкообразных изменений скорости распространения волн. Предложен новый комбинаторно-аналитический метод, позволяющий представить решение в виде компактной явной формулы. Доказано, что решение представляет собой суперпозицию 2^{N-1} волн, каждая из которых соответствует одному из возможных путей распространения возмущения через моменты переключения скорости.

Установлено, что коэффициенты в полученной формуле имеют ясный физический смысл и представляют собой произведения коэффициентов прохождения и отражения на границах раздела сред. Метод обобщен на случай конечной струны с нулевыми граничными условиями Дирихле.

Решение построено в замкнутой форме и подтверждено двумя независимыми методами: методом Фурье и методом математической индукции. Полученные результаты позволяют анализировать сложные волновые процессы в средах с кусочно-постоянными параметрами и могут быть использованы в задачах акустики, сейсмологии и теории управления.

Ключевые слова: волновое уравнение, скачкообразное изменение скорости, аналитическое решение, метод Фурье, рекуррентные соотношения, коэффициенты отражения и прохождения, конечная струна, условия Дирихле.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Нижников А. И., Яремко О. Э., Яремко Н. Н., Муханов С. А. Комбинаторно-аналитический метод решения волнового уравнения с переключениями скорости // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 344–356.

¹Исследование выполнено при поддержке второго и третьего авторов Министерством науки и образования РФ (проект № FSFS-2024-0007).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 4.

UDC: 517.95

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-344-356

Combinatorial-analytical method for wave equation with abrupt parameter changes

A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko, S. A. Mukhanov

Nizhnikov Alexander Ivanovich — Moscow State Pedagogical University (Moscow).*e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru***Yaremko Oleg Emmanuilovich** — Moscow State Technical University “Stankin” (Moscow).*e-mail: yaremki8@gmail.com***Yaremko Natalya Nikolaevna** — National Research Technological University “MISiS” (Moscow).*e-mail: yaremki@yandex.ru***Mukhanov Sergey Alexandrovich** — Russian Technological University “MIREA” (Moscow).*e-mail: myxahob@bk.ru***Abstract**

The paper presents a complete analytical solution to the problem of free vibrations of a string with an arbitrary number of abrupt changes in the wave propagation velocity. A novel combinatorial-analytical method is proposed that allows representing the solution in the form of a compact explicit formula. It is proved that the solution represents a superposition of 2^{N-1} waves, each corresponding to one of the possible paths of disturbance propagation through the velocity switching moments.

It is established that the coefficients in the obtained formula have a clear physical meaning and represent products of transmission and reflection coefficients at the interfaces. The method is generalized to the case of a finite string with zero Dirichlet boundary conditions.

The solution is constructed in closed form and confirmed by two independent methods: the Fourier method and the method of mathematical induction. The obtained results allow analyzing complex wave processes in media with piecewise constant parameters and can be used in problems of acoustics, seismology, and control theory.

Keywords: wave equation, abrupt velocity change, analytical solution, Fourier method, recurrence relations, reflection and transmission coefficients, finite string, Dirichlet conditions.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

Nizhnikov, A. I., Yaremko, O. E., Yaremko, N. N., Mukhanov, S. A. 2025, “Combinatorial-analytical method for wave equation with abrupt parameter changes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 344–356.

1. Введение

Изучение задач о колебаниях струны с произвольным числом скачкообразных изменений скорости распространения волн представляет значительный теоретический и практический интерес. Такие модели возникают в различных прикладных областях, включая акустику, сейсмологию и теорию управления вибрациями. Особый интерес представляет случай активного гашения вибраций в конструкциях, где изменение параметров системы во времени является ключевым элементом управления. В данной работе получено полное аналитическое решение

указанной задачи для произвольного числа переключений скорости. Решение представлено в компактной форме, допускающей ясную физическую интерпретацию. Рассматривается задача о свободных колебаниях струны с N скачкообразными изменениями скорости распространения волн в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_N$. Изучим динамику системы на интервалах между переключениями. На каждом временном интервале $[t_k, t_{k+1})$ волновой процесс описывается функцией $u_k(x, t)$ и удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = a_k^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad t_{N+1} = \infty, \quad (1.1)$$

где $a_k > 0$ - скорость распространения волн на k -м интервале. При этом выполнены начальные условия

$$u_0(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad (1.2)$$

условия сшивания в моментах переключения t_k

$$u_k(x, t_k) = u_{k-1}(x, t_k), \quad \frac{\partial u_k}{\partial t}(x, t_k) = \frac{\partial u_{k-1}}{\partial t}(x, t_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

Приведем основные методы решения задачи о колебаниях струны с кусочно-постоянной скоростью и обсудим их недостатки:

Метод характеристик заключается в построение анализом распространения возмущений вдоль характеристик с учетом условий на линиях разрыва скорости. Его недостатки: крайне громоздкий для большого числа переключений N ; требует ручного построения характеристической сетки; сложность учета многократных отражений и преобразований волн; не дает компактной аналитической формулы.

Метод интегральных преобразований имеет следующие недостатки: обратное преобразование крайне затруднительно при кусочно-постоянных коэффициентах, трудности с учетом условий сшивания в моменты переключений, решение получается в неявной форме, плохо пригодно для анализа.

Метод функции Грина, состоящий в построении фундаментального решения с учетом изменяющихся параметров. Его недостатки: функция Грина становится разрывной при изменении скорости, сложность сшивания функций Грина для разных временных интервалов, громоздкие выражения даже для малого числа переключений.

Разностные методы состоящие в дискретизация уравнения и решение на сетке имеют следующие недостатки: потеря аналитического представления решения, погрешности дискретизации, особенно на границах раздела скоростей, неустойчивости при резких изменениях параметров, требуют значительных вычислительных ресурсов для больших N .

Таким образом, актуальна проблема нахождения аналитического решения задачи.

2. Метод Фурье для двухинтервальной задачи

Решим задачу для $n = 2$ методом Фурье. Применим преобразование Фурье по переменной x для решения задачи (1), (2), (3).

$$\hat{u}(k, t) = \mathcal{F}[u(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Уравнение для Фурье-образа $\hat{u}_0(k, t)$ на $0 \leq t < t_1$:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial t^2} = -a_1^2 k^2 \hat{u}_0.$$

Решение имеет вид:

$$\hat{u}_0(k, t) = A(k)e^{ia_1 kt} + B(k)e^{-ia_1 kt}.$$

Начальные условия в преобразовании Фурье:

$$\hat{u}_0(k, 0) = \hat{\varphi}(k), \quad \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t}(k, 0) = \hat{\psi}(k)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} A(k) + B(k) &= \hat{\varphi}(k), \quad ia_1 k(A(k) - B(k)) = \hat{\psi}(k) \\ A(k) &= \frac{1}{2} \left(\hat{\varphi}(k) + \frac{1}{ia_1 k} \hat{\psi}(k) \right), \quad B(k) = \frac{1}{2} \left(\hat{\varphi}(k) - \frac{1}{ia_1 k} \hat{\psi}(k) \right) \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\hat{u}_0(k, t) = \frac{1}{2} \left(\hat{\varphi}(k) + \frac{1}{ia_1 k} \hat{\psi}(k) \right) e^{ia_1 kt} + \frac{1}{2} \left(\hat{\varphi}(k) - \frac{1}{ia_1 k} \hat{\psi}(k) \right) e^{-ia_1 kt}$$

Теперь рассмотрим интервал $t \geq t_1$. Уравнение для $\hat{u}_1(k, t)$:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial t^2} = -a_2^2 k^2 \hat{u}_1.$$

Решение:

$$\hat{u}_1(k, t) = C(k)e^{ia_2 kt} + D(k)e^{-ia_2 kt}.$$

Условия сшивания при $t = t_1$:

$$\hat{u}_1(k, t_1) = \hat{u}_0(k, t_1), \quad \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t}(k, t_1) = \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t}(k, t_1)$$

Подставим:

$$\begin{aligned} Ce^{ia_2 kt_1} + De^{-ia_2 kt_1} &= Ae^{ia_1 kt_1} + Be^{-ia_1 kt_1}. \\ ia_2 k(Ce^{ia_2 kt_1} - De^{-ia_2 kt_1}) &= ia_1 k(Ae^{ia_1 kt_1} - Be^{-ia_1 kt_1}). \end{aligned}$$

Решаем систему относительно C и D . Умножим первое уравнение на $ia_2 k$ и сложим/вычтем со вторым. Тогда

$$\begin{aligned} Ce^{ia_2 kt_1} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \right) Ae^{ia_1 kt_1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right) Be^{-ia_1 kt_1}. \\ De^{-ia_2 kt_1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right) Ae^{ia_1 kt_1} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \right) Be^{-ia_1 kt_1}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} C(k) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \right) A(k)e^{ik(a_1 - a_2)t_1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right) B(k)e^{-ik(a_1 + a_2)t_1}, \\ D(k) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right) A(k)e^{ik(a_1 + a_2)t_1} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \right) B(k)e^{-ik(a_1 - a_2)t_1}. \end{aligned}$$

Теперь подставим $A(k)$ и $B(k)$:

$$C(k) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \right) \left(\hat{\varphi} + \frac{\hat{\psi}}{ia_1 k} \right) e^{ik(a_1 - a_2)t_1} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right) \left(\hat{\varphi} - \frac{\hat{\psi}}{ia_1 k} \right) e^{-ik(a_1 + a_2)t_1},$$

$$D(k) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \left(\hat{\varphi} + \frac{\hat{\psi}}{ia_1k}\right) e^{ik(a_1+a_2)t_1} + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) \left(\hat{\varphi} - \frac{\hat{\psi}}{ia_1k}\right) e^{-ik(a_1-a_2)t_1}.$$

Далее имеем $\hat{u}_1(k, t) = C(k)e^{ia_2kt} + D(k)e^{-ia_2kt}$. После преобразований:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) = \hat{u}_1(k, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_2 + a_1}{2a_2}\right) \left(\hat{\varphi} + \frac{\hat{\psi}}{ia_1k}\right) e^{ia_1kt_1} e^{ia_2k(t-t_1)} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{a_2 - a_1}{2a_2}\right) \left(\hat{\varphi} + \frac{\hat{\psi}}{ia_1k}\right) e^{ia_1kt_1} e^{-ia_2k(t-t_1)} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{a_2 - a_1}{2a_2}\right) \left(\hat{\varphi} - \frac{\hat{\psi}}{ia_1k}\right) e^{-ia_1kt_1} e^{ia_2k(t-t_1)} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{a_2 + a_1}{2a_2}\right) \left(\hat{\varphi} - \frac{\hat{\psi}}{ia_1k}\right) e^{-ia_1kt_1} e^{-ia_2k(t-t_1)}. \end{aligned}$$

Наконец, применим обратное преобразование Фурье. Заметим, что:

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\left(\hat{\varphi}(k) \pm \frac{\hat{\psi}(k)}{ia_1k} \right) e^{\pm ia_1kt_1} e^{\pm ia_2k(t-t_1)} \right] = v(x, \pm a_1t_1 \pm a_2(t-t_1)).$$

где $v(x, t)$ — решение Даламбера. Таким образом, обратное преобразование дает:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{a_2 + a_1}{2a_2} v(x, a_1t_1 + a_2(t-t_1)) + \frac{a_2 - a_1}{2a_2} v(x, -a_1t_1 + a_2(t-t_1)), \\ &+ \frac{a_2 - a_1}{2a_2} v(x, a_1t_1 - a_2(t-t_1)) + \frac{a_2 + a_1}{2a_2} v(x, -a_1t_1 - a_2(t-t_1)). \end{aligned}$$

Используя четность функции $v(x, t)$ по переменной t ($v(x, -t) = v(x, t)$), объединим слагаемые:

$$u_1(x, t) = \frac{a_2 + a_1}{2a_2} v(x, a_1t_1 + a_2(t-t_1)) + \frac{a_2 - a_1}{2a_2} v(x, a_2(t-t_1) - a_1t_1).$$

Решение задачи для $n > 2$ методом Фурье наталкивается на технические трудности. В следующих разделах предлагаются прямые методы.

3. Основные теоретические результаты

1. Рекуррентный подход к построению решения

Решение задачи может быть представлено в виде рекуррентной формулы последовательным движением по временным промежуткам. Определим последовательность функций $u_n(x, t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= v(x, a_1t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < t_1, \\ u_{n+1}(x, t) &= \frac{m_{n+1} - 1}{2m_{n+1}} u_n(x, \xi_n(t)) + \frac{m_{n+1} + 1}{2m_{n+1}} u_n(x, \xi_n(t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t_n < t < t_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $m_{n+1} = a_{n+1}/a_n$, $\xi_n(t) = m_{n+1}(t - t_n) + t_n$.

Заметим, что функция $u_n(x, t)$ — четная по t : $u_n(x, -t) = u_n(x, t)$. Тогда ее производная удовлетворяет свойству:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, -t) = -\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t).$$

Теперь вычислим производную $u_{n+1}(x, t)$:

$$u_{n+1}(x, t) = \frac{m_{n+1} - 1}{2m_{n+1}} u_n(x, m_{n+1}(t - t_n) - t_n) + \frac{m_{n+1} + 1}{2m_{n+1}} u_n(x, m_{n+1}(t - t_n) + t_n).$$

Обозначим:

$$\tau_1 = m_{n+1}(t - t_n) - t_n, \quad \tau_2 = m_{n+1}(t - t_n) + t_n.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}(x, t) = \frac{m_{n+1} - 1}{2m_{n+1}} \cdot m_{n+1} \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, \tau_1) + \frac{m_{n+1} + 1}{2m_{n+1}} \cdot m_{n+1} \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, \tau_2).$$

Упростим:

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}(x, t) = \frac{m_{n+1} - 1}{2} \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, \tau_1) + \frac{m_{n+1} + 1}{2} \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, \tau_2).$$

Теперь вычислим производную при $t = t_n$:

$$\tau_1|_{t=t_n} = m_{n+1}(t_n - t_n) - t_n = -t_n, \quad \tau_2|_{t=t_n} = m_{n+1}(t_n - t_n) + t_n = t_n.$$

Следовательно:

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}(x, t_n) = \frac{m_{n+1} - 1}{2} \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, -t_n) + \frac{m_{n+1} + 1}{2} \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, t_n).$$

Учитывая нечетность производной $\frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, -t_n) = -\frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, t_n)$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}(x, t_n) &= \frac{m_{n+1} - 1}{2} \left(-\frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, t_n) \right) + \frac{m_{n+1} + 1}{2} \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, t_n) \\ &= \left(-\frac{m_{n+1} - 1}{2} + \frac{m_{n+1} + 1}{2} \right) \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, t_n) = \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x, t_n). \end{aligned}$$

Таким образом, производная непрерывна в точке t_n :

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}(x, t_n) = \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t_n).$$

Недостатки метода: чтобы получить решение на N временном промежутке надо провести последовательные вычисления на промежутках $1, 2, \dots, n - 1$.

2. Общая формула для произвольного числа переключений

ТЕОРЕМА 1. Для $t_{n-1} < t < t_n$ функция $u_n(x, t)$ выражается явной формулой:

$$u_n(x, t) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} = \pm 1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) v \left(x, a_n(t - t_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right), \quad (3.2)$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $t_0 = 0$, а $v(x, t)$ - решение модельной задачи для струны с постоянной скоростью $a = 1$, а сумма сводится берется по всевозможным комбинациям $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} = \pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод математической индукции. Для $n=2$ рассмотрим интервал $t \in [t_1, t_2]$. Согласно теореме, решение должно иметь вид:

$$u_2(x, t) = \sum_{\varepsilon_1 = \pm 1} \frac{a_2 + \varepsilon_1 a_1}{2a_2} v(x, a_2(t - t_1) + a_1 \varepsilon_1 \Delta t_1),$$

где $\Delta t_1 = t_1$ и в правой части два слагаемых, $v(x, \xi)$ — решение модельной задачи с скоростью $a = 1$, определяемое по формуле Даламбера:

$$v(x, \xi) = \frac{1}{2}[\varphi(x + \xi) + \varphi(x - \xi)] + \frac{1}{2a_1} \int_{x-\xi}^{x+\xi} \psi(s) ds.$$

Проверим, что $u_2(x, t)$ удовлетворяет волновому уравнению с скоростью a_2 :

Для каждого $\varepsilon_1 = \pm 1$ функция $v(x, a_2(t - t_1) + a_1\varepsilon_1 t_1)$ удовлетворяет:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2},$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Так как уравнение линейно, это верно и для всей суммы $u_2(x, t)$.

Проверим условия сшивания при $t = t_1$. При $t = t_1$ аргумент v становится:

$$a_2(t_1 - t_1) + a_1\varepsilon_1 t_1 = a_1\varepsilon_1 t_1.$$

Тогда:

$$u_2(x, t_1) = \sum_{\varepsilon_1=\pm 1} \frac{a_2 + \varepsilon_1 a_1}{2a_2} v(x, a_1\varepsilon_1 t_1).$$

Поскольку $v(x, \xi)$ чётна по ξ (из формулы Даламбера), то $v(x, -a_1 t_1) = v(x, a_1 t_1)$. Поэтому:

$$u_2(x, t_1) = \frac{a_2 + a_1}{2a_2} v(x, a_1 t_1) + \frac{a_2 - a_1}{2a_2} v(x, a_1 t_1) = v(x, a_1 t_1).$$

Но $v(x, a_1 t_1) = u_1(x, t_1)$. Таким образом, $u_2(x, t_1) = u_1(x, t_1)$. Непрерывность смещения выполнена.

Непрерывность скорости. Вычислим производную $\frac{\partial u_2}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \sum_{\varepsilon_1=\pm 1} \frac{a_2 + \varepsilon_1 a_1}{2a_2} \cdot a_2 \frac{\partial v}{\partial \xi}(x, a_2(t - t_1) + a_1\varepsilon_1 t_1) = \sum_{\varepsilon_1=\pm 1} \frac{a_2 + \varepsilon_1 a_1}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi}(x, a_2(t - t_1) + a_1\varepsilon_1 t_1).$$

При $t = t_1$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, t_1) = \sum_{\varepsilon_1=\pm 1} \frac{a_2 + \varepsilon_1 a_1}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi}(x, a_1\varepsilon_1 t_1).$$

Производная $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ нечётна по ξ : $\frac{\partial v}{\partial \xi}(x, -\xi) = -\frac{\partial v}{\partial \xi}(x, \xi)$. Поэтому:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, t_1) = \frac{a_2 + a_1}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi}(x, a_1 t_1) + \frac{a_2 - a_1}{2} \left(-\frac{\partial v}{\partial \xi}(x, a_1 t_1) \right) = a_1 \frac{\partial v}{\partial \xi}(x, a_1 t_1).$$

Однако

$$a_1 \frac{\partial v}{\partial \xi}(x, a_1 t_1) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, t_1).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, t_1) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, t_1).$$

Непрерывность скорости выполнена. Базис индукции доказан.

Шаг индукции: надо доказать, что для номера $n = m+1$ в интервале $t \in [t_m, t_{m+1})$ решение имеет вид:

$$u_{m+1}(x, t) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1} \left(\prod_{i=1}^m \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) v \left(x, a_{m+1}(t - t_m) + \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right).$$

если для номера $n = m$ в интервале $t \in (t_{m-1}, t_m)$ формула (4) верна. Проверим условия сшивания при $t = t_m$. При $t = t_m$ для u_{m+1} :

$$\begin{aligned} u_{m+1}(x, t_m) &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1} \left(\prod_{i=1}^m \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) v \left(x, a_{m+1}(t_m - t_m) + \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) \\ &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1} \left(\prod_{i=1}^m \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) v \left(x, \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right). \end{aligned}$$

Для $u_m(x, t_m)$:

$$\begin{aligned} u_m(x, t_m) &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1} = \pm 1} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) v \left(x, a_m(t_m - t_{m-1}) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) \\ &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1} = \pm 1} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) v \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right). \end{aligned}$$

Теперь выделим в сумме для u_{m+1} суммирование по ε_m :

$$u_{m+1}(x, t_m) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) \sum_{\varepsilon_m = \pm 1} \frac{a_{m+1} + \varepsilon_m a_m}{2a_{m+1}} v \left(x, \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right).$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} &\sum_{\varepsilon_m = \pm 1} \frac{a_{m+1} + \varepsilon_m a_m}{2a_{m+1}} v \left(x, \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) \\ &= \frac{a_{m+1} + a_m}{2a_{m+1}} v \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) + \frac{a_{m+1} - a_m}{2a_{m+1}} v \left(x, -a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right). \end{aligned}$$

Однако, поскольку $v(x, \xi)$ является чётной функцией по ξ (что следует из формулы Даламбера), то $v(x, -\xi) = v(x, \xi)$. Поэтому:

$$\begin{aligned} &\sum_{\varepsilon_m = \pm 1} \frac{a_{m+1} + \varepsilon_m a_m}{2a_{m+1}} v \left(x, \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) = \frac{a_{m+1} + a_m}{2a_{m+1}} v \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) \\ &+ \frac{a_{m+1} - a_m}{2a_{m+1}} v \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) = v \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right). \end{aligned}$$

Таким образом:

$$u_{m+1}(x, t_m) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) v \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) = u_m(x, t_m).$$

Непрерывность смещения доказана.

Для доказательства непрерывности скорости вычислим производную по времени для u_{m+1} :

$$\frac{\partial u_{m+1}}{\partial t}(x, t) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1} \left(\prod_{i=1}^m \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) a_{m+1} \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, a_{m+1}(t - t_m) + \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right).$$

При $t = t_m$:

$$\frac{\partial u_{m+1}}{\partial t}(x, t_m) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1} \left(\prod_{i=1}^m \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) a_{m+1} \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right).$$

Выделим суммирование по ε_m :

$$\frac{\partial u_{m+1}}{\partial t}(x, t_m) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) \sum_{\varepsilon_m = \pm 1} \frac{a_{m+1} + \varepsilon_m a_m}{2a_{m+1}} a_{m+1} \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right).$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_m = \pm 1} \frac{a_{m+1} + \varepsilon_m a_m}{2a_{m+1}} a_{m+1} \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) &= \frac{a_{m+1} + a_m}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) \\ &+ \frac{a_{m+1} - a_m}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, -a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ является нечётной функцией по ξ (что следует из формулы Даламбера), то $\frac{\partial v}{\partial \xi}(x, -\xi) = -\frac{\partial v}{\partial \xi}(x, \xi)$. Поэтому:

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_m = \pm 1} \frac{a_{m+1} + \varepsilon_m a_m}{2a_{m+1}} a_{m+1} \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) &= \frac{a_{m+1} + a_m}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) \\ &- \frac{a_{m+1} - a_m}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) = a_m \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right). \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{\partial u_{m+1}}{\partial t}(x, t_m) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{a_{i+1} + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}} \right) a_m \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(x, a_m \Delta t_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \varepsilon_i \Delta t_i \right) = \frac{\partial u_m}{\partial t}(x, t_m).$$

Непрерывность скорости доказана.

Проверим выполнение волнового уравнения. Для каждого слагаемого в сумме для u_{m+1} функция $v(x, a_{m+1}(t - t_m) + \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_i \Delta t_i)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_{m+1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2},$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_{m+1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

По линейности это выполняется и для всей суммы u_{m+1} . По методу математической индукции формула (1) верна для всех $n \geq 1$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Этот результат показывает, что сложное поведение конечной струны с изменяющимися параметрами можно описать на языке решений более простых задач, что может быть полезно для анализа и численного моделирования.

4. Конечная струна с граничными условиями Дирихле

Пусть теперь функция $v(x, t)$ решение задачи о колебаниях конечной струны длиной L с нулевыми условиями Дирихле на концах и постоянной скоростью $a = 1$, то есть:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(t) \cos \left(\frac{n\pi t}{L} \right) + B_n(t) \sin \left(\frac{n\pi t}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

где коэффициенты $A_n(t), B_n(t)$ вычисляются из начальных условий $\varphi(x), \psi(x)$, то предложенная рекуррентная формула (4) и общая формула (5) остаются верными для конечной струны. Проверим граничные условия. Каждое слагаемое $\sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$ зануляется при $x = 0$ и $x = L$. Следовательно, вся сумма $v(t; x)$ и любая её линейная комбинация будет автоматически удовлетворять граничным условиям. Далее функция $v(t; x)$ по построению удовлетворяет модельному волновому уравнению. Однако, в формуле для u_2 аргументом v является не t , а линейная комбинация $a_2(t - t_1) \pm a_1 t_1$. Как было показано ранее, при таком линейном преобразовании времени функция u_2 начинает удовлетворять волновому уравнению с новой скоростью a_2 . Аналогично доказывается, что утверждение справедливо для каждой из функций u_n .

Проверим условия сшивания. Непрерывность u_n и $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ в момент $t = t_{n-1}$ была строго доказана ранее и не зависит от граничных условий.

В случае $N = 2$ формула (5) для конечной струны принимает вид

$$u_2(x, t) = \frac{a_2 + a_1}{2a_2} v(x, a_2(t - t_1) + a_1 t_1) + \frac{a_2 - a_1}{2a_2} v(x, a_2(t - t_1) - a_1 t_1).$$

Можно утверждать, что на конечной струне решение представляет собой суперпозицию стоячих волн (мод). В момент $t = t_1$ происходит мгновенное изменение скорости с a_1 на a_2 . Это изменение приводит к тому, что каждая мода n распадается на две волны. Одна продолжает колебания с новой частотой $\omega_{2,n} = \frac{a_2 n \pi}{L}$ и фазой, соответствующей "прохождению" (коэффициент $\frac{a_2 + a_1}{2a_2}$). Другая колеблется с той же новой частотой, но с фазой, соответствующей "отражению" (коэффициент $\frac{a_2 - a_1}{2a_2}$).

1. Волновая картина процесса

Формула (3.2) допускает ясную физическую интерпретацию. Суммирование в ней ведётся по всем 2^{n-1} возможным путям распространения сигнала через границы раздела временного промежутка. Коэффициенты $\frac{a_i + 1 + \varepsilon_i a_i}{2a_{i+1}}$ описывают отражение и прохождение волн на моментах переключения. Если $\varepsilon_i = +1$ и коэффициент отражения волны, если $\varepsilon_i = -1$. Временной аргумент функции v определяет время запаздывания, соответствующее данному пути распространения. Решение представляется как суперпозиция волн, которые распространяются со скоростью a_n на текущем интервале. Волны несут "память" о всех предыдущих переключениях скорости через сумму $\sum a_i \varepsilon_i \Delta t_i$. Формула (5) является обобщением формулы Даламбера на случай кусочно-постоянной скорости распространения волн.

5. Обсуждение результатов

В работе получено аналитическое решение задачи о колебаниях струны с произвольным числом скачкообразных изменений скорости распространения волн. Решение представлено в двух формах. Компактная явная формула (5), которую выгодно применять если нужно решение на временных промежутках далеких от начала отсчета. Мы сразу без промежуточных вычислений получаем ответ в явном виде. Нами получена также рекуррентная формула, удобная в инженерных вычислениях.

Представленный в теореме 1 метод является наиболее предпочтительным для аналитического исследования данной задачи, так как он дает явное решение в замкнутой форме, сохраняет физическую интерпретацию процесса распространения волн, позволяет изучать асимптотическое поведение решения.

Основной недостаток метода - комбинаторный рост сложности с увеличением числа переключений - является принципиальным и отражает физическую сложность процесса многократного отражения и преломления волн. Показано, что решение допускает ясную физическую интерпретацию в терминах распространения волн по различным путям с соответствующими коэффициентами отражения и прохождения. Результаты справедливы как для неограниченной, так и для конечной струны с нулевыми граничными условиями Дирихле.

Полученные результаты могут быть использованы для моделирования распространения волн в средах с переменными параметрами, анализа отклика систем с временным изменением характеристик и решения обратных задач. Предложенный метод не просто решает частную задачу, а открывает новый общий подход к анализу гиперболических уравнений с кусочно-постоянными и, потенциально, более сложными переменными параметрами. Его перспективы лежат в области теоретических обобщений на более сложные модели, разработки эффективных алгоритмов для работы с комбинаторным "взрывом", решение прикладных задач управления и идентификации, где ключевую роль играет наличие явной формулы. Формула имеет глубокую комбинаторную природу. Она может быть проинтерпретирована в терминах алгебры (например, как действие некоторой группы) или теории вероятностей (пути случайного блуждания). Это открывает возможности для применения мощного аппарата из этих областей. Таким образом метод представляет значительный интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения.

6. Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFS-2024-0007).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 735 с.
2. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975. — 256 с.
3. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1982. — 336 с.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
5. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с.
6. Бабенко К. И. Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986. — 744 с.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989. — 572 с.
8. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 444 с.
9. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985. — 448 с.

10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. — М.: Наука, 1988. — 736 с.
11. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 407 с.
12. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 592 с.
13. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1977. — 439 с.
14. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.
15. Ильинский А. С., Кравцов Ю. А. Методы математической физики в задачах дифракции. — М.: Издательство МГУ, 2005. — 312 с.
16. Whitham G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. — New York: Wiley, 1974. — 636 p.
17. Graff K. F. *Wave Motion in Elastic Solids*. — New York: Dover Publications, 1991. — 649 p.
18. Morse P. M., Ingard K. U. *Theoretical Acoustics*. — Princeton: Princeton University Press, 1968. — 927 p.
19. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 2. — New York: Wiley, 1989. — 830 p.
20. Нижников А. И., Яремко О. Э., Яремко Н. Н. Матричные интегральные преобразования для моделирования волновых процессов в кусочно-однородных средах // Чебышевский сборник. — 2023. — Т. 24, № 4. — С. 239–251.

REFERENCES

1. Tikhonov, A.N., and Samarskii, A.A., 1977, *Equations of Mathematical Physics*, Moscow: Nauka, 735 p.
2. Smirnov, M.M., 1975, *Problems in Equations of Mathematical Physics*, Moscow: Nauka, 256 p.
3. Bitsadze, A.V., 1982, *Equations of Mathematical Physics*, Moscow: Nauka, 336 p.
4. Vladimirov, V.S., 1981, *Equations of Mathematical Physics*, Moscow: Nauka, 512 p.
5. Andronov, A.A., Vitt, A.A., and Khaikin, S.E., 1981, *Theory of Oscillations*, Moscow: Nauka, 568 p.
6. Babenko, K.I., 1986, *Fundamentals of Numerical Analysis*, Moscow: Nauka, 744 p.
7. Kolmogorov, A.N., and Fomin, S.V., 1989, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Moscow: Nauka, 572 p.
8. Sobolev, S.L., 1966, *Equations of Mathematical Physics*, Moscow: Nauka, 444 p.
9. Fedjuk, M.V., 1985, *Ordinary Differential Equations*, Moscow: Nauka, 448 p.
10. Landau, L.D., and Lifshitz, E.M., 1987, *Course of Theoretical Physics. Vol. VII: Theory of Elasticity*, Moscow: Nauka, 248 p.
11. Akhiezer, N.I., 1965, *Lectures on Approximation Theory*, Moscow: Nauka, 407 p.

12. Samarskii, A.A., and Nikolaev, E.S., 1978, *Methods for Solving Grid Equations*, Moscow: Nauka, 592 p.
13. Godunov, S.K., and Ryaben'kii, V.S., 1977, *Difference Schemes*, Moscow: Nauka, 439 p.
14. Mikhlin, S.G., 1970, *Variational Methods in Mathematical Physics*, Moscow: Nauka, 512 p.
15. Ilinskii, A.S., and Kravtsov, Yu.A., 2005, *Methods of Mathematical Physics in Diffraction Problems*, Moscow: Moscow State University Press, 312 p.
16. Whitham, G.B., 1974, *Linear and Nonlinear Waves*, New York: Wiley, 636 p.
17. Graff, K.F., 1991, *Wave Motion in Elastic Solids*, New York: Dover Publications, 649 p.
18. Morse, P.M., and Ingard, K.U., 1968, *Theoretical Acoustics*, Princeton: Princeton University Press, 927 p.
19. Courant, R., and Hilbert, D., 1989, *Methods of Mathematical Physics. Vol. 2*, New York: Wiley, 830 p.
20. Nizhnikov, A.I., Yaremko, O.E., and Yaremko, N.N., 2023, "Matrix integral transforms for modeling wave processes in piecewise homogeneous media", *Chebyshevskii Sbornik*, 24(4), pp. 239–251.

Получено: 23.04.2025

Принято в печать: 17.10.2025