ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-316-328

Обзор результатов о полиадических числах Лиувилля

Е. С. Крупицын

Крупицын Евгений Станиславович — кандидат физико-математических наук, Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Аннотация

В статье приводится обзор результатов о полиадических числах Лиувилля.

Ключевые слова: полиадическое число Лиувилля, трансцендентность.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:
Крупицын, Е. С. Обзор результатов о полиадических числах Лиувилля // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 316–328.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-316-328

A review of the results on polyadic Liouville numbers

E. S. Krupitsyn

Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Abstract

The paper presents a lover estimate for the p-adic value of a polynomial evaluated at polyadic Liouville number.

Keywords: polyadic Liouville numbers, transcendence

Bibliography: 24 titles.

For citation:
Krupitsyn, E. S. 2025, “A review of the results on polyadic Liouville numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 316–328.

1. Введение

В 1844 г. Ж. Лиувилль опубликовал теорему, согласно которой алгебраическое число не может слишком хорошо приближаться рациональными числами и построил пример трансцендентного числа, допускающего сколь угодно высокий порядок приближения рациональными числами.

Числом Лиувилля называется такое действительное число α, что для любого натрального n существует целое число p и натуральное число q, **НОД** $(p, q) = 1$, такие что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

Как отмечено выше, такое число является трансцендентным. Фактически работы Лиувилля были началом теории трансцендентных чисел. Исследования, связанные с числами Лиувилля актуальны по сей день, здесь можно отметить работы P. Erdös и M. Waldschmidt [1, 2].

Цель данной работы — рассказ об объектах, названных полиадическими числами Лиувилля.

2. Основной результат

Напомним основные понятия теории полиадических чисел.

На кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел можно ввести топологию τ, рассматривая множество идеалов (m) в качестве полной системы окрестностей нуля аддитивной группы целых чисел. При этом операции сложения и умножения непрерывны и кольцо целых чисел с введенной топологией имеет структуру топологического кольца (более подробно см. [3], [4]), обозначим это кольцо $\mathbb{Z}_\tau$.

Определение 1. *Бесконечную последовательность $\{x_n\}_n, n \in \mathbb{N}$ целых чисел будем называть фундаментальной, если для любого натурального числа k существует натуральное число n_1 такое, что для всех натуральных чисел m и n таких, что $m, n > n_1$ справедливо сравнение*

$$x_m \equiv x_n \pmod{k!}.$$

Для фундаментальных последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ рассмотрим последовательности $\{x_k + y_k\}, \{x_k - y_k\}$ и $\{x_k \cdot y_k\}$. Эти последовательности также являются фундаментальными, таким образом, фундаментальные последовательности элементов из кольца $\mathbb{Z}_\tau$ образуют кольцо.

Определение 2. *Последовательность $\{c_n\}_n$, $n \in \mathbb{N}$ назывется нулевой последовательностью, если*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0,$$

где предел понимается в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$.

Определение 3. *Фундаментальные последовательности $\{x_k\}_k$ и $\{y_k\}_k$, $k \in \mathbb{N}$ называются эквивалентными, если последовательность $\{x_k - y_k\}_k$ является нулевой последовательностью.*

Определение 4. *Полиадическим числом будем называть класс эквивалентных фундаментальных последовательностей из $\mathbb{Z}_\tau$.*

На множестве полиадических чисел можно ввести операции сложения и умножения, что позволяет говорить о кольце $\mathfrak{G}$ целых полиадических чисел. Вложение кольца $\mathbb{Z}$ в $\mathfrak{G}$ осуществляется сопоставлением элементу $x \in \mathbb{Z}$ класса $\mathfrak{x}$ фундаментальных последовательностей, эквивалентных стационарной последовательности $\{x\}$.

Поскольку $\mathbb{Z}_\tau$ является метрическим пространством, то его пополнение приводит к топологическому пространству $\mathfrak{G}_\tau$.

Элементы $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_\tau$ обладают каноническим представлением в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!, \quad \text{где} \quad a_n \in \{0, 1, \dots, n\}. \tag{2.1}$$

Арифметические свойства полиадических чисел недостаточно изучены. Рассмотрим, например, известный ряд Эйлера $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!$. Гипотеза Курепы [5] относится к частичным суммам ряда Эйлера и утверждает:

Гипотеза (Курепа)**.** *Для любого простого числа $p > 2$ число*

$$\sum_{n=0}^{p-1} n!$$

не делится на p.

Это означает, что $\left|\sum\limits_{n=1}^{M} n!\right|_p = 1$ для любого простого числа p. Гипотеза Курепы до сих пор не доказана в полном объеме, хотя доказано, что она справедлива для бесконечного множества простых чисел p.

Интерес к полиадическим числам вызывает также то, что любое натуральное число N может быть представлено единственным образом в виде

$$N = \sum_{n=1}^{k} a_n \cdot n!, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, n\},$$

так называемого полиадического (или факториального) представления. Свойства этого представления в сравнении с разложением с двойной базой или в цепь с двойной базой получили изучение в совместной работе В.Г. Чирского и В.Ю. Матвеева [6].

Отметим, что любое целое полиадическое число, заданное рядом (2.1), не может представлять во всех полях $\mathbb{Q}_p$ одно и тоже рациональное число $\dfrac{a}{b}$, поскольку для любого простого числа p выполнено неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n!\right|_p \leqslant 1,$$

а если $p \mid b$ и $p \nmid a$, то $\left|\dfrac{a}{b}\right|_p > 1$.

Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ является прямым произведением колец $\mathbb{Z}_p$ по всем простым числам p, при этом ряд (2.1) сходится в любом кольце $\mathbb{Z}_p$. Действительно, степень, в которой простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$ равна

$$\frac{n - S_n}{p - 1},$$

где S_n — сумма цифр в p-ичном разложении натурального числа n. Тогда для любого простого числа p при $n \to \infty$

$$|a_n \cdot n!|_p \to 0,$$

что является достаточным условием сходимости ряда (2.1) в $\mathbb{Z}_p$, оответствующую сумму будем обозначать $a^{(p)}$.

Бесконечный набор элементов $a^{(p)} \in \mathbb{Z}_p$, соответствующих всем простым числам p, можно рассматривать, как совокупность координат элемента $\mathfrak{a}$ кольца целых полиадических чисел, представленного в виде вектора. Поэтому для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ имеет в кольце $\mathbb{Z}_p$ координату $P\left(a^{(p)}\right)$. Это позволяет ввести понятия алгебраического, трансцендентного, бесконечно трансцендентного и глобально трансцендентного полиадического числа.

Определение 5. *Полиадическое число $\mathfrak{a}$ будем называть алгебраическим, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P\left(a^{(p)}\right) = 0$.*

Замечание 1. *Полиадическое число, которое не является алгебраическим, называется трансцендентным полиадическим числом. В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P\left(a^{(p)}\right) \neq 0$.*

Определение 6. *Полиадическое число называется бесконечно трансцендентным, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P\left(a^{(p)}\right) \neq 0$.*

Определение 7. *Полиадическое число называется глобально трансцендентным, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P\left(a^{(p)}\right) \neq 0$.*

Замечание 2. *Для трансцендентности полиадического числа $\mathfrak{a}$ достаточна трансцендентность хотя бы одной его координаты $a^{(p)}$.*

Замечание 3. *Глобальная трансцендентность полиадического числа равносильна трансцендентности всех его координат.*

Применение модификации метода Зигеля–Шидловского в теории трансцендентных чисел [7, 8, 9] позволяет доказывать бесконечную алгебраическую независимость многих представляющих интерес полиадических рядов, в частности и бесконечную трансцендентность ряда Эйлера.

Доказательство глобальной трансцендентности, даже для столь простого на вид ряда, как ряд Эйлера $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!$, представляет собой задачу, к которой пока нет подходов.

Вопросы глобальной трансцендентности и глобальной алгебраической независимости удается решить для так называемых полиадических чисел Лиувилля.

Определение 8. *Полиадическим числом Лиувилля называется полиадическое число $\mathfrak{a}$ такое, что для любого натурального числа n и любого простого числа P существует $A \in \mathbb{Z}$ такое, что*

$$|\mathfrak{a} - A|_p < |A|^{-n}$$

для всех простых чисел $p < P$.

В работе [10] доказывается простое утверждение о том, что полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля $\mathbb{Q}_p$. Иными словами, полиадическое число

Лиувилля — глобально трансцедентное число. Устанавливается теорема о свойствах приближений совокупности p-адических чисел и ее следствие — достаточное условие алгебраической независимости совокупности p-адических чисел. Также получена теорема о глобальной алгебраической независимости совокупности полиадических чисел.

Теорема 1 (см. [10]). *Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля $\mathbb{Q}_p$. Иными словами, полиадическое число Лиувилля — глобально трансцендентное число.*

Теорема 2 (см. [10]). *Пусть p — простое число. Пусть*

$$\alpha_i \in \mathbb{Z}_p, \quad A_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Пусть $P(x_1, \ldots, x_m)$ ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, степени которого по переменным x_i, $i = 1, \ldots, m$ равны d_i. Тогда если

$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0,$$

то либо для некоторой постоянной C_2 выполняется неравенство

$$\max_{i=1,\ldots,m} |\alpha_i - A_i|_p > C_2 |A_1|^{-d_1} \ldots |A_m|^{-d_m},$$

либо выполняется равенство $P(A_1, \ldots, A_m) = 0$.

Следствие 1 (см. [10]). *Если для любого ненулевого многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами, степени которого по переменным x_i, $i = 1, \ldots, m$ равны d_i и любой постоянной C_2 существуют $A_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, m$ такие, что*

$$|\alpha_i - A_i|_p < C_2 |A_1|^{-d_1} \ldots |A_m|^{-d_m}, \quad i = 1, \ldots, m$$

и

$$P(A_1, \ldots, A_m) \neq 0,$$

то $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — алгебраически независимые элементы $\mathbb{Z}_p$.

Для всех $i = 1, \ldots, m$ обозначим

$$\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n}, \quad a_{i,n} \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

$$A_{i,N} = \sum_{n=0}^{N} a_{i,n}$$

$$r_{i,N} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{i,n},$$

Теорема 3 (см. [10]). *Пусть для простого числа p при $N \geqslant N_p$, где N_p — натуральное число, зависящее от p, выполнены неравенства*

$$|r_{i,N}|_p < \left(\max_{i=1,\ldots,m} A_{i,N} \right)^{-\gamma_p(N)}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\gamma_p(N) \to +\infty$ при $N \to +\infty$. Кроме того, пусть

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\ln |r_{i,N}|_p}{\ln |r_{i+1,N}|_p} = 0, \quad i = 1, \ldots m - 1.$$

Тогда ряды (2.2) сходятся к алгебраически независимым элементам $\mathbb{Z}_p$.

Следствие 2 (см. [10]). *Если условия теоремы 3 выполнены для любого простого числа p то ряды* (2.2) — *глобально алгебраически независимые полиадические числа.*

Выберем произвольным образом натуральные числа

$$n_{1,0} < n_{2,0} < \ldots < n_{m,0}. \tag{2.3}$$

Пусть для некоторого неотрицательного целого числа N определены натуральные числа

$$n_{1,N} < n_{2,N} < \ldots < n_{m,N}. \tag{2.4}$$

Положим

$$M_{N+1} = \min \frac{\ln p}{p-1}, \tag{2.5}$$

где минимум в правой части равенства (2.5) взят по всем простым числам, удовлетворяющим неравенству

$$p \leqslant n_{m,N}.$$

Пусть $\gamma(N) \to +\infty$ при $N \to +\infty$. Потребуем, чтобы число $n_{1,N+1}$ удовлетворяло неравенству

$$n_{1,N+1}M_{N+1} - \ln n_{1,N+1} > \gamma(N)\ln(2(n_{m,N}!)) \tag{2.6}$$

и чтобы натуральные числа $n_{i+1,N+1}$, $i = 1, \ldots, m-1$ удовлетворяли условиям

$$n_{i,N+1} < \varphi_i(N)n_{i+1,N+1}, \tag{2.7}$$

где

$$\varphi_i(N) \to 0, \quad N \to +\infty, \quad i = 1, \ldots, m-1. \tag{2.8}$$

Теорема 4 (см. [10]). *Пусть натуральные числа $n_{i,k}$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям* (2.3)–(2.8). *Тогда для любого простого числа p ряды*

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{\infty} (n_{i,k})! \tag{2.9}$$

сходятся к алгебраически независимым элементам $\mathbb{Z}_p$. Иными словами, полиадические числа (2.9) *глобально алгебраически независимы.*

В работе о Полиадических числах Лиувилля [13] приведен пример конкретной совокупности алгебраически независимых полиадических числе Лиувилля.

В теории трансцендентных чисел различают два типа результатв: количесвенне и качетственные. Качественные — это результаты о трансцендентности, линейной и алгебраической независимости, иррациональности, трансцендентности. Количественные результаты дают оценки многочленов от совокупности рассматриваемых величн.

В статье автора [14] установлены оценки многочленов от совокупностей полиадических чисел Лиувилля:

Теорема 5 (см. [14]). *Пусть*

$$\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}(\varphi_i(n))!, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где

$$a_{n,i} \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant a_{n,i} \leqslant \varphi_i(n), \quad i = 1, \ldots, m,$$

а функции $\varphi_i(n)$ принимают натуральные значения и удовлетворяют условиям

$$\frac{\varphi_{i+1}(n)}{\varphi_i(n)\ln\varphi_i(n)} \to +\infty, \quad n \to +\infty, \quad i = 1, \dots, m-1$$

$$\frac{\varphi_1(n+1)}{\varphi_m(m)\ln\varphi_m(n)} \to +\infty, \quad n \to +\infty$$

$$\frac{\varphi_1(n)\ln\varphi_1(n)\,(\ln\varphi_m(n))^{\frac{3}{2}m}}{\varphi_m(n)} \to +\infty \quad n \to +\infty.$$

Пусть $p_0 \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \delta = 1 - \dfrac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}m+2}}$. Тогда существует число $H_0 = H_0(p_0, \varepsilon)$ такое, что для любого отличного от нулевого многочлена $P(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ высоты H и степени d по совокупности переменных $x_1, \dots, x_m$ при условиях $H \geqslant H_0$,

$$\ln\frac{(d+m)!}{d!m!} \leqslant (1+\delta)\ln H$$

для любого простого числа $p \leqslant p_0$ выполнено неравенство

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|_p > H^{-d(1+\varepsilon)(\ln\ln H)^{\frac{3}{2}m+1}}.$$

В работе [15] для чисел вида

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant n_k, \quad n_k \in \mathbb{N},$$

были получены явные оценки в терминах элементарных функций:

Теорема 6 (см. [15]). *Пусть*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant n_k, \quad n_k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{(n_k+1)\ln(n_k+1)}{n_k+1} \to 0 \text{ при } k \to +\infty.$$

Пусть $\varepsilon(H) \to 0$ при $H \to +\infty$. Пусть $\widetilde{p} \in \mathbb{N}$. Тогда существует $H_0 = H_0(\widetilde{p})$ такая, что для любого простого числа $p \leqslant \widetilde{p}$ и любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине числа H, $H \geqslant H_0$, имеющего степень m, удовлетворяющую неравенству

$$m\varepsilon(H) < \frac{\ln\widetilde{p}}{2(\widetilde{p}-1)}$$

выполнено неравенство

$$|P(\alpha)|_p > \frac{1}{m+1} \cdot H^{-1-\varepsilon^{-1}(H)\left(\ln\ln H + \ln\varepsilon^{-1}(H)\right)\cdot m}.$$

Можно отметить интересный результат, полученный автором в работе [3] по аналогии с работой P. Erdös [16]

Теорема 7 (см. [14]). *Любое целое полиадическое число α допускает представление в виде*

$$\alpha = L_1 + L_2, \tag{2.10}$$

где L_1, L_2 — полиадические лиувиллевы числа.

Одной из важнейших задач теории трансцендентных чисел является изучение арифметических свойств значений аналитических функций определенного класса.

Обобщеные гипергеометрические ряды имеют вид $F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n$, в случае рациональных параметров α_i, β_j входят в класс E-функций, если $r < s$, при $r = s$ входят в класс G-функций, а при $r > s$ являются F-рядами.

Определение 9. *Аналитическая функция* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$ *называется E-функцией, если*

1. $c_n \in \mathbb{K}$, *где $\mathbb{K}$ — некоторое алгебраическое поле конечной степени над полем рациональных чисел;*
2. *для любого $\varepsilon > 0$ $\overline{|c_n|} = O(n^{\varepsilon n}), n \to \infty$, где для алгебраического числа α символ $\overline{|\alpha|}$ обозначает наибольшую из абсолютных величин самого числа α и всех алгебраически сопряженных с ним чисел;*
3. *существует последовательность $\{q_n\}$ натуральных чисел такая, что $q_n c_k \in \mathbb{Z}_K$ — кольцу целых чисел поля $\mathbb{K}$, $k = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$ и $q_n = O(n^{\varepsilon n}), n \to \infty$.*

Замечание 4. *Можно изменить определение E-функции, заменив при некотом $c > 1$ условие $\overline{|c_n|} = O(n^{\varepsilon n}), n \to \infty$ на условие $\overline{|c_n|} = O(c^n), n \to \infty$ и условие $q_n = O(n^{\varepsilon n}), n \to \infty$ на условие $q_n = O(c^n), n \to \infty$, соответственно. Такие E-функции называют E-функциями в узком смысле.*

Отметим, что в 1970 г. Галочкин А.И. опубликовал работу [17], в которой рассматривал арифметические значения E-функций в лиувиллевой точке.

Определение 10. *Функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ называется G-функцией, если коэффициенты c_n удовлетворяют тем же условиям, что приведены в определении E-функции в узком смысле.*

Определение 11. *Степенной ряд называется F-рядом, если он входит в некоторый класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, где $\mathbb{K}$ — алгебраическое числовое поле конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\kappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$ определятся следующим образом. Пусть*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n.$$

Пусть

1. $a_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
2. $\overline{|a_n|} = O(e^{c_1 n}), n \to \infty$, *где для алгебраического числа a символ $\overline{a}$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряженных с a чисел;*
3. *существует последовательность натуральных чисел $d_n = q^n d_{0,n}$, где $q \in \mathbb{N}$, такая, что*

$$d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k = 0, 1, \dots, n.$$

При этом $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p, не большие $c_2 n$, причем

$$ord_p d_{0,n} \leqslant c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

При выполнении вышеперечисленных условий будем говорить, что $f(x)$ входит в класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$.

К этим рядам (E,G,F) применим метод Зигеля-Шидловского и обобщенный метод Зигеля-Шидловского [17, 18, 19].

В случае алгебраических параметров приходится использовать аппроксимации Эрмита-Паде [11, 12, 20, 21, 23].

Однако, в случае трансцендентных параметров результатов о свойствах обобщенных гипергеометрических рядов при $r \leqslant s$ не получалось.

Иная картина имеется в случае, когда $r > s$ и когда среди параметров λ лиувиллево полиадическое число,например ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n$, где $(\lambda)_n$ обозначает символ Похгаммера.

Вопросы о бесконечной линейной независимости получили развитие в работе [20, 22]. Коротко сформулируем основные результаты.

Пусть m — натуральное число, $m \geqslant 2$. Пусть λ_0 — произвольное натуральное число, большее 1. Положим $s_0 = [\exp \lambda_0] + 1$. Пусть λ_1 — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leqslant s_0 + 2\lambda_0^2$ выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_p \lambda_1 \geqslant m s_0 \ln s_0$$

и пусть $s_1 = [\exp \lambda_1] + 1$. При $k \geqslant 1$ пусть λ_{k+1} — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leqslant s_k + 2\lambda_k^2$ выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_p \lambda_{k+1} \geqslant m s_k \ln s_k$$

и пусть $s_{k+1} = [\exp \lambda_{k+1}] + 1$. Пусть $\mu_{i,0}$, $i = 1, \ldots, m$ — натуральные числа. Пусть для любых $i = 1, \ldots, m$, $k \geqslant 1$, числа $\mu_{i,k} \leqslant \lambda_k$.

Пусть $\alpha_l = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \mu_{i,l}\lambda_l$, $i = 1, \ldots, m$. Если при некотором k для всех $l \geqslant k$ выполняются неравенства $\mu_{i,l} = 0$, то α_l — натуральное число. Иначе этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля.

Пусть M — натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по модулю M. Пусть произвольным образом выбраны p различных элементов $a_1, \ldots a_p$ этой приведенной системы вычетов. Обозначим $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_p}$ множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями $a_i + Mk$, $i = 1, \ldots, p$, $k \in \mathbb{Z}$; $\mathbf{P}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_p})$ — множество простых чисел, входящих в объединение множеств $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_p}$.

Рассмотрим ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \ldots (\alpha_m)_n z^n,$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \ldots (\alpha_i + 1)_n (\alpha_{i+1})_n \ldots (\alpha_m)_n z^n, \quad i = 1, \ldots m-1,$$

$$f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \ldots (\alpha_m + 1)_n z^n.$$

Теорема 8 (см.[22]). *Пусть $m \geqslant 2$, M, p — натуральные числа. Пусть $(m+1)p > \varphi(m)m$. Тогда для любых целых чисел $h_0, \ldots, h_m$, не равных нулю одновременно и любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbf{P}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_p})$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство*

$$|L(\xi)|_p = |h_0 f_0(\xi) + \ldots + h_m f_m(\xi)|_p > 0.$$

Пусть натуральные числа μ_k удовлетворяют при любом k неравенству $\mu_k \leqslant \lambda_k$. Пусть $\Xi = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \mu_l \lambda_l$.

Теорема 9 (см.[22]). *Пусть $m \geqslant 2$, M, p — натуральные числа. Пусть $(m+1)p > \varphi(M)m$. Тогда для любых целых чисел $h_0, \ldots, h_m$ не равных нулю, одновременно существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbf{P}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_p})$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство*

$$|L(\Xi)|_p = |h_0 f_0(\Xi) + \ldots + h_m f_m(\Xi)|_p > 0.$$

В неравенствах заключений теорем символы $f_i(\xi), f_i(\Xi)$, $i = 0, \ldots, m$ означают суммы этих рядов в поле $\mathbb{Q}_p$.

Продолжением исследований явилась работа [23], в которой установлено, что если $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — полиадические числа Лиувилля, а число ξ — натуральное или Ξ — полиадическое число Лиувилля и если

$$\Psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \ldots (\alpha_m)_n z^n, \Psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \ldots (\alpha_m + 1)_n z^n,$$

то существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле p-адических чисел хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi), \Psi_1(\xi)$ (соответственно $\Psi_0(\Xi), \Psi_1(\Xi)$) — трансцендентное.

Следствием полученных результатов стала работа [24], в которой доказывается трансцендентность в поле 2-адических чисел хотя бы одного из двух 2-адических чисел, представляющих собой суммы в поле $\mathbb{Q}_2$ рядов типа Эйлера

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n z^n,$$

где λ представляет собой некоторое полиадическое лиувиллево число, $z = 1$, а $(\lambda)_n$ — символ Похгаммера.

Положим $\lambda_0 = 1, s_0 = [\exp \lambda_0] + 1 = 3$. Пусть λ_1 — произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p, удовлетворяющего неравенству

$$p \leqslant s_0 + 2\lambda_0^2$$

выполянется неравенство

$$\mathrm{ord}_p \lambda_1 \geqslant 2 s_0 \ln s_0$$

и положим $s_1 = [\exp \lambda_1] + 1$.

Для $k \geqslant 1$ пусть λ_{k+1} — произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p удовлетворяющего неравенству

$$p \leqslant s_k + 2\lambda_k^2 = 5$$

выполняется неравенство

$$\mathrm{ord}_p \lambda_{k+1} \geqslant 2 s_k \ln s_k$$

и определим $s_{k+1} = [\exp \lambda_{k+1}] + 1$.

Ряд $\lambda = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k$ сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 10 (см. [24]). *Хотя бы одно из 2-адических чисел $f_0(1), f_1(1)$ — трансцендентное 2-адическое число.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Waldschmidt M. Nombres Transcendants // Lect. Notes Math. 402, Springer, Mém. — 1974. — pp. 181–192.
2. Waldschmidt M. Algebraic independence of transcendental numbers. Gelfond's method and its developments // Prespectives in Mathematics. Birkhäuser, Basel Boston. — 1984. — pp. 551–557.
3. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука. — 1971. — 416 с.
4. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука. — 1984. — 520 с.
5. Kurepa D. On the left factorial function $!n$. // Math. Balkan. — 1971. — Vol. 1. — pp. 147–153.
6. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлениях натуральных чисел // Чебышевский сборник. — 2013. — Т. 14. — вып. № 1. — С. 75–86.
7. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric series // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2020. — Vol. 27. — no. 2. — p. 175–184.
8. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2019. — Vol. 26. — no. 3. — p. 286–305.
9. Чирский В. Г. Бесконечная алгебраическая независимость полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Российской Академии Наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2024. — Т. 519. — С. 16–19.
10. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля // Чебышевский сборник. — 2021. — Т. 22. — № 3. — С. 245–255.
11. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая. — 2014. — Т. 78. — № 6. — С. 193–210.
12. Chudnovsky G. V. On applications of Diophantine approximations // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 1985. — V. 81. — pp. 7261–7265.
13. Чирский В. Г. О полиадических числах Лиувилля // Чебышевский сборник. — 2021. — Т. 22. — № 5. — С. 243–251.
14. Крупицын Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов. // Чебышевский сборник. — 2019. — Т. 20. — вып. 2. — С. 374–382.
15. Крупицын Е. С. Оценка многочлена от глобально трансцендентного полиадического числа // Чебышевский сборник. — 2017. — Т. 18. — вып. 4. — С. 255–259.
16. P. Erdös Representation of real numbers as sums and product of Liouville numbers // Michigan Math. — 1962. — Vol. 9(1). — p. 59–60.
17. Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений E-функций в некоторых трансцендентных точках // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. — 1970. — №5. — С. 58–63.
18. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука. — 1987.

19. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2019. — Vol. 26, no. 3. — pp. 286–305.

20. Чирский В. Г. Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 505. — С. 63–65.

21. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 506. — С. 95–107.

22. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с параметром — лиувиллевым полиадическим числом // Доклады Российской академии наук. — 2020. — Т. 494. — С. 65–67.

23. Чирский В. Г. Трансцендентность p-адических значений обобщённых гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 510. — С. 29–32.

24. Чирский В. Г. Трансцендентность некоторых 2-адических чисел // Чебышевский сборник. — 2023. — Т. 24, № 5. — С. 194–200.

REFERENCES

1. Waldschmidt M. 1974, “Nombres Transcendants”, *Lecture Notes in Mathematics* 402. Springer. pp. 181–192.

2. Waldschmidt M. 1984, “Algebraic independence of transcendental numbers. Gelfond’s method and its developments”, *Prespectives in Mathematics*. Birkhäuser Basel Boston. pp. 551–557.

3. Postnikov A.G. 1971, *Introduction to the analytical theory of numbers*. Moscow: Nauka.

4. Pontryagin L.S. 1984, *Continuous groups*. Moscow: Nauka.

5. Kurepa D. 1971, “On the left factorial function $!n$”, *Mathematica Balkanica* 1. pp. 147–153.

6. Chirskii V.G. and Matveev V.Yu. 2013, “On representations of natural numbers”, *Chebyshevskii Sbornik* 14(1). pp. 75–86.

7. Chirskii V.G. 2020, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric series”, *Russian Journal of Mathematical Physics* 27(2). pp. 175–184.

8. Chirskii V.G. 2019, “Product formula global relations and polyadic integers”, *Russian Journal of Mathematical Physics* 26(3). pp. 286–305.

9. Chirskii V.G. 2024, “Infinite algebraic independence of polyadic series with periodic coefficients”, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* 519(6). pp. 16–19.

10. Chirskii V.G. 2021, “Polyadic Liouville numbers”, *Chebyshevskii Sbornik* 22(3). pp. 245–255.

11. Chirskii V.G. 2014, “On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters”, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk* 78(6). pp. 193–210.

12. Chudnovsky G.V. 1985, “On applications of Diophantine approximations”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 81. pp. 7261–7265.

13. Chirskii V.G. 2021, “On polyadic Liouville numbers”, *Chebyshevskii Sbornik* 22(5). pp. 243–251.

14. Krupitsyn E.S. 2019, “Arithmetic properties of series of some classes”, *Chebyshevskii Sbornik* 20(2). pp. 374–382.

15. Krupitsyn E.S. 2017, “Estimates of polynomials in a Liouvillean polyadic integer”, *Chebyshevskii Sbornik* 18(4). pp. 255–259.

16. Erdős P. 1962, “Representation of real numbers as sums and product of Liouville numbers”, *Michigan Mathematical Journal* 9(1). pp. 59–60.

17. Galochkin A.I. 1970, “On the algebraic independence of the values of E-functions in some transcendental points”, *Bulletin of Moscow State University. Series 1: Mathematics Mechanics* 5. pp. 58–63.

18. Shidlovsky A.B. 1987, *Transcendental numbers*. Moscow: Nauka.

19. Chirskii V.G. 2019, “Product formula global relations and polyadic integers”, *Russian Journal of Mathematical Physics* 26(3). pp. 286–305.

20. Chirskii V.G. 2022, “New problems in the theory of transcendental polyadic numbers”, *Doklady Mathematics* 106(1). pp. 265–267.

21. Chirskii V.G. 2022, “Arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameters”, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* 506. pp. 95–107.

22. Chirskii V.G. 2020, “Arithmetic properties of Eulerian type series with parameter — Liouville polyadic number”, *Doklady Mathematics* 494. pp. 65–67.

23. Chirskii V.G. 2023, “Transcendence of p-adic values of generalized hypergeometric series with transcendental polyadic parameters”, *Doklady Mathematics* 510. pp. 29–32.

24. Chirskii V.G. 2023, “The transcendence of some 2-adic numbers”, *Chebyshevskii Sbornik* 24(5). pp. 194–200.

Получено: 24.06.2025
Принято в печать: 17.10.2025