ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 511 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-329-343

О приближении действительных чисел суммами двух степеней простых чисел

А. П. Науменко

Науменко Антон Павлович — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; ОАО «ИнфоТеКС» (г. Москва).
e-mail: naumenko.anton90@gmail.com

Аннотация

В статье для любого фиксированного $c \geq 1$ получена нижняя оценка $\kappa(c)$, при выполнении которой к заданному действительному числу $N > N_0(\varepsilon)$ можно подойти суммой двух степеней простых чисел $p_1^c + p_2^c$ на расстояние не большее, чем $H = N^{\kappa(c)+\varepsilon}$, где ε – произвольное положительное число.

Данный результат получен при помощи плотностной техники, разработанной Ю. В. Линником в 1940-х годах. Плотностная техника основана на применении явных формул, выражающих суммы по простым числам через суммы по нетривиальным нулям дзета-функции Римана и использовании плотностных теорем – оценок количества нетривиальных нулей дзета-функции, лежащих в критической полосе и таких, что их реальная часть больше некоторого σ, где $1 > \sigma \geq 1/2$.

Содержащиеся в статье результаты основаны на применении современных плотностных теорем, полученных А. Ивичем. Кроме того, при доказательстве была использована теорема Бейкера, Хармана, Пинтца: к заданному действительному числу $N > N_0(\varepsilon)$ можно подойти простым числом на расстояние не большее, чем $H = N^{21/40+\varepsilon}$. Также использован результат М. Хаксли об оценке значений дзета-функции Римана на критической прямой: $|\zeta(1/2+it)| \ll t^{32/205+\varepsilon}$.

Ключевые слова: простые числа, диофантовы неравенства, плотностная теорема.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Науменко А. П. О приближении действительных чисел суммами двух степеней простых чисел // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 329–343.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 511 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-329-343

On the approximation of real numbers by the sums of two powers of primes

A. P. Naumenko

Naumenko Anton Pavlovich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University; JSC “Infotex” (Moscow).
e-mail: naumenko.anton90@gmail.com

Abstract

In the article we have for any fixed c estimate of $\kappa(c)$ such that $N > N_0(\varepsilon)$ can be approached by the sum of powers of two primes $p_1^c + p_2^c$ by a distance not exceeding $H = N^{\kappa(c)+\varepsilon}$, where ε is an arbitrary positive number.

These results were obtained using the density technique developed by Yu.V. Linnik in the 1940s. The density technique is based on applying explicit formulas expressing sums over prime numbers with sums over nontrivial zeros of the Riemann zeta function and using density theorems that estimate the number of nontrivial zeros of the zeta function lying in the critical strip such that their real part is greater than some σ, $1 > \sigma \geq 1/2$.

The results obtained in this paper are based on the application of modern density theorems obtained by A. Ivich. In addition, the proof used the theorem of Baker, Harman, and Pintz: one can approach a given real number $N > N_0(\varepsilon)$ by a prime number by a distance no more than $H = N^{21/40+\varepsilon}$. Also, the following result obtained by M. Huxley: $|\zeta(1/2+it)| \ll t^{32/205+\varepsilon}$.

Keywords: primes, diophantine inequalities, density theorem.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

Naumenko, A. P. 2025, “On the approximation of real numbers by the sums of two powers of primes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 329–343.

1. Введение

Пусть $N(\sigma, T)$ – число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma \leq Res < 1$, $0 < Ims \leq T$.

Оценки вида
$$N(\sigma, T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^c T, \quad c \geq 1 \tag{1.1}$$
называются плотностными теоремами.

В 1972 году Хаксли [1] получил значение $\lambda = 6/5$ на всем промежутке $1/2 \leq \sigma < 1$. Константа c играет меньшую роль. В работе [2] показано, что $c \leq 18.2$. Оценки для $\lambda = \lambda(\sigma)$ при различных значениях σ рассмотрены в работах А.Ивича [3]–[6].

В сороковых годах двадцатого века Ю.В. Линник [7], [8] разработал новую технику решения задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Эта техника получила название плотностной.

В монографии С.М. Воронина и А.А. Карацубы [9] с использованием плотностной техники доказано, что неравенство $|p - N| \leq H$ разрешимо в простых числах при $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}}$ $\exp(\ln^{0.8} N)$ для любого достаточно большого N, где λ – константа из плотностной теоремы (1).

Позднее, с привлечением метода решета, был получен следующий результат о "близости" простого числа к произвольному действительному [10]: доказано, что неравенство $|p-N| \leq H$ разрешимо в простых числах при
$$H > N^{21/40+\varepsilon} \tag{1.2}$$
для любого $N > N_0(\varepsilon)$, где ε – произвольное положительное число; для числа решений данного неравенства справедлива оценка $J(N, H) \gg H/\ln N$.

В 2006 году в работе [11] В.В. Гирько и С.А. Гриценко при помощи плотностной техники доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы (1). Если $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство*
$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2.

Для числа решений данного неравенства справедлива оценка $I(N,H) \gg \frac{H}{\ln N}$.

В 2012 году в работе [12] С.А. Гриценко и Н.Т. Ча при помощи плотностной техники получили следующие результаты.

Теорема 2. *Если* $H > \sqrt{N}\exp(\ln^{-0.1} N)$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2.

Теорема 3. *Пусть* λ *– константа из плотностной теоремы. Если* $H > N^{(1-\lambda^{-1})(1-(2\lambda)^{-1})}\exp(\ln^{0.8} N)$, *то неравенство*

$$|p_1 + p_2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2.

В 2018 году автором с использованием плотностных теорем А. Ивича [3] получено следующее утверждение [13], [14].

Теорема 4. *Пусть* ε *– произвольное положительное число. Если* $H > N^{\frac{31}{64}+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

С использованием метода экспоненциальных пар [3], [5] указанный результат был уточнен автором. Показано [15], что в теореме возможен выбор $H > N^{\frac{31}{64}-\frac{1}{300}+\varepsilon}$.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $c \geq 1$ *– действительное число. Тогда неравенство*

$$|p_1^c + p_2^c - N| \leq N^{\kappa(c)+\varepsilon},$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$ *при следующих условиях:*

$$\kappa(c) \geq 1 - \frac{357}{320c} + \frac{19}{128c^2}, \quad \text{если} \quad 1 \leq c \leq \frac{779}{422},$$

$$\kappa(c) \geq 1 - \frac{7359}{6880c} + \frac{437}{6880c^2}, \quad \text{если} \quad \frac{779}{422} < c \leq \frac{171}{79},$$

$$\kappa(c) \geq 1 - \frac{23}{20c} + \frac{19}{80c^2}, \quad \text{если} \quad \frac{171}{79} < c \leq \frac{38}{17},$$

$$\kappa(c) \geq 1 - \frac{919}{540c} + \frac{361}{2160c^2}, \quad \text{если} \quad \frac{38}{17} < c \leq \frac{323}{50},$$

$$\kappa(c) \geq 1 - \frac{357}{320c} + \frac{19}{128c^2}, \quad \text{если} \quad \frac{323}{50} < c \leq \frac{13863559}{1368538} = 10.13...,$$

$$\kappa(c) \geq 1 - \frac{926419}{1447332c} + \frac{1281911}{14473320c^2}, \quad \text{если} \quad \frac{13863559}{1368538} < c \leq \frac{6213}{88} = 70.62...,$$

$$\kappa(c) \geq 1 - \frac{17024423}{25280c} + \frac{296457}{202240c^2}, \quad \text{если} \quad c > \frac{6213}{88}.$$

Замечание 1. *При* $c=1$ *из Теоремы 5 следует разрешимость неравенства* $|p_1+p_2-N| \leq H$ *при* $H \gg N^{7/80+\varepsilon}$ *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$, *что уточняет результат Теоремы 3.*

Замечание 2. *При каждом фиксированном* $\frac{95}{74} < c \leq \frac{38}{17}$ *результат теоремы 5 может быть несколько уточнен за счет выбора экспоненциальной пары, соответствующей данному* c.

2. Основной текст статьи

1. Леммы

Лемма 1. *(Явная формула) Пусть $2 \le T \le x$. Тогда*

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = x - \sum_{|Im\rho| \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ – нули $\zeta(s)$ в критической полосе.

Доказательство см. в [16], Глава 5.

Лемма 2. *При $T \ge 2$ справедливы оценки*

$$\sum_{|\gamma - T| \le 1} 1 = O(\ln T), \qquad \sum_{|\gamma - T| > 1} \frac{1}{|\gamma - T|} = O(\ln^2 T).$$

Доказательство см. в [16], Глава 4.

Лемма 3. *Существует абсолютная постоянная $c_1 > 0$ такая, что $\zeta(s) \ne 0$ в области*

$$\sigma \ge 1 - \frac{c_1}{\ln^{2/3}|T|(\ln\ln|T|)^{1/3}}, \quad \text{где} \quad |T| \ge 10.$$

Доказательство см. в [16], Глава 6.

Лемма 4. *Пусть ε – произвольное положительное число. Для $T > T_0(\varepsilon)$ справедлива оценка:*

$$|\zeta(1/2 + iT)| \ll T^{32/205+\varepsilon}. \tag{2.1}$$

Доказательство см. в [17].

Лемма 5. *Пусть ε – произвольное положительное число. Для $T > T_0(\varepsilon)$ справедливы плотностные теоремы:*

$$N(\sigma, T) \ll T^{167(1-\sigma)^{3/2}} \ln^{16} T, \quad 9/10 \le \sigma \le 1. \tag{2.2}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{4(1-\sigma)}{2\sigma+1}+\varepsilon}, \quad 17/18 \le \sigma \le 1. \tag{2.3}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{24(1-\sigma)}{30\sigma-11}+\varepsilon}, \quad 0.89018... = 155/174 \le \sigma \le 17/18. \tag{2.4}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2\sigma}+\varepsilon}, \quad 4/5 \le \sigma \le 1. \tag{2.5}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{6(1-\sigma)}{5\sigma-1}+\varepsilon}, \quad 13/17 \le \sigma \le 1. \tag{2.6}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{7\sigma-4}+\varepsilon}, \quad 3/4 \le \sigma \le 13/17. \tag{2.7}$$

Доказательство см. в [3], глава 11.

Лемма 6. *Пусть ε – произвольное положительное число. Для $T > T_0(\varepsilon)$ справедливы плотностные теоремы*

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{53}{40}(1-\sigma)+\varepsilon}, \quad 0.9524... = \frac{15891382}{16684097} \le \sigma \le 1 - 10^{-6}. \tag{2.8}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{21(1-\sigma)}{151\sigma-128}+\varepsilon}, \quad \frac{237}{250} \le \sigma \le \frac{953}{1000}. \tag{2.9}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{192(1-\sigma)}{756\sigma-551}+\varepsilon}, \quad 0.7837... = \frac{743}{948} \le \sigma \le \frac{503}{564} = 0.8918... \tag{2.10}$$

Доказательство. Воспользуемся оценками (11.52) и (7.57) в [3]. Тогда для любого $k>2$ получим:

$$N(\sigma,T)\ll T^{\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}(\kappa+\lambda-k\sigma+k-1)+\varepsilon}, \tag{2.11}$$

при $\frac{2k-1}{2k}\leq\sigma\leq\frac{|\kappa-\lambda|+k-1}{k}$.

Будем использовать экспоненциальную пару $(\kappa,\lambda)=(236/291,11/194)$.

Достаточно показать, что:

$$\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}(\kappa+\lambda-k\sigma+k-1)\leq\frac{53}{40}(1-\sigma), \tag{2.12}$$

на промежутке $\frac{15891382}{16684097}\leq\sigma\leq 1-10^{-6}$.

Действительно, из (14) получаем

$$\sigma\geq 1-\frac{\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}(1-\kappa-\lambda)}{\frac{(2k-3)k}{(k-1)(k-2)}-\frac{53}{40}}.$$

С другой стороны, имеем условие

$$\sigma\leq 1-\frac{1-|\kappa-\lambda|}{k}.$$

Но тогда для k удовлетворяющих условию

$$\frac{\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}(1-\kappa-\lambda)}{\frac{(2k-3)k}{(k-1)(k-2)}-\frac{53}{40}}\geq\frac{1-|\kappa-\lambda|}{k}$$

или

$$\frac{(2k-3)k}{(k-1)(k-2)}\leq\frac{53(1-|\kappa-\lambda|)}{80\lambda} \tag{2.13}$$

выполняется (14).

Левая часть в (15) монотонно убывает как функция переменной k и при $k=150/29$ неравенство (15) выполнено.

Выбирая $150/29\leq k<500000$, получим плотностную теорему (10).

Далее, выбирая $47/10\leq k\leq 53/10$, можем аналогичным образом получить на промежутке $\frac{237}{250}\leq\sigma\leq\frac{953}{1000}$ плотностную теорему (11).

Наконец, оценка (12) получена использованием в формуле (3.37) работы [5] оценки (3).

Лемма 7. *Пусть ε – произвольное положительное число, $\alpha\in(0;1]$ – действительное число, $N>N_0(\varepsilon)$, $N^{1-\varepsilon}\gg N_1\gg N^{1-19/40\alpha+\varepsilon}$, $N^{1-\alpha}\gg H\gg N_1^{1-\alpha+\varepsilon}$, $T=N_1/(H\ln^3 N)$. Тогда при каждом фиксированном $0\leq i<0.5\ln N$ для любого $(N-2N_1)^\alpha\leq n\leq(N-N_1)^\alpha$ и любого $\sigma\in[0.5+i/\ln N;0.5+(i+1)/\ln N)$ справедлива оценка*

$$W_i=\sum_{N-2N_1<n^{1/\alpha}\leq N-N_1}\int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha}\left|\sum_{\substack{0.5+i/\ln N\leq\beta<0.5+(i+1)/\ln N\\|\gamma|\leq T}}x^{\rho-1}\right|dx\ll$$

$$\ll\frac{HN_1^\alpha}{N^{1-\alpha}}\min\left(N_1^{\alpha(\sigma-1)}N(\sigma,T),N_1^{\alpha(\sigma-1)}\sqrt{\frac{N(\sigma,T)N^{1-\alpha}}{H}}\ln N\right).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$W_i(n)=\int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha}\left|\sum_{\substack{0.5+i/\ln N\le\beta<0.5+(i+1)/\ln N\\ |\gamma|\le T}} x^{\rho-1}\right|dx.$$

Длина промежутка интегрирования при любом n по порядку равна $\frac{H}{N_1^{1-\alpha}}$.

Далее имеем

$$W_i(n)\ll\int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha}\left|\sum_{|\gamma|\le T}x^{\rho-1}\right|dx\ll\sum_{|\gamma|\le T}\int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha}x^{\sigma-1}dx,$$

где $\sigma\in[0.5+i/\ln N;0.5+(i+1)/\ln N]$ – точка, в которой правая часть неравенства принимает максимальное значение.

Интегралы оценим тривиально. Модуль подынтегральной функции на всем промежутке интегрирования сохраняет порядок $N_1^{\alpha(\sigma-1)}$ при любом значении n. Тогда получаем для каждого интеграла оценку

$$\int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha}x^{\sigma-1}dx\ll\frac{H}{N_1^{1-\alpha}}N_1^{\alpha(\sigma-1)}.$$

Суммы по нулям в этом случае дадут вклад вида $N(\sigma,T)$. Тогда окончательно для $W_i(n)$ имеем

$$W_i(n)\ll\frac{H}{N_1^{1-\alpha}}\max_{\sigma\in[0.5+i/\ln N;0.5+(i+1)/\ln N]}N_1^{\alpha(\sigma-1)}N(\sigma,T).$$

Функция $N_1^{\alpha(\sigma-1)}N(\sigma,T)$ на всем промежутке $[0.5+i/\ln N;0.5+(i+1)/\ln N]$ сохраняет порядок, так как $N_1\ll N^{1-\varepsilon}$, $N(\sigma,T)\ll N$.

Перейдем теперь к внешней сумме в определении W_i. Длина промежутка суммирования по порядку равна $\frac{N_1}{N^{1-\alpha}}$. Так как оценка на $W_i(n)$ не зависит от n для W_i получаем

$$W_i\ll\frac{HN_1^\alpha}{N^{1-\alpha}}N_1^{\alpha(\sigma-1)}N(\sigma,T),\tag{2.14}$$

при любом $0.5+i/\ln N\le\sigma\le0.5+(i+1)/\ln N$.

Далее заметим, что при нашем выборе параметров N_1 и H справедливо

$$N-(n+1)^{1/\alpha}+H<N-n^{1/\alpha}-H,$$

то есть промежутки интегрирования в определении W_i при различных n не пересекаются.

Так как подынтегральная функция неотрицательна, применив к W_i неравенство Коши, получим:

$$W_i^2\ll\frac{HN_1^\alpha}{N^{1-\alpha}}\int_{N_1^\alpha/2}^{2N_1^\alpha}\left|\sum_{\substack{|\gamma|\le T\\ 0.5+i/\ln N\le\beta<0.5+(i+1)/\ln N}}x^{\rho-1}\right|^2dx.$$

Раскроем квадрат модуля, разобьем при суммировании нули на "близкие" и "далекие" и поменяем после этого порядок суммирования и интегрирования. Имеем

$$W_i^2\ll\frac{HN_1^\alpha}{N^{1-\alpha}}\left(\sum_{|\gamma|\le T}\sum_{\substack{|\gamma_1|\le T\\ |\gamma-\gamma_1|\le1}}\int_{N_1^\alpha/2}^{2N_1^\alpha}x^{2\sigma-2}dx+\sum_{|\gamma|\le T}\sum_{\substack{|\gamma_1|\le T\\ |\gamma-\gamma_1|>1}}\frac{1}{|\gamma-\gamma_1|}\int_{N_1^\alpha/2}^{2N_1^\alpha}x^{2\sigma-2}dx\right),$$

где в точке $\sigma \in [0.5 + i/\ln N; 0.5 + (i+1)/\ln N)$ правая часть неравенства достигает своего максимума.

Интегралы оцениваем тривиально, учитывая, что вклад суммирования по нулям в данном случае имеет вид $N(\sigma, T)$ и используя Лемму .

Тогда окончательно для W_i имеем

$$W_i \ll \frac{HN_1^{\alpha}}{N^{1-\alpha}} N_1^{(\sigma-1)/2} \sqrt{\frac{N(\sigma,T)N^{1-\alpha}}{H}} \ln N \tag{2.15}$$

при любом $\sigma \in [0.5 + i/\ln N; 0.5 + (i+1)/\ln N]$.

Из (2.14) и (2.15) получаем утверждение леммы.

Лемма 8. *Пусть ε – произвольное положительное число, $\alpha \in (0;1]$ – действительное число,*
$N > N_0(\varepsilon)$, $N^{1-\varepsilon} \gg N_1 \gg N^{1-19/40\alpha+\varepsilon}$, $H \gg N^{1-\alpha}$, $T = N_1/(H\ln^3 N)$. Тогда при каждом фиксированном $0 \le i < 0.5\ln N$ для любого $(N-2N_1)^{\alpha} \le n \le (N-N_1)^{\alpha}$ и для любого $\sigma \in [0.5 + i/\ln N; 0.5 + (i+1)/\ln N)$ справедлива оценка

$$W_i = \sum_{N-2N_1 < n^{1/\alpha} \le N-N_1} \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^{\alpha}}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^{\alpha}} \left| \sum_{\substack{0.5+i/\ln N \le \beta < 0.5+(i+1)/\ln N \\ |\gamma| \le T}} x^{\rho-1} \right| dx \ll$$

$$\ll \frac{HN_1^{\alpha}}{N^{1-\alpha}} N_1^{\alpha(\sigma-1)} \sqrt{N(\sigma,T)}.$$

Доказательство. При нашем выборе параметров N_1 и H справедливо

$$N - (n+1)^{1/\alpha} + H \ge N - n^{1/\alpha} - H,$$

то есть промежутки интегрирования в определении W_i при различных n пересекаются.

Объединим интегралы, используя суммирование по n. Получим

$$W_i = \sum_{N-2N_1 < n^{1/\alpha} \le N-N_1} \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^{\alpha}}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^{\alpha}} \left| \sum_{\substack{0.5+i/\ln N \le \beta < 0.5+(i+1)/\ln N \\ |\gamma| \le T}} x^{\rho-1} \right| dx \ll$$

$$\ll \frac{H}{N^{1-\alpha}} \int_{N_1^{\alpha}/2}^{2N_1^{\alpha}} \left| \sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1} \right| dx.$$

Применим к полученному интегралу неравенство Коши, раскроем квадрат модуля, разобьем при суммировании нули на "близкие" и "далекие" и поменяем после этого порядок суммирования и интегрирования. Имеем:

$$\left(\int_{N_1^{\alpha}/2}^{2N_1^{\alpha}} \left| \sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1} \right| dx \right)^2 \ll$$

$$\ll N_1^{\alpha} \left(\sum_{|\gamma|\le T} \sum_{\substack{|\gamma_1|\le T \\ |\gamma-\gamma_1|\le 1}} \int_{N_1^{\alpha}/2}^{2N_1^{\alpha}} x^{2\sigma-2} dx + \sum_{|\gamma|\le T} \sum_{\substack{|\gamma_1|\le T \\ |\gamma-\gamma_1|>1}} \frac{1}{|\gamma-\gamma_1|} \int_{N_1^{\alpha}/2}^{2N_1^{\alpha}} x^{2\sigma-2} dx \right),$$

где $\sigma \in [0.5+i/\ln N; 0.5+(i+1)/\ln N]$ – точка, в которой правая часть неравенства принимает максимальное значение.

Учитывая, что вклад суммирования по нулям в данном случае имеет вид $N(\sigma, T)$ и используя Лемму 2, имеем:

$$\int_{N_1^\alpha/2}^{2N_1^\alpha} \left| \sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1} \right| dx \ll N_1^{\alpha\sigma} \sqrt{N(\sigma,T)} \ln N. \tag{2.16}$$

Окончательно для W_i получаем

$$W_i \ll \frac{HN_1^\alpha}{N^{1-\alpha}} N_1^{\alpha(\sigma-1)} \sqrt{N(\sigma,T)} \ln N$$

при любом $\sigma \in [0.5+i/\ln N; 0.5+(i+1)/\ln N]$.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть ε – произвольное положительное число, $\alpha \in (0;1]$ – действительное число, $3/4 \le \sigma \le 1-10^{-6}$, $N > N_0(\varepsilon)$, $N^{1-\varepsilon} \gg N_1 \gg N^{1-19/40\alpha+\varepsilon}$, $H \gg N_1^{1-\alpha/A(\sigma)+\varepsilon}$, $T = N_1/(H\ln^3 N)$, $N(\sigma,T) \ll T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}$, где $A(\sigma)$ – монотонная функция. Тогда при*

$$\alpha\left(\frac{1}{A(\sigma)} - (1-\sigma) - \frac{21}{40-19\alpha}\right) + \varepsilon < 0. \tag{2.17}$$

справедливо

$$T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon} \gg \frac{N^{1-\alpha}}{H} \ln^2 N. \tag{2.18}$$

Доказательство. Подставим в (20) выражения для T и N_1.

Получим

$$\frac{N_1^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}}{H^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}} \gg \frac{N_1^{1-\alpha+\frac{19\alpha}{40-19\alpha}-\frac{19\alpha^2}{40-19\alpha}}}{H}.$$

Далее имеем, подставляя нижнюю оценку для H из условий теоремы и перенося все переменные в правую часть:

$$N_1^{1-\alpha+\frac{19\alpha}{40-19\alpha}-\frac{19\alpha^2}{40-19\alpha}-A(\sigma)(1-\sigma)-1+A(\sigma)(1-\sigma)+\frac{\alpha}{A(\sigma)}+\alpha(1-\sigma)+\varepsilon} \ll 1.$$

Упрощая последнее неравенство получим условие

$$N_1^{\alpha\left(\frac{1}{A(\sigma)}-(1-\sigma)-\frac{21}{40-19\alpha}\right)+\varepsilon} \ll 1,$$

для выполнения которого при $N_1 \gg 1$ достаточно выполнения (19).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.

Обозначим $\alpha = 1/c$.

Рассмотрим сумму

$$S(\alpha) = \sum_{N-2N_1<p^{1/\alpha}\le N-N_1} \sum_{(N-p^{1/\alpha}-H)^\alpha<k\le(N-p^{1/\alpha}+H)^\alpha} \Lambda(k),$$

где $N_1 = N^{1-\frac{19}{40}\alpha+\varepsilon}$.

При суммировании по k учитываются не только простые числа q, но и степени простых чисел q^r при натуральных $r > 1$. Вклад указанных слагаемых в $S(\alpha)$ может быть оценен как

$$\ll \frac{HN_1^{\alpha/2+\varepsilon}}{\sqrt{N}}. \tag{2.19}$$

Далее имеем $N - p^{1/\alpha} \asymp N_1$.

Воспользуемся для внутренней суммы Леммой 1 (явной формулой):

$$S(\alpha) = \sum_{N-2N_1<p^{1/\alpha}\le N-N_1} \left((N - p^{1/\alpha} + H)^\alpha - (N - p^{1/\alpha} - H)^\alpha \right) -$$

$$- \sum_{N-2N_1<p^{1/\alpha}\le N-N_1} \left(\sum_{|\gamma|\le T} \int_{(N-p^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-p^{1/\alpha}+H)^\alpha} x^{\rho-1}dx + O\left(\frac{N_1^\alpha \ln^2 N}{T}\right)\right),$$

где $T = \frac{N_1 \ln^3 N}{H}$.

Рассмотрим предполагаемый главный член:

$$\sum_{N-2N_1<p^{1/\alpha}\le N-N_1} \left((N - p^{1/\alpha} + H)^\alpha - (N - p^{1/\alpha} - H)^\alpha \right).$$

Согласно результату (2), при $N_1 = N^{1-\frac{19}{40}\alpha+\varepsilon}$ для соответствующим образом подобранного ε отрезок

$$[(N - 2N_1)^\alpha; (N - N_1)^\alpha]$$

содержит простые числа, причем их количество

$$\gg \frac{N_1}{N^{1-\alpha}\ln N}.$$

Вклад каждого слагаемого по порядку равен $H/N_1^{1-\alpha}$.

Таким образом, предполагаемый главный член имеет порядок

$$\gg \frac{HN_1^\alpha}{N^{1-\alpha}\ln N}. \tag{2.20}$$

Отметим, что вклад (21) по порядку меньше (22).

Далее займемся оценкой остатка:

$$W_\alpha = \sum_{N-2N_1<p^{1/\alpha}\le N-N_1} \sum_{|\gamma|\le T} \int_{\sqrt{N-p^{1/\alpha}-H}}^{\sqrt{N-p^{1/\alpha}+H}} x^{\rho-1}dx.$$

Сделаем внешнее суммирование сплошным:

$$W_\alpha \le \sum_{N-2N_1<n^{1/\alpha}\le N-N_1} \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha} \left| \sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1} \right| dx.$$

Разобьем прямоугольник $\delta < Res < 1-\delta$, $-T < Ims < T$, по которому суммируются нули, на $O(\ln N)$ прямоугольников шириной $1/\ln N$ (здесь $\delta = \delta(T)$ – граница нулей из Леммы 3).

Тогда для W_α получаем неравенство

$$W_\alpha \ll \sum_{i=0}^{0.5\ln N-1} \sum_{N-2N_1<n^{1/\alpha}\le N-N_1} \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha} \left| \sum_{\substack{0.5+\frac{i}{\ln N}\le\beta<0.5+\frac{i+1}{\ln N}\\ |\gamma|\le T}} x^{\rho-1}dx \right|.$$

Обозначим

$$W_{\alpha,i} = \sum_{N-2N_1<p^{1/\alpha}\le N-N_1} \int_{(N-p^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-p^{1/\alpha}+H)^\alpha} \left| \sum_{\substack{0.5+\frac{i}{\ln N}\le\beta<0.5+\frac{i+1}{\ln N}\\ |\gamma|\le T}} x^{\rho-1}dx \right|.$$

Нам достаточно показать, что при всех i (то есть, по сути, при каждом $\sigma\in[0.5;1)$) выполнено условие:

$$W_{\alpha,i} \ll \frac{HN_1^\alpha}{N^{1-\alpha}\ln^3 N}. \tag{2.21}$$

Далее оценим $W_{\alpha,i}$ при различных значениях c.

1. Пусть $\mathbf{1\le c\le \frac{779}{422}}$.

При $1\le c\le 95/74$ воспользуемся леммой 8. Тогда при каждом значении $\sigma\in[0.5;1)$ для $H\gg N^{1-\frac{157}{120}\alpha+\frac{19}{48}\alpha^2+\varepsilon}$ нам достаточно показать, что

$$N_1^{\alpha(\sigma-1)}\sqrt{N(\sigma,T)}\ln N \ll \ln^{-3} N. \tag{2.22}$$

Начнем рассмотрение с левой окрестности единицы. Отметим, что при $1-\delta<\sigma\le 1$ неравенство (24) справедливо, так как его левая часть вместе с $N(\sigma,T)$ обращается в нуль (здесь $\delta=\delta(T)$ – граница нулей из Леммы 3).

При $1-10^{-6}\le\sigma\le 1-\delta$ используем оценку (4).

Нашей целью является показать, что

$$N_1^{2\alpha(\sigma-1)}T^{167(1-\sigma)^{3/2}}\ln^{17} T \ll \ln^{-6} N.$$

Заметим, что при достаточно большом N справедливы неравенства $T<N_1^\alpha$ и $\ln^{-6} N \gg$ $\gg \ln^{-6} T$ при нашем выборе N_1 и H.

Достаточно показать

$$N_1^{2\alpha(\sigma-1)+167\alpha(1-\sigma)^{3/2}}\ln^{23} N \ll 1,$$

или

$$\alpha(\sigma-1)+167\alpha(1-\sigma)^{3/2}+\frac{23\ln\ln N}{\ln N_1}<0.$$

Отметим, что при любом $c\ge 1$ справедливо $\ln N_1\ge 0.5\ln N$ откуда

$$\frac{23\ln\ln N}{\ln N_1}\le\frac{46\ln\ln N}{\ln N}.$$

При достаточно большом N для любого значения $\sigma\le 1-\delta$ справедливо

$$\alpha(1-\sigma)>\frac{92\ln\ln N}{\ln N}.$$

С другой стороны, при $\sigma > 1-10^{-6}$ справедливо

$$\alpha(1-\sigma) > 334\alpha(1-\sigma)^{3/2}.$$

Таким образом, на промежутке $1-10^{-6} \le \sigma \le 1$ возможен выбор любого $H \gg N_1^{1-\alpha}$.

На промежутке $0.5 \le \sigma \le 1-10^{-6}$ воспользуемся плотностной теоремой Хаксли (1). Получим оценку

$$H \gg N_1^{1-\frac{5}{6}\alpha+\varepsilon}. \tag{2.23}$$

Далее покажем, что такой выбор H возможен и при $95/74 \le c \le \frac{779}{422}$.

Воспользуемся леммой 7. Максимальное значение функции

$$\min\left(N_1^{\alpha(\sigma-1)}N(\sigma,T), N_1^{\alpha(\sigma-1)}\sqrt{\frac{N(\sigma,T)N^{1-\alpha}}{H}}\ln N\right)$$

достигается при $\sigma = 3/4$ на оценке (17), из которой следует достаточность (23).

Подставляя в (23) выражение для N_1, получаем утверждение теоремы на промежутке $1 \le c \le \frac{779}{422}$.

2. Пусть $\mathbf{\frac{779}{422} < c \le \frac{171}{79}}$.

Здесь и далее для оценки W_α будем пользоваться леммой 7. Тогда при каждом значении $\sigma \in [0.5;1)$ для $H \gg N^{1-\frac{7359}{6880c}+\frac{437}{6880c^2}}+\varepsilon$ нам достаточно показать, что

$$\min\left(N_1^{\alpha(\sigma-1)}N(\sigma,T), N_1^{\alpha(\sigma-1)}\sqrt{\frac{N(\sigma,T)N^{1-\alpha}}{H}}\ln N\right) \ll \ln^{-3} N. \tag{2.24}$$

На промежутке $1-10^{-6} \le \sigma \le 1$ из плотностной теоремы (4) и оценки (16) видно, что неравенство (26) выполняется при любом $H \gg N_1^{1-\alpha}$.

При $\frac{15891382}{16684097} \le \sigma \le 1-10^{-6}$ достаточно воспользоваться плотностной теоремой (10) и оценкой (16).

На промежутке $\sigma_2 \le \sigma \le \frac{15891382}{16684097}$, где

$$\sigma_2 = \frac{149}{172} + \frac{441}{172(40-19\alpha)}$$

получено из условия (19), достаточно воспользоваться плотностной теоремой (11) и оценкой (16).

При $1/2 \le \sigma < \sigma_0$ с учетом леммы 9, будем пользоваться оценкой (17) и плотностными теоремами (11), (5), (6), (7) и, наконец, плотностной теоремой Хаксли при $\sigma = 4/5$.

3. Пусть $\mathbf{\frac{171}{79} < c \le \frac{38}{17}}$.

На промежутке $1-10^{-6} \le \sigma \le 1$ из плотностной теоремы (4) и оценки (16) видно, что неравенство (26) выполняется при любом $H \gg N_1^{1-\alpha}$.

При $\frac{15891382}{16684097} \le \sigma \le 1-10^{-6}$ достаточно воспользоваться плотностной теоремой (10) и оценкой (16).

На промежутке $0.94839... = \frac{533}{562} \le \sigma < \frac{15891382}{16684097}$ воспользуемся плотностной теоремой (11) и оценкой (16).

На промежутке $\sigma_3 \le \sigma \le \frac{15891382}{16684097}$, где

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} + \frac{14}{40-19\alpha}$$

получено из условия (19), достаточно воспользоваться плотностной теоремой (5) и оценкой (16).

При $1/2 \le \sigma < \sigma_3$ с учетом леммы 9, будем пользоваться оценкой (17) и плотностными теоремами (5), (6), (7), (8), (9).

4. Пусть далее $\mathbf{\frac{38}{17} < c \le \frac{323}{50}}$.

На промежутке $1 - 10^{-6} \le \sigma \le 1$ из плотностной теоремы (4) и оценки (16) видно, что неравенство (26) выполняется при любом $H \gg N_1^{1-\alpha}$.

При $\frac{15891382}{16684097} \le \sigma \le 1 - 10^{-6}$ достаточно воспользоваться плотностной теоремой (10) и оценкой (16).

На промежутке $0.94839... = \frac{533}{562} \le \sigma < \frac{15891382}{16684097}$ воспользуемся плотностной теоремой (11) и оценкой (16).

При $\frac{17}{18} \le \sigma < \frac{533}{562}$ достаточно воспользоваться плотностной теоремой (5) и оценкой (16).

На промежутке $\sigma_4 \le \sigma \le \frac{17}{18}$, где

$$\sigma_4 = \frac{35}{54} + \frac{28}{3(40 - 19\alpha)}$$

получено из условия (19), воспользуемся плотностной теоремой (6) и оценкой (16).

При $1/2 \le \sigma < \sigma_3$ с учетом леммы 9, будем пользоваться оценкой (17) и плотностными теоремами (6), (7), (8), (9).

5. Пусть далее $\mathbf{\frac{323}{50} < c \le \frac{13863559}{1368538}}$.

На промежутке $1 - 10^{-6} \le \sigma \le 1$ из плотностной теоремы (4) и оценки (16) видно, что неравенство (26) выполняется при любом $H \gg N_1^{1-\alpha}$.

При $\frac{15891382}{16684097} \le \sigma \le 1 - 10^{-6}$ достаточно воспользоваться плотностной теоремой (10) и оценкой (16).

На промежутке $\frac{533}{562} \le \sigma < \frac{15891382}{16684097}$ воспользуемся плотностной теоремой (11) и оценкой (16).

На промежутке $\frac{17}{18} \le \sigma < \frac{533}{562}$ достаточно воспользоваться плотностной теоремой (5) и оценкой (16).

При $\frac{155}{174} \le \sigma \le \frac{17}{18}$, воспользуемся плотностной теоремой (6) и оценкой (16).

При $1/2 \le \sigma < \frac{155}{174}$ с учетом леммы 9, будем пользоваться оценкой (17) и плотностными теоремами (7), (8), (9). При этом заметим, что на рассматриваемом промежутке изменения c выбор H определяется оценкой (17) в точке $\sigma = 3/4$, аналогично рассмотренному выше случаю 1, где $95/74 \le c \le \frac{779}{422}$.

6. Пусть далее $\mathbf{\frac{13863559}{1368538} < c \le \frac{6213}{88}}$.

На промежутке $1 - 10^{-6} \le \sigma \le 1$ из плотностной теоремы (4) и оценки (16) видно, что неравенство (26) выполняется при любом $H \gg N_1^{1-\alpha}$.

При $\frac{155}{174} \le \sigma \le 1 - 10^{-6}$ воспользуемся оценкой (16) и плотностными теоремами (10), (11), (5) и (6), соответственно.

Далее воспользуемся плотностной теоремой (12) и оценкой (17) в точке $\sigma = \frac{155}{174}$. Полученным значением на рассматриваемом промежутке изменения c определяется выбор H.

При $1/2 \le \sigma < \frac{155}{174}$ будем пользоваться оценкой (17) и плотностными теоремами (12), (7), (8), (9).

7. Наконец, пусть $\mathbf{c > \frac{6213}{88}}$.

На промежутке $1 - 10^{-6} \le \sigma \le 1$ из плотностной теоремы (4) и оценки (16) видно, что неравенство (26) выполняется при любом $H \gg N_1^{1-\alpha+\varepsilon}$ при достаточно большом N.

При $\frac{155}{174} < \sigma \le 1 - 10^{-6}$ оценкой (16) и плотностными теоремами (10), (11), (5) и (6), соответственно.

На промежутке $\sigma_7 \le \sigma \le \frac{155}{174}$, где

$$\sigma_7 = \frac{743}{948} + \frac{336}{79(40 - 19\alpha)}$$

получено из условия (12), воспользуемся плотностной теоремой (12) и оценкой (16).

При $1/2 \le \sigma < \sigma_7$ с учетом леммы 9, будем пользоваться оценкой (17) и плотностными теоремами (12), (7), (8), (9).

Теорема 5 доказана.

3. Заключение

В статье для любого фиксированного $c \ge 1$ получена нижняя оценка $\kappa(c)$, при выполнении которой к заданному действительному числу $N > N_0(\varepsilon)$ можно подойти суммой двух степеней простых чисел $p_1^c + p_2^c$ на расстояние не большее, чем $H = N^{\kappa(c)+\varepsilon}$, где ε – произвольное положительное число.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huxley M. N. On the difference between consecutive primes // Inventiones Mathematicae. — 1972. — Vol. 15, No. 1. — P. 164–170.

2. Гриценко С. А. Уточнение одной константы в плотностной теореме // Математические заметки. — 1994. — Т. 55, № 2. — С. 59–61.

3. Ivić A. The Riemann Zeta-Function. — New York: John Wiley and Sons, 1985. — 517 p.

4. Ivić A. Topics in Recent Zeta-Function Theory. — Orsay: Université de Paris-Sud, 1983. — 150 p.

5. Ivić A. A note on the zero-density estimates for the zeta-function // Archiv der Mathematik. — 1979. — Vol. 33. — P. 155–164.

6. Ivić A. Exponent pairs and the zeta-function of Riemann // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. — 1980. — Vol. 15. — P. 157–181.

7. Линник Ю. В. О возможности единого метода в некоторых вопросах аддитивной и дистрибутивной теории чисел // Доклады Академии наук СССР. — 1945. — Т. 49, № 1. — С. 3–7.

8. Линник Ю. В. Об одной теореме теории простых чисел // Доклады Академии наук СССР. — 1945. — Т. 47, № 1. — С. 7–9.

9. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физматлит, 1994. — 376 с.

10. Baker R. C., Harman G., Pintz J. The difference between consecutive primes, II // Proceedings of the London Mathematical Society. — 2001. — Vol. 83, No. 3. — P. 532–562.

11. Гирько В. В., Гриценко С. А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Чебышевский сборник. — 2006. — Т. 7, № 4. — С. 26–30.

12. Гриценко С. А., Нгуен Тхи Ча О диофантовых неравенствах с простыми числами // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2012. — № 23(142), вып. 29. — С. 186–190.

13. Науменко А. П. О нелинейных диофантовых неравенствах с простыми числами // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: труды XV Междунар. конф. — Тула, 2018. — С. 239–241.

14. Науменко А. П. О некоторых нелинейных диофантовых неравенствах с простыми числами // Математические заметки. — 2019. — Т. 105, вып. 6. — С. 943–948.

15. Науменко А. П. О приближении действительных чисел суммами двух квадратов простых чисел // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2019. — № 5. — С. 3–8.

16. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. — М.: Наука, 1983. — 240 с.

17. Huxley M. N. Exponential sums and the Riemann zeta function V // Proceedings of the London Mathematical Society. — 2005. — Vol. 90. — P. 1–41.

REFERENCES

1. Huxley, M. N. 1972, "On the difference between consecutive primes", *Inventiones Mathematicae*, 15(1), pp. 164–170.

2. Gritsenko, S. A. 1994, "The refinement of a constant in the density theorem", *Mathematical Notes*, 55(2), pp. 59–61.

3. Ivić, A. 1985, *The Riemann Zeta-Function*, New York: John Wiley and Sons.

4. Ivić, A. 1983, *Topics in Recent Zeta-Function Theory*, Orsay: Université de Paris-Sud.

5. Ivić, A. 1979, "A note on the zero-density estimates for the zeta-function", *Archiv der Mathematik*, 33, pp. 155–164.

6. Ivić, A. 1980, "Exponent pairs and the zeta-function of Riemann", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 15, pp. 157–181.

7. Linnik, Yu. V. 1945, "On the possibility of a unified method in certain questions of additive and multiplicative number theory", *Doklady of the Academy of Sciences of the USSR*, 49(1), pp. 3–7.

8. Linnik, Yu. V. 1945, "On a theorem of the theory of primes", *Doklady of the Academy of Sciences of the USSR*, 47(1), pp. 7–9.

9. Voronin, S. M. and Karatsuba, A. A. 1994, *The Riemann Zeta Function*, Moscow: Fizmatlit.

10. Baker, R. C., Harman, G., and Pintz, J. 2001, "The difference between consecutive primes, II", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 83(3), pp. 532–562.

11. Girko, V. V. and Gritsenko, S. A. 2006, "On a diophantine inequality with primes", *Chebyshevskii Sbornik*, 7(4), pp. 26–30.

12. Gritsenko, S. A. and Nguyen Thi Tcha, 2012, "On diophantine inequalities with primes", *Nauchnyye Vedomosti BelGU. Series: Mathematics. Physics*, 23(142), 29, pp. 186–190.

13. Naumenko, A. P. 2018, "On nonlinear diophantine inequalities with primes", in *Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications: Proceedings of the XV International Conference*, Tula, pp. 239–241.

14. Naumenko, A. P. 2019, "On some nonlinear diophantine inequalities with primes", *Mathematical Notes*, 105(6), pp. 943–948.

15. Naumenko, A. P. 2019, "On the approximation of real numbers by the sums of two squares of primes", *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika*, 5, pp. 3–8.

16. Karatsuba, A. A. 1993, *Basic Analytic Number Theory*, Berlin: Springer-Verlag.

17. Huxley, M. N. 2005, "Exponential sums and the Riemann zeta function V", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 90, pp. 1–41.

Получено: 18.05.2025
Принято в печать: 17.10.2025